УДК 512.542

Описание стабильных квазипорядков полугруппы линейных отношений

М.И. Наумик, Е.С. Шайтор
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Теоретико-решеточными понятиями пронизана вся современная алгебра, хотя во многих учебниках это обстоятельство явным образом не отмечается. Решетки и группы принадлежат к числу самых основных инструментов универсальной алгебры; в частности, строение алгебраических систем обычно наиболее отчетливо выявляется путем анализа связанных с ними решеток.

И, как следствие, одним из вопросов теории упорядоченных полугрупп является нахождение всех порядков данной полугруппы. Этот вопрос решается для полугрупп, важных в том или ином отношении.

На большое значение описания всех стабильных (т.е. согласованных с умножением) отношений порядка указывал Е.С. Ляпин. Он нашел максимальные стабильные порядки на полугруппе линейных преобразований конечномерного векторного пространства над полем.

Рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на множестве A называется квазипорядком. Описание всех стабильных квазипорядков на симметрической полугруппе дал М.Г. Могилевский в 1978 г. Позже, в 1986 г., В.Д. Дереч предложил подробное описание стабильных квазипорядков на полугруппе частичных взаимооднозначных преобразований.

Естественно возникает задача описания всех стабильных квазипорядков на полугруппе линейных отношений конечномерного векторного пространства над полем.

Описание конгруэнций и стабильных порядков на полугруппе линейных отношений конечномерного векторного пространства над полем было сделано ранее М.И. Наумиком и Е.С. Шайтором.

Цель статьи – описать стабильные квазипорядки полугрупп линейных отношений.

***Материал и методы.** В данной работе используются методы теории полугрупп и линейной алгебры.*

***Результаты и их обсуждение.** Первым (в 1961 г.) подробно исследовал алгебраические свойства линейных отношений С. Маклейн [1]. В.А. Пономарев [2] в 1969 году получает вопросы теории линейных отношений в конечномерном пространстве V⊕V над полем. Им решена задача нахождения инвариантов и приведения к каноническому виду линейного отношения, а также аналогичная задача в случае пространства с градуировкой. Заметим, что в теории полугрупп линейных отношений Л.Б. Шнеперманом [3] в 1982 г. было установлено, что любая периодическая подполугруппа полугруппы LR(V) локально конечна, где V – конечномерное векторное пространство над полем. В 1987 году Л.Б. Шнеперман [4] показал, что векторное пространство (исключая малые размерности) полностью определяется мультипликативной полугруппой рефлексивных линейных отношений. М.И. Наумик [5] в 2004 году описал все конгруэнции на полугруппе линейных отношений бесконечномерного векторного пространства над телом. В работе [6] М.И. Наумик и Е.С. Шайтор получили все стабильные порядки полугруппы линейных отношений конечномерного векторного пространства над полем.*

***Заключение.** Таким образом, в ходе работы, авторы полностью описали стабильные квазипорядки на полугруппе. Полученные выводы являются новыми и позволяют использовать данную работу для дальнейшего изучения полугрупп линейных отношений.*

***Ключевые слова:** линейные отношения, ранг линейного отношения, полугруппа линейных отношений, стабильные квазипорядки, замкнутые отношения квазипорядка.*

Description of Stable Quasiorders of the Semigroup of Linear Relations

M.I. Naumik, E.S. Shaitor
Educational establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

All modern algebra is penetrated through with theoretical and lattice notions, although in many textbooks this is not distinctly singled out. Lattice and groups belong to most basic tools of universal algebra; structure of algebraic systems, in particular, is usually more distinctly identified by means of analysis of lattices connected with them.

Consequently, one of the issues of the theory of structured (ordered) semigroups is identifying all the orders of this semigroup. This issue is solved for semigroups which are important in this or that respect.

Great significance of the description of all stable (or agreeable with multiplication) relations of the order was singled out by E.S. Liapin. He found maximal stable orders on the semigroup of linear transformations of finite vector space over the field.

