Матэматыка

УДК 517.956.32

Решение смешанной задачи для факторизованного уравнения колебаний ограниченной струны при полунестационарных факторизованных вторых косых производных в граничных условиях

Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков
Белорусский государственный университет

Ранее смешанные задачи для уравнения колебаний ограниченной струны решались методом характеристик только с помощью некоторых продолжений правой части, начальных данных и граничных данных вне областей задания этих задач.

Цель настоящей работы состояла в нахождении явного вида классических решений уравнения колебаний ограниченной струны более общего вида

$$\left(\partial_t - a_2\partial_x + b_2\right)\left(\partial_t + a_1\partial_x + b_1\right)u(x,t) = f(x,t),\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \{x,t\} \in G = [0,d]\times[0,\infty[,$$

при начальных условиях $u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le d,$ *и граничных условиях*

$$\left[\left(\alpha_{i2}(t)\partial_t + \beta_{i2}(t)\partial_x + \gamma_{i2}(t)\right)\left(\alpha_{i1}\partial_t + \beta_{i1}\partial_x + \gamma_{i1}\right)u\right]\Big|_{x=d(i-1)} = \mu_i(t),\ i = 1, 2,\ 0 \le t < \upsilon,$$

без каких-либо продолжений исходных данных f, φ, ψ *и* μ_1, μ_2 *этой смешанной задачи вне множества G. В этой смешанной задаче* $\alpha_{i2}, \beta_{i2}, \gamma_{i2}$ *– непрерывные функции переменной t и* $b_i,\ \alpha_{i1},\ \beta_{i1},\ \gamma_{i1},\ i = 1,2,$ *– вещественные постоянные. Рассмотрен случай граничных условий с нехарактеристическими направлениями всех первых косых производных в факторизованных вторых косых производных на концах струны, т.е.* $a_i\alpha_{ij} \ne (-1)^{i+1}\beta_{ij},\ t \in [0,\infty[,\ i,\ j = 1, 2.$

Эта смешанная задача решена новым методом сечения и сшивания вдоль характеристик, предложенным Ф.Е. Ломовцевым.

Выведены трехшаговые рекуррентные формулы ее классических решений. Для существования и единственности классических решений поставленной смешанной задачи установлены следующие необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования на правую часть уравнения, начальные и граничные данные:

$$f \in C(G), \varphi \in C^2[0,d], \psi \in C^1[0,d], \mu_1, \mu_2 \in C[0,\infty[,$$

$$\int_{d_n}^{t} e^{b_m\tau} f\left(\left|d - \left|\ d - x - (-1)^m a_m(t-\tau)\right|\ \right|, \tau\right) d\tau \in C^1(G^{(n)}),\ m = 1, 2,$$

$$G^{(n)} = [0,d]\times[d_n, d_{n+1}],\ d_n = (n-1)d/(a_1 + a_2),\ n = 1,2,...,$$

$$\alpha_{i2}(0)\{\alpha_{i1}[f(d^{(i)},0) + (a_2 - a_1)\psi'(d^{(i)}) + a_1a_2\varphi''(d^{(i)}) - (b_2 + b_1)\psi(d^{(i)}) - (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(d^{(i)}) -$$
$$- b_2b_1\varphi(d^{(i)})] + \beta_{i1}\psi'(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\psi(d^{(i)})\} + \beta_{i2}(0)[\alpha_{i1}\psi'(d^{(i)}) + \beta_{i1}\varphi''(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\varphi'(d^{(i)})] +$$
$$+ \gamma_{i2}(0)[\alpha_{i1}\psi(d^{(i)}) + \beta_{i1}\varphi'(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\varphi(d^{(i)})] = \mu_i(0),\ d^{(i)} = (i-1)d, i = 1,2.$$

Ключевые слова: *трехшаговая рекуррентная формула, необходимое и достаточное условие, условие согласования, смешанная задача, факторизованное уравнение, вторая косая производная.*

Resolution of a Mixed Problem for Factorized Vibration Equation of a Bounded String with a Seminonstationary Factorized Second Directional Derivatives in the Boundary Conditions

F.E. Lomovtsev, E.N. Novikov
Belarusian State University

Previously mixed problems for a vibration equation of a bounded string were solved by the characteristics method of just using some extensions of the right-hand side, the initial and boundary data outside of the domains for these problems.

The aim of this work was to find a closed-form expression for classical solutions for the vibration equation of a bounded string at more general form

$$\left(\partial_t - a_2\partial_x + b_2\right)\left(\partial_t + a_1\partial_x + b_1\right)u(x,t) = f(x,t),\, a_1 > 0,\, a_2 > 0,\, \{x,t\} \in G = [0,d]\times[0,\infty[,$$

with the initial conditions $u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le d,$ *and the boundary conditions*

$$\left[\left(\alpha_{i2}(t)\partial_t + \beta_{i2}(t)\partial_x + \gamma_{i2}(t)\right)\left(\alpha_{i1}\partial_t + \beta_{i1}\partial_x + \gamma_{i1}\right)u\right]\Big|_{x=d(i-1)} = \mu_i(t),\, i = 1, 2,\ 0 \le t < \upsilon,$$

without any extensions of the original data f, φ, ψ *u* μ_1, μ_2 *of this mixed problem outside of set G. In this mixed problem* $\alpha_{i2}, \beta_{i2}, \gamma_{i2}$ *– a continuous functions of the variable* t *and* $\alpha_{i2}, \beta_{i2}, \gamma_{i2}$ $b_i,\ \alpha_{i1},\ \beta_{i1},\ \gamma_{i1},\ i = 1, 2,$ *– real constants. We consider the case of the boundary conditions with non-characteristic directions of the all first directional derivatives into the factored second directional derivatives at the ends of the string, i.e.* $a_i\alpha_{ij} \ne (-1)^{i+1}\beta_{ij},\, t \in [0,\infty[,\ i,\ j = 1, 2.$

Posed mixed problem is solved by new Lomovtsev's method «to cut out and to sew together along characteristics».