Reflexive and transitive binary relation on A multitude is called quasiorder. Description of all stable quasiorders on the symmetric semigroup was given by M.G. Mogilevski in 1978. Later in 1986 V.D. Derech gave a detailed description of stable quasiorders on the semigroup of partial mutually clear transformations.

Naturally a task turns up to describe all stable quasiorders on the semigroup of linear relations of finitely measured vector space over the field.

Description of congruencies and stable orders on the semigroup of linear relations of finite measured vector space over the field was made earlier by M.I. Naumik and E.S. Shaitor correspondingly.

The purpose of the article is to describe stable quasiorders of the semigroups of linear relations.

Material and methods. *Methods of the theory of semigroups and linear algebra are used in the work.*

Findings and their discussion. *The first (in 1961) to study in details algebraic features of linear relations was S. McLain. V.A. Ponomarev in 1969 studied issues of the theory of linear relations in finite measured space of V⊕V over the field. He solved the problem of finding invariants and bringing to the canonic variant the linear relation as well as the like problem in case of space with graduation. It should be pointed out that in the theory of semigroups of linear relations L.B. Sheperman in 1982 found out that any periodic semigroup of LR(V) semigroup is locally finite, where V is finite measured vector space over the field. In 1987 L.B. Sheperman showed that vector space (excluding small sizes) is fully defined by multiplicative semigroup of reflexive linear relations. M.I. Naumik in 2004 described all congruencies on the semigroup of linear relations of infinite measured vector space over the body. In their work M.I. Naumik and E.S. Shaitor described all stable orders of the semigroup of linear relations of finite measured vector space over the body.*

Conclusion. *Thus, in the course of the work we fully described stable quasiorders on the semigroup. The findings of the work are completely new and make it possible to use this work for further study of semigroups of linear relations.*

Key words: *linear relations, range of linear relation, semigroup of linear relations, stable quasiorders, closed relations of the quasiorder.*

Пусть V – левое конечномерное векторное пространство над полем F размерности n. Бинарное отношение $a\subset V\times V$ между элементами множества V называется линейным, если оно является подпространством $V\oplus V$. Другими словами, линейное отношение a – множество пар $(\bar{x},\bar{y})$, где $\bar{x},\bar{y}\in V$, замкнутое относительно операций сложения и умножения на элемент из поля F: если $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)\in a$ и $(\bar{x}_2,\bar{y}_2)\in a$ при каких-либо $\bar{x}_i,\bar{y}_i\in V$, то $(\alpha\bar{x}_1+\beta\bar{x}_2,\alpha\bar{y}_1+\beta\bar{y}_2)\in a$ для любых $\alpha,\beta\in F$.

Ранг линейного отношения определяется формулой $rank\,a=dim(pr_1a/ker\,a)=$ $=dim(pr_2a/co\,ker\,a)$.

Множество всех линейных отношений $LR(V)$ на пространстве V является, как известно [1], полугруппой относительно операций умножения бинарных отношений.

Для произвольного подпространства $A\subseteq V$ обозначим $\omega_A=\{(\bar{x},\bar{0}):\bar{x}\in A\}$ $\omega_{\bar{0}}=\omega$.

Если $a\in LR_1(V)$, то $dimpr_1a/kera=dimpr_2a/cokera$. Ясно, что для любого $a\in LR_1(V)$ $a=\omega_A\omega_B^{-1}$, где $pr_1a=A$, $pr_2a=B$.

Рефлексивное транзитивное отношение называется отношением квазипорядка.

Отношение квазипорядка λ будем называть отношением стабильного квазипорядка, если для любых $a, b, c, d\in LR_1(V)$, из $a\lambda b$ следует $cad\lambda cbd$.

Стабильный квазипорядок λ полугруппы $LR_1(V)$ будем называть замкнутым квазипорядком λ, если для любых $a,b\in LR_1(V)$ и $c,d\in LR(V)$ из $a\lambda b$ следует $cad\lambda cbd$.