We derive the three-step recurrent formulas for its classical solutions. For the existence and uniqueness of classical solutions of this mixed problem we determine the following necessary and sufficient conditions of smoothness and consistency conditions on the right-hand side of equation initial data and boundary value:

$$f \in C(G), \varphi \in C^2[0,d], \psi \in C^1[0,d], \mu_1, \mu_2 \in C[0,\infty[,$$

$$\int_{d_n}^{t} e^{b_m\tau} f(\left|d - \left|\ d - x - (-1)^m a_m(t-\tau)\right|\ \right|, \tau)\, d\tau \in C^1(G^{(n)}),\ m = 1, 2,$$

$$G^{(n)} = [0,d]\times[d_n, d_{n+1}],\, d_n = (n-1)d/(a_1 + a_2),\, n = 1, 2, \ldots,$$

$$\alpha_{i2}(0)\{\alpha_{i1}[f(d^{(i)},0) + (a_2 - a_1)\psi'(d^{(i)}) + a_1a_2\varphi''(d^{(i)}) - (b_2 + b_1)\psi(d^{(i)}) - (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(d^{(i)}) -$$
$$-b_2b_1\varphi(d^{(i)})] + \beta_{i1}\psi'(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\psi(d^{(i)})\} + \beta_{i2}(0)[\alpha_{i1}\psi'(d^{(i)}) + \beta_{i1}\varphi''(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\varphi'(d^{(i)})] +$$
$$+\gamma_{i2}(0)[\alpha_{i1}\psi(d^{(i)}) + \beta_{i1}\varphi'(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\varphi(d^{(i)})] = \mu_i(0),\, d^{(i)} = (i-1)d,\, i = 1, 2.$$

Key words: *three-step recurrent formula, necessary and sufficient condition, matching condition, mixed problem, factorized equation, second directional derivative.*

Новым методом «сечения и сшивания вдоль характеристик» выведены явные трехшаговые рекуррентные формулы классических решений смешанной задачи для общего стационарного уравнения колебаний ограниченной струны при нестационарных дифференциальных граничных условиях второго порядка специального вида на ее концах. В граничных условиях направления всех первых косых производных не являются характеристическими. Для ее корректности во множестве классических решений впервые установлены необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения, начальные и граничные данные. Формулы ее классических решений получены не традиционным методом продолжения исходных данных задачи, а предложенным Ф.Е. Ломовцевым в [1] методом сечения и сшивания кусков классических решений подобной смешанной задачи для полуограниченной струны вдоль характеристик уравнения из [2]. Этим же методом выявляются необходимые и достаточные требования гладкости исходных данных задачи и условия согласования, обеспечивающие соответственно гладкость кусков классических решений и их гладкое сшивание вдоль характеристик уравнения. Смешанная задача для простейшего уравнения колебаний ограниченной струны при первых косых производных в граничных условиях решена этим новым методом в [3]. Из результатов работы [2] вытекают результаты работы [4] для полуограниченной струны в частном случае простейшего уравнения колебаний струны. Впервые явные формулы классических решений с достаточными условиями корректности и их формулы с необходимыми и достаточными условиями корректности смешанной задачи для простейшего однородного и неоднородного уравнений колебаний полуограниченной струны при первой косой производной в граничном условии были получены соответственно в [5] и [6]. Известным методом продолжения смешанные задачи для уравнения колебаний струны при не зависящих от времени граничных условиях решались в [7–11]. Поскольку исходные данные смешанных задач можно продолжать вне множества задания разными способами, то получаются разные решения и необходимые и достаточные условия их существования и единственности. В новом методе решения без продолжений исходных данных задач этот недостаток отсутствует.

Материал и методы. На множествах $G_\kappa = \mathrm{X}_\kappa \times [0,\infty[,\ \mathrm{X}_\kappa = [0,\kappa],$ рассматриваются следующие две смешанные задачи для факторизованного уравнения колебаний струны

$$\left(\partial_t - a_2\partial_x + b_2\right)\left(\partial_t + a_1\partial_x + b_1\right)u(x,t) = f(x,t), \{x,t\} \in G_\kappa, \tag{1}$$

при зависящих от времени $t \ge 0$ граничных условиях

$$\left(\Gamma_1(t)u\right)\big|_{x=0} \equiv \left(\left(\alpha_{12}(t)\partial_t + \beta_{12}(t)\partial_x + \gamma_{12}(t)\right)\left(\alpha_{11}\partial_t + \beta_{11}\partial_x + \gamma_{11}\right)u\right)\big|_{x=0} = \mu_1(t),$$

$$\kappa^{-1}\left(\Gamma_2(t)u\right)\big|_{x=\kappa} \equiv \kappa^{-1}\left(\left(\alpha_{22}(t)\partial_t + \beta_{22}(t)\partial_x + \gamma_{22}(t)\right)\left(\alpha_{21}\partial_t + \beta_{21}\partial_x + \gamma_{21}\right)u\right)\big|_{x=\kappa} = \kappa^{-1}\mu_2(t) \qquad (2)$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \partial_t u\big|_{t=0} = \psi(x),\ x \in X_\kappa, \qquad (3)$$