Определим отношения на полугруппе $LR_1(V)$ следующим образом:

$\omega_A\omega_C^{-1}\lambda_1\omega_B\omega_D^{-1}\Leftrightarrow B\subseteq A;\ D\subseteq C;$

$\omega_A\omega_C^{-1}\lambda_2\omega_B\omega_D^{-1}\Leftrightarrow B\subseteq A;\ C\subseteq D;$

$\omega_A\omega_C^{-1}\lambda_3\omega_B\omega_D^{-1}\Leftrightarrow A=B;\ D\subseteq C;$

$\omega_A\omega_C^{-1}\lambda_4\omega_B\omega_D^{-1}\Leftrightarrow A\subseteq B;\ C=D;$

$\omega_A\omega_C^{-1}\lambda_5\omega_B\omega_D^{-1}\Leftrightarrow B\subseteq A;$

$\omega_A\omega_C^{-1}\lambda_6\omega_B\omega_D^{-1}\Leftrightarrow C\subseteq D;$

$\omega_A\omega_C^{-1}\lambda_7\omega_B\omega_D^{-1}\Leftrightarrow A=B;\ D=C;$

$\omega_A\omega_C^{-1}\lambda_8\omega_B\omega_D^{-1}\Leftrightarrow A,B,C,D\subseteq V.$

Теорема 1. *Отношения λ_n являются замкнутыми квазипорядками полугруппы. Любой замкнутый квазипорядок полугруппы совпадает с одним из соотношений λ_n или им обратным.*

Доказательство. I. Докажем, что отношения λ_n являются замкнутыми квазипорядками полугруппы.

Докажем, что λ_1 – замкнутый квазипорядок полугруппы $LR_1(V)$.

Покажем рефлексивность. Так как $A\supseteq A$ и $B\supseteq B$, значит, $\omega_A\omega_B^{-1}\lambda_1\omega_A\omega_B^{-1}$.

Проверим выполнение транзитивности. Пусть $\omega_A\omega_C^{-1}\lambda_1\omega_B\omega_D^{-1}$ и $\omega_B\omega_D^{-1}\lambda_1\omega_M\omega_N^{-1}$. Тогда $B\subseteq A$, $D\subseteq C$ и $M\subseteq B$, $N\subseteq D$. Отсюда $M\subseteq A$, $N\subseteq C$.

Значит, $\omega_A\omega_C^{-1}\lambda_1\omega_M\omega_N^{-1}$. Транзитивность выполняется.

Докажем, что отношение λ_1 замкнуто. Пусть $\omega_A\omega_C^{-1}\lambda_1\omega_B\omega_D^{-1}$ и $a,b\in LR(V)$. Докажем, что $a\,\omega_A\omega_C^{-1}b\lambda_1a\,\omega_B\omega_D^{-1}b$, т.е. $pr_1a\,\omega_B\subseteq pr_1a\,\omega_A$ и $pr_2\,\omega_D^{-1}b\subseteq pr_2\,\omega_C^{-1}b$.

Имеем, что $pr_1a=kera$áV_1, $pr_2a=cokera$áV_2, где V_1, V_2 – некоторые фиксированные дополнения.

Обозначим $A_2=\{\bar{x}:(\bar{x},\bar{y})\in a$, где $y\in pr_2a\cap A\}$, и $B_2=\{\bar{x}:(\bar{x},\bar{y})\in a$, где $y\in pr_2a\cap B\}$. Тогда $pr_1a\,\omega_A=kera$á$(V_1\cap A_2)$, $pr_2a\,\omega_B=kera$á$(V_1\cap B_2)$. Если по условию $B\subseteq A$, то и $B_2\subseteq A$, и, значит,

$(pr_2a\cap B)\subseteq A$, а из этого следует, что $(pr