где параметр $\kappa = +\infty$ или $\kappa = d$, $0 < d < +\infty$; символы $\partial_t = \partial/\partial t, \partial_x = \partial/\partial x, \partial_{tt} = \partial^2/\partial t^2,\ \partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2, \partial_{xt} = \partial^2/\partial x\partial t;$ f, φ, ψ, μ_i, α_{i2}, β_{i2}, γ_{i2}, i = 1, 2 – заданные ограниченные функции независимых переменных x и t; a_i, b_i, $\alpha_{i1}, \beta_{i1}, \gamma_{i1}$, i = 1, 2, – вещественные постоянные.

Нами поставлены две смешанные задачи (1)–(3) о колебаниях полуограниченной струны, если $\kappa = +\infty$, и ограниченной струны, если $\kappa = d, 0 < d < +\infty$, так как второе граничное условие в (2) всегда выполняется при $\kappa = +\infty$ для ограниченных функций и их частных производных при x = +υ. Смешанной задачей (1)–(3) при $\kappa = d$ моделируются колебания упругой ограниченной струны, которые порождены суперпозицией прямой волны и обратной волны со скоростями a_1 и a_2 в движущейся со скоростью $a_1 - a_2$ упруго сопротивляющейся среде за счет вынуждающей силы, начального смещения, начальной скорости и нестационарных граничных режимов. Вторые косые производные в граничных условиях (2) выражают на концах струны динамическую силу, сопротивление среды, пропорциональное их смещениям, скоростям и ускорениям.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k = 1, 2 раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω, $C(\Omega)$ – множество непрерывных функций на $\Omega \subset \nabla^2$, ∇ – вещественная прямая. Следует найти классические решения $u \in C^2(G_d)$ смешанной задачи (1)–(3) в случае ограниченной струны и установить необходимые и достаточные условия на правую часть f, начальные данные φ, ψ и граничные данные μ_i, i =1, 2 для ее корректной разрешимости.

Мы решаем первую из поставленных смешанных задач (1)–(3) при $\kappa = +\infty$ методом характеристик и методом Дюамеля. Вторая из поставленных смешанных задач (1)–(3) при $\kappa = d$ решается новым методом «сечения и сшивания вдоль характеристик», предложенным первым автором настоящей статьи в [1].

Ранее смешанные задачи для волновых уравнений при стационарных граничных условиях решались методом продолжения исходных данных вне множества задания задачи. Поскольку исходные данные смешанных задач можно продолжать разными способами, то получаются разные решения и необходимые и достаточные условия их существования и единственности. Новый метод «сечения и сшивания вдоль характеристик» избавлен от этого недостатка.

Результаты и их обсуждение. Решения $u \in C^2(G_d)$ задачи (1)–(3) в G_d получены сечением на куски решений $u \in C^2(G_\infty)$ задачи (1)–(3) в G_υ из [2] и их сшиванием вдоль характеристик методом Ф.Е. Ломовцева из работы [1].

1. Сначала приведем результаты и обсудим их для первой из поставленных смешанных задач. Мы вывели формулы решений более простого и общего вида для смешанной задачи (1)–(3) в G_υ, чем в [2], без продолжения правой части f на $x < 0$. С этой целью множество G_υ так же, как в [2], делится характеристикой $x = a_1 t$ на два множества

$$G_- = \left\{\{x,t\} \in G_\infty : x > a_1 t, t > 0\right\},$$
$$G_+ = \left\{\{x,t\} \in G_\infty : x \le a_1 t, x \ge 0\right\}.$$

Ввиду гладкости классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ из уравнения (1) и условий (2), (3) вытекают необходимые требования гладкости

$$f \in C(G_\kappa),\ \mu_i \in C[0,\infty[,\ \varphi \in C^2(X_\kappa),\ \psi \in C^1(X_\kappa), \qquad (4)$$

где $\kappa = \infty, i$ = 1. Из граничного условия (2), полагая t = 0 и вычисляя значения следов слагаемых с помощью начальных условий (3) при x = 0 и уравнения (1) при x = 0, t = 0, находим необходимое условие согласования

$$\alpha_{i2}(0)\{\alpha_{i1}[f(d^{(i)},0) + (a_2 - a_1)\psi'(d^{(i)}) + a_1 a_2 \varphi''(d^{(i)}) - (b_2 + b_1)\psi(d^{(i)}) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varphi'(d^{(i)}) - b_2 b_1 \varphi(d^{(i)})] + \beta_{i1}\psi'(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\psi(d^{(i)})\} + \beta_{i2}(0)[\alpha_{i1}\psi'(d^{(i)}) + \beta_{i1}\varphi''(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\varphi'(d^{(i)})] + \gamma_{i2}(0)[\alpha_{i1}\psi(d^{(i)}) + \beta_{i1}\varphi'(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\varphi(d^{(i)})] = \mu_i(0),\ d^{(i)} = (i-1)d, \qquad (5)$$

где i = 1, одним и двумя штрихами над функциями обозначены соответственно их первая и вторая производные. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_{12}, \beta_{12}, \gamma_{12} \in C[0,\infty[$, a_1>0, $a_2$80, $a_1\alpha_{1j} \neq \beta_{1j}, t \in [0,\infty[$, *j* = 1, 2. *Задача (1)–(3) в* G_υ *имеет единственные решения* $u \in C^2(G_\infty)$ *вида*

$$u_-(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\Big(a_1 e^{-b_2 t}\varphi(x + a_2 t) + a_2 e^{-b_1 t}\varphi(x - a_1 t) +$$

$$+ e^{-At}\int\limits_{x-a_1 t}^{x+a_2 t} e^{B(x-s)}\left[A\varphi(s) + \psi(s)\right]ds\Big) + F_1^{(1)}(x,t), \{x,t\} \in G_-, \quad (6)$$

$$u_+(x,t) = \Phi_2(x,t) + a_1 \int\limits_0^{t-\frac{x}{a_1}} e^{C_1 t - D_1(a_1\tau + x)} \times$$

$$\times \Bigg(a_1 \int\limits_0^{\tau} \frac{P_2(\nu) e^{a_1\int_\nu^\tau E_1(s)ds + b_1\nu}}{(a_1\alpha_{11} - \beta_{11})(a_1\alpha_{12}(\nu) - \beta_{12}(\nu))} d\nu +$$

$$+ \frac{b_2\varphi(0) + \psi(0) - a_2\varphi'(0)}{a_1 + a_2} e^{a_1\int_0^\tau E_1(s)ds}\Bigg) d\tau + F_1^{(1)}(x,t), \{x,t\} \in G_+, \quad (7)$$

где A, B, C_1, D_1, E_1, $F_2^{(1)}$, Φ_2, P_2 указаны в теореме 2, тогда и только тогда, когда верны условия (4), (5) при $\kappa = \infty, i = 1$ *и требование гладкости*

$$\int\limits_0^t e^{b_m\tau} f\left(\left|x + (-1)^m a_m(t-\tau)\right|, \tau\right)d\tau \in C^1(G_\infty), m = 1, 2. \quad (8)$$

Доказательство теоремы 1 такое же, как ее аналога в [2], с той лишь разницей, что в частном решении *F*(*x*, *t*) уравнения (1) на множестве G_+ берутся значения $f(|s|, t)$ вместо значений $f(s, t)$ подынтегральной функции *f*.

2. Теперь приведем результаты и проведем их обсуждение для второй из поставленных смешанных задач. Ввиду гладкости решений $u \in C^2(G_d)$ из уравнения (1) и условий (2), (3) находим необходимые требования гладкости (4) в G_d при $\kappa = d, i = 1,2$. Полагая *t* = 0 в двух граничных условиях (2) и вычисляя значения следов слагаемых последовательно при *x* = 0 и *x* = *d* с помощью начальных условий (3) и уравнения (1) при *t* = 0, выводим необходимые условия согласования (5) при *i* = 1, 2.

Для решения задачи (1)–(3) на G_d с помощью теоремы 1 разбиваем множество G_d на прямоугольники $G^{(n)} = [0,d] \times [d_n, d_{n+1}]$, где $d_n = (n-1)d/(a_1 + a_2), n = 1, 2, ...,$ каждый из которых делим характеристиками уравнения (1) не на четыре треугольника, как в [1], а на три треугольника:

$$\Delta_{3n-2} = \{\{x,t\} : x > a_1(t - d_n), x + a_2(t - d_n) < d,$$

$$x \in]0, d[, t \in [d_n, d_{n+1}[\},$$

$$\Delta_{3n-1} = \{\{x,t\} : x \leq a_1(t - d_n),$$

$$x \in [0, a_1 d_2],\ t \in [d_n, d_{n+1}]\},$$

$$\Delta_{3n} = \{\{x,t\} : x + a_2(t - d_n) \geq d,$$

$$x \in [a_1 d_2, d], t \in [d_n, d_{n+1}]\}, n = 1, 2, ...$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_{i2}, \beta_{i2}, \gamma_{i2} \in C[0,\infty[$, $a_i\alpha_{ij} \neq (-1)^{i+1}\beta_{ij}, a_i > 0, t \in [0,\infty[$, *i*, *j* = 1, 2. *Задача (1)–(3) в* G_d *имеет единственные решения* $u \in C^2(G_d)$ *вида*

$$u_{3n-2}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\Big(a_1 e^{-b_2(t-d_n)}\varphi_n(x + a_2(t - d_n)) +$$

$$+ a_2 e^{-b_1(t-d_n)}\varphi_n(x - a_1(t - d_n)) +$$

$$+ e^{-A(t-d_n)}\int\limits_{x-a_1(t-d_n)}^{x+a_2(t-d_n)} e^{B(x-s)}\left[A\varphi_n(s) + \psi_n(s)\right]ds\Big) + F_n^{(1)}(x,t), \quad (9)$$

$$u_{3n-1}(x,t) = \Phi_{3n-1}(x,t) + a_1 \int\limits_0^{t-d_n-\frac{x}{a_1}} e^{C_1(t-d_n) - D_1(a_1\tau + x)}\Bigg(a_1\int\limits_{d_n}^{d_n+\tau} P_{3n-1}(\nu) \times$$

$$\times \exp\left\{a_1 \int\limits_\nu^{d_n+\tau} E_1(s)\,ds + b_1(\nu - d_n)\right\}(a_1\alpha_{11} - \beta_{11})^{-1} \times$$

$$\times (a_1\alpha_{12}(\nu) - \beta_{12}(\nu))^{-1} d\nu +$$

$$+ \frac{b_2\varphi_n(0) + \psi_n(0) - a_2\varphi_n{}'(0)}{a_1 + a_2}\exp\left\{a_1\int\limits_{d_n}^{d_n+\tau} E_1(s)\,ds\right\}\Bigg)d\tau +$$

$$+ F_n^{(1)}(x,t), \quad (10)$$

$$u_{3n}(x,t) = \Phi_{3n}(x,t) + a_2 \int\limits_0^{t-d_n-\frac{d-x}{a_2}} e^{C_2(t-d_n) - D_2(a_1\tau + d - x)} \times$$

$$\times \Bigg(a_2 \int\limits_{d_n}^{d_n+\tau} P_{3n}(\nu) \times \exp\left\{a_2\int\limits_\nu^{d_n+\tau} E_2(s)\,ds + b_1(\nu - d_n)\right\} \times$$

$$\times (a_2\alpha_{21} + \beta_{21})^{-1}(a_2\alpha_{22}(\nu) + \beta_{22}(\nu))^{-1} d\nu +$$

$$+ \frac{b_1\varphi_n(d) + \psi_n(d) + a_1\varphi_n{}'(d)}{a_1 + a_2}\exp\left\{a_2\int\limits_{d_n}^{d_n+\tau} E_2(s)\,ds\right\}\Bigg)d\tau +$$

$$+ F_n^{(2)}(x,t), n = 1, 2, \ldots, \quad (11)$$

где u_{3n-k} *– решения в треугольниках* Δ_{3n-k}, *k* = 0, 1, 2,

$$\varphi_1(x) = \varphi(x), \psi_1(x) = \psi(x), x \in [0, d],$$

$$\varphi_n(x) = u_{3n+j-4}\big|_{t=d_n}, \psi_n(x) = \partial_t u_{3n+j-4}\big|_{t=d_n},$$

$$x \in [ja_1 d_2, (a_1 + ja_2)d_2],\ j = 0, 1,\ n = 2, 3, ...,$$

$$d_n = \frac{(n-1)d}{a_1 + a_2}, A = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 + a_2}, B = \frac{b_2 - b_1}{a_1 + a_2},$$

$$C_i = \frac{(-1)^{i+1} b_i \beta_{i1} - a_i \gamma_{i1}}{a_i \alpha_{i1} + (-1)^i \beta_{i1}}, D_i = \frac{b_i \alpha_{i1} - \gamma_{i1}}{a_i \alpha_{i1} + (-1)^i \beta_{i1}},$$

$$E_i(t) = \frac{b_i \alpha_{i2}(t) - \gamma_{i2}(t)}{a_i \alpha_{i2}(t) + (-1)^i \beta_{i2}(t)}, i = 1, 2,$$

$$F_n^{(1)}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{d_n}^{t} e^{A(\tau - t)} \int_{x - a_1(t-\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} e^{B(x-s)} f(|s|, \tau)\, ds\, d\tau,$$

$$F_n^{(2)}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{d_n}^{t} e^{A(\tau - t)} \int_{d - x - a_2(t-\tau)}^{d - x + a_1(t-\tau)} e^{B(s+x-d)} \cdot$$

$$\cdot f(d - |s|, \tau)\, ds\, d\tau,$$

$$\Phi_{3n-j}(x,t) = \frac{e^{-b_{1+j}(t-d_n)}}{a_1 + a_2} \Big\{ a_{2-j} \varphi_n(x - (-1)^j a_{j+1}(t - d_n)) +$$

$$+ a_2 e^{B(x - (-1)^j a_{j+1}(t-d_n))} \varphi_n(d - jd) + (-1)^j \int_{x - (-1)^j a_{j+1}(t-d_n)}^{d - jd}$$

$$e^{B(x - (-1)^j a_{j+1}(t-d_n) - s)} \left[A\varphi_n(s) + \psi_n(s) \right] ds \Big\}, \quad j = 0, 1,$$

$$P_{3n-2+i}(t) = \mu_i(t) - \Big\{ \Gamma_i(t) \Big(\Phi_{3n-2+i}(x,t) +$$

$$+ F_n^{(i)}(x,t) \Big) \Big\} \Big|_{x = d(i-1)}, i = 1, 2,$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия (4), (5) при $\kappa = d, i = 1, 2,$ *и*

$$\int_{d_n}^{t} e^{b_m \tau} f\left(\left| d - \left| d - x - (-1)^m a_m(t - \tau) \right| \right|, \tau \right) d\tau \in C^1(G^{(n)}),$$

$$m = 1, 2, \ n = 1, 2 \ldots \qquad (12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость формул (9)–(11) решений $u \in C^2(G_d)$ задачи (1)–(3) в G_d и необходимых и достаточных условий (4), (5) при $\kappa = d, i = 1, 2,$ и (12) их существования и единственности доказываем методом математической индукции по номеру n прямоугольников $G^{(n)}$. На первом шаге математической индукции убеждаемся в их справедливости на прямоугольнике $G^{(1)}$. В силу теоремы 1 в треугольниках Δ_1 и Δ_2 единственные классические решения u_1 и u_2 задачи (1)–(3) выражаются соответственно формулами (6) и (7) с необходимыми и достаточными условиями (4), (5) при $\kappa = d, i = 1$ и (8), т.е. соответственно формулами (9) и (10) при $n = 1$ с необходимыми и достаточными условиями (4), (5) при $\kappa = d, i = 1$ и (12) при $n = 1$ на $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Чтобы найти классическое решение u_3 и необходимые и достаточные условия его существования и единственности на треугольнике Δ_3, исходную задачу (1)–(3) в треугольнике Δ_3 заменой $x = d - \tilde{x}$ сводим в треугольнике $\tilde{\Delta}_2 = \{\{\tilde{x}, t\} : \tilde{x} \le a_2 t, \tilde{x} \in [0, a_2 d_2], t \in [0, d_2]\},$ к эквивалентной граничной задаче

$$\left(\partial_t - a_1 \partial_{\tilde{x}} + b_1\right)\left(\partial_t + a_2 \partial_{\tilde{x}} + b_2\right) \tilde{u}(\tilde{x}, t) = \tilde{f}(\tilde{x}, t), \{\tilde{x}, t\} \in \tilde{\Delta}_2,$$

$$\Big(\left(\alpha_{22}(t) \partial_t - \beta_{22}(t) \partial_{\tilde{x}} + \gamma_{22}(t) \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\alpha_{21} \partial_t - \beta_{21} \partial_{\tilde{x}} + \gamma_{21} \right) \tilde{u} \Big) \Big|_{\tilde{x} = 0} = \mu_2(t), t \in [0, d_2].$$

Затем применяем к этой граничной задаче формулу (7) при $n = 1$ для исходных данных

$$\tilde{f}(\tilde{x}, t) = f(d - \tilde{x}, t) = f(x, t),$$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(d - \tilde{x}) = \varphi(x), \quad \tilde{\psi}(\tilde{x}) = \psi(d - \tilde{x}) = \psi(x),$$

меняем взаимно a_1, b_1 соответственно на a_2, b_2, заменяем $\alpha_{1,j}, \beta_{1,j}, \gamma_{1,j}, \mu_1$ соответственно на $\alpha_{2,j}, -\beta_{2,j}, \gamma_{2,j}, \mu_2, j = 1, 2,$ делаем обратную замену $\tilde{x} = d - x$ и получаем формулу (11) при $n = 1$. При этом необходимые и достаточные условия (4), (5) при $\kappa = d, i = 1$ и (8) на треугольнике $\tilde{\Delta}_2$ по переменным $\tilde{x}, t$ при указанных выше заменах коэффициентов уравнения (1) и граничных условий (2) после обратной замены $\tilde{x} = d - x$ переходят в необходимые и достаточные условия (4), (5) при $\kappa = d, i = 2$ и (12) при $n = 1$ на Δ_3, поскольку характеристика $\tilde{x} = a_2 t$ после замены $\tilde{x} = d - x$ становится характеристикой $x + a_2 t = d.$ Действительно, необходимое и достаточное условие (8) на треугольнике $\tilde{\Delta}_2$ по $\tilde{x}, t$ имеет вид

$$\int_0^t e^{b_m \tau} \tilde{f}\left(\left| \tilde{x} - (-1)^m a_m(t - \tau) \right|, \tau \right) d\tau \in C^1(\tilde{\Delta}_2), m = 1, 2,$$

с минусом вместо плюса перед множителем $(-1)^m$ ввиду взаимных замен a_1 соответственно на a_2. Здесь выражаем $\tilde{f}$ через f, делаем замену $\tilde{x} = d - x$ и получаем необходимое и достаточное условие (12) без внешнего модуля при $n = 1$ на Δ_3. По теореме 1 для исходных данных, гладких в смысле (4) при $\kappa = d, i = 2,$ условие согласования (5) при $i = 2$ гарантирует дважды непрерывную дифференцируемость решений u_1 и u_3 на характеристике $x + a_2 t = d,$ так как решение u_1 совпадает с соответствующим решением $\hat{u}_1$, которое получается из формулы (6) для $\tilde{f}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ взаимными заменами a_1, b_1 соответственно на a_2, b_2 и заменой $\tilde{x} = d - x$.

На втором шаге математической индукции предполагаем, что формулы (9)–(11) единственных классических решений $u \in C^2([0, d] \times [0, d_{n+1}])$ и необходимые и достаточные условия (4), (5) при $\kappa = d, i = 1, 2,$ и (12) верны для задачи (1)–(3) на прямоугольниках $G^{(p)}$, $p = 1, \ldots, n$, и показываем, что они справедливы для ее единственных решений $u \in C^2([0, d] \times [0, d_{n+2}])$ на прямоугольнике $G^{(n+1)}$. Задача (1), (2) с начальными условиями

$$u|_{t=d_{n+1}} = \varphi_{n+1}(x),\ \partial_t u|_{t=d_{n+1}} = \psi_{n+1}(x),\ \ x \in X_d,$$

в $G^{(n+1)}$ заменой $t = \tilde{t} + d_{n+1}$ сводится к задаче вида (1)–(3) в $G^{(1)}$ относительно функции $\tilde{u} = \tilde{u}(x, \tilde{t}) = u(x, \tilde{t} + d_{n+1}) = u(x, t)$ с начальными условиями при $\tilde{t} = 0$. В силу доказательства первого шага индукции ее единственные классические решения в $G^{(1)}$ выражаются соответствующими формулами вида (9)–(11) при $n = 1$, в которых делаем обратную замену $\tilde{t} = t - d_{n+1}$ и получаем формулы (9)–(11) при $n+1$ вместо n. Эти формулы решений задачи (1)–(3) на $G^{(n+1)}$ дают дважды непрерывно дифференцируемые функции на треугольниках $\Delta_{3(n+1)-k}, k = 0, 1, 2,$ в силу доказательств первого шага индукции, так как новые начальные данные имеют гладкость

$$\varphi_{n+1}(x) \in C^2(X_d),\ \ \psi_{n+1}(x) \in C^1(X_d),$$

благодаря предположению индукции о существовании и единственности классического решения $u \in C^2(G^{(n)})$, через которое и его первую частную производную по t при $t = d_{n+1}$ они выражаются. Аналогичным образом необходимые и достаточные условия (4), (5) при $\kappa = d$, i = 1, 2 и (12) при n = 1 для полученной выше задачи вида (1)–(3) в $G^{(1)}$ относительно функции $\tilde{u} = \tilde{u}(x, \tilde{t})$ обратной заменой $\tilde{t} = t - d_{n+1}$ и соответствующей заменой переменной интегрирования аналогично сводятся к необходимым и достаточным условиям (4), (5) при $\kappa = d$, i= 1, 2 и (12) при n + 1 вместо n для задачи (1)–(3) в $G^{(n+1)}$. Эти требования гладкости и условия согласования обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость единственных решений $u_{3(n+1)-k}, k = 0, 1, 2,$ соответственно в треугольниках $\Delta_{3(n+1)-k}, k = 0, 1, 2,$ и на характеристиках $x = a_1(t - d_{n+1}),\ \ x + a_2(t - d_{n+1}) = d$, потому что эти решения и характеристики для x, t в $G^{(n+1)}$ выводятся одними и теми же гладкими невырожденными заменами из соответствующих решений и характеристик для $x, \tilde{t}$ в $G^{(1)}$.

По построению на общей стороне $G^{(n)} \cap G^{(n+1)}$ этих прямоугольников имеем равенства

$$u_{3n+1}\Big|_{t=d_{n+1}} = \varphi_{n+1}(x) = u_{3n-1+j}\Big|_{t=d_{n+1}},$$
$$\partial_t u_{3n+1}\Big|_{t=d_{n+1}} = \psi_{n+1}(x) = \partial_t u_{3n-1+j}\Big|_{t=d_{n+1}}$$

для всех $x \in [ja_1 d_2, (a_1 + ja_2)d_2]$, j = 0, 1. Дифференцируя эти равенства соответствующее число раз по x и t, с помощью уравнения (1) вычисляем частные производные:

$$\partial_x u_{3n+1}\Big|_{t=d_{n+1}} = \varphi'_{n+1}(x) = \partial_x u_{3n-1+j}\Big|_{t=d_{n+1}},$$
$$\partial_{xt} u_{3n+1}\Big|_{t=d_{n+1}} = \psi'_{n+1}(x) = \partial_{xt} u_{3n-1+j}\Big|_{t=d_{n+1}},$$
$$\partial_{tt} u_{3n+1}\Big|_{t=d_{n+1}} =$$
$$= f(x, d_{n+1}) + (a_2 - a_1)\psi'_{n+1}(x) + a_1 a_2 \varphi''_{n+1}(x) -$$
$$-(b_2 + b_1)\psi_{n+1}(x) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varphi'_{n+1}(x) - b_2 b_1 \varphi_{n+1}(x) =$$
$$= \partial_{tt} u_{3n-1+j}\Big|_{t=d_{n+1}},$$
$$\partial_{xx} u_{3n+1}\Big|_{t=d_{n+1}} = \varphi''_{n+1}(x) = \partial_{xx} u_{3n-1+j}\Big|_{t=d_{n+1}},$$
$$x \in [ja_1 d_2, (a_1 + ja_2)d_2],\ \ j = 0, 1.$$

Они указывают на дважды непрерывную дифференцируемость решений задачи (1)–(3) на стыке $t = d_{n+1}$ прямоугольников $G^{(n)}$ и $G^{(n+1)}$. Теорема 2 доказана.

Замечание. *Необходимые и достаточные условия (4), (5), (12) и формулы решений (9)–(11) не зависят от каких-либо продолжений функций* f, μ_1, μ_2, φ, ψ *вне множества их задания* G_d. *Можно показать, что требование гладкости (12) на* $\Delta_{3n-2} \cup \Delta_{3n-1}$ *эквивалентно требованию*

$$\int_{d_n}^{t} e^{b_m \tau} \left(\left| x + (-1)^m a_m (t - \tau) \right|, \tau \right) d\tau \in C^1(\Delta_{3n-2} \cup \Delta_{3n-1}),$$
$$m = 1, 2,$$

так как $d - \left| d - x - (-1)^m a_m (t - \tau) \right| = x + (-1)^m a_m (t - \tau)$, m = 1, 2, *на объединении* $\Delta_{3n-2} \cup \Delta_{3n-1}, n = 1, 2, \ldots$ *Последний интеграл можно брать без модуля на* Δ_{3n-2}, *потому что выражения* $0 < x + (-1)^m a_m (t - \tau) < d, m = 1, 2,$ *на* Δ_{3n-2}, *и также при* m = 2 *на* Δ_{3n-1}, *потому что* $0 \le x + a_2(t - \tau) \le d$, $\quad -a_1 d_2 \le x - a_1(t - \tau) \le a_1 d_2$ *на* Δ_{3n-1}. *Внешний модуль в (12) можно убрать на* Δ_{3n}, *так как* $0 \le d - x + a_1(t - \tau) \le d$,

$-a_2d_2 \le d - x - a_2(t-\tau) \le a_2d_2$ на $\Delta_{3n}, n = 1, 2, \ldots$ *Правильность рекуррентных формул (6), (7), (9)–(11) подтверждена нами их подстановкой в (1)–(3) вручную и на компьютере в системе Mathematica 10.*

Заключение. В настоящей работе, не применяя метод продолжения правой части f, начальных данных φ, ψ и граничных данных μ_1, μ_2 вне множества задания G_d второй из поставленных смешанных задач (1)–(3), новым методом Ф.Е. Ломовцева впервые найдены ее единственные классические решения (9)–(11) и необходимые и достаточные условия (4), (5) при $\kappa = d, i = 1, 2$ и (12). Из формул (9)–(11) выводится непрерывная зависимость классических решений $u \in C^2(G_d)$ от данных f, $\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2$ в соответствующей паре пространств решений и исходных данных. Это означает, что смешанная задача (1)–(3) на множестве G_d является корректной по Адамару. Условия (4) при $\kappa = d, i = 1, 2$ и (12) являются необходимыми
и достаточными требованиями гладкости на правую часть уравнения, начальные и граничные данные, так как они необходимы и достаточны для дважды непрерывной дифференцируемости ее решений на G_d вне характеристик $x = a_1(t - d_n)$, $x + a_2(t - d_n) = d, n = 1, 2, \ldots$ Условия (5) при i = 1, 2 являются необходимыми и достаточными условиями согласования граничных условий (2) с уравнением (1) и начальными условиями (3), так как они необходимы и достаточны для гладкого «сшивания» решений (9)–(11) вдоль характеристик $x = a_1(t - d_n)$, $x + a_2(t - d_n) = d, n = 1, 2, \ldots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломовцев, Ф.Е. Необходимые и достаточные условия колебаний ограниченной струны при косых производных в граничных условиях / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 1. – С. 126–129.
2. Моисеев, Е.Н. Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй косой производной в граничном условии / Е.И. Моисеев, Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Докл. Академии наук. – 2014. – Т. 459, № 5. – С. 544–549.
3. Ломовцев, Ф.Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний струны при первых косых производных в нестационарных граничных условиях / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Современные методы теории функций и смежные проблемы: тез. докл. междунар. конф., Воронеж, 27 янв.–2 февр. 2015 г. – Воронеж, 2015. – С. 73–76.
4. Ломовцев, Ф.Е. Классические решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с полунестационарной второй косой производной в граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2014. – № 2(80). – С. 5–12.
5. Барановская, С.Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
6. Ломовцев, Ф.Е. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Вестн. БГУ. – 2012. – Сер. 1, № 1. – С. 83–86.
7. Ильин, В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений / В.А. Ильин // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, № 2. – С. 97–154.
8. Ильин, В.А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Успехи математических наук. – 2005. – Т. 60, вып. 6(366). – С. 89–114.
9. Моисеев, Е.И. Разрешимость смешанной задачи для волнового уравнения с динамическим краевым условием / Е.И. Моисеев, А.А. Холомеева // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 10. – С. 1412–1417.
10. Корзюк, В.И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе / В.И. Корзюк, И.И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1105–1117.
11. Моисеев, Е.И. Классическое решение задачи с интегральным условием для однородного волнового уравнения / Е.И. Моисеев, В.И. Корзюк, И.С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1373–1385.

R E F E R E N C E S

1. Lomovtsev F.E., Novikov E.N. *Differentsionniye uravneniya* [Differential Equations], 2014, 50(1), pp. 126–129.
2. Moiseev E.N., Lomovtsev F.E., Novikov E.N. *Doklady Akademii Nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2014, 459(5), pp. 544–549.
3. Lomovtsev F.E., Novikov E.N. *Tezisi dokladov mezhdunar. konf. «Sovr. metodi teorii funktsii i smezhniye problem»* [Proc. rep. I ntern. Conf. «Modern Methods of the Theory of Functions and Related Problems» (Voronezh, January 27 –February 2, 2015)], Voronezh, 2015, pp. 73–76.
4. Lomovtsev F.E., Novikov E.N. *Vestn. Vitebsk. Gos. Univ.* [Newsletter of Vitebsk State University], 2014, 80(2), pp. 5–12.
5. Baranovskaya S.N., Yurchuk N.I. *Differentsionniye uravneniya* [Differential Equations], 2009, 45(8), pp. 1188–1191.
6. Lomovtsev F.E., Novikov E.N. *Vestn. Belarus. Gos. Univ.* [Newsletter of Belarusian State University], 2012, 1(1), pp. 83–86.
7. Ilyin V.A. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Successes of Mathematical Sciences], 1960, 15(2), pp. 97–154.
8. Ilyin V.A., Moiseev E.I. Uspekhi *Matematicheskikh Nauk* [Successes of Mathematical Sciences], 2005, 60(6), (366), pp. 89–114.
9. Moiseev E.I., Holomeeva A.A. *Differentsionniye uravneniya* [Differential Equations], 2012, 48(10), pp. 1412–1417.
10. Korzyuk V.I., Stolyarchuk I.I. *Differentsionniye uravneniya* [Differential Equations], 2014, 50(8), pp. 1105–1117.
11. Moiseev E.I., Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. *Differentsionniye uravneniya* [Differential Equations], 2014, 50(10), pp. 1373–1385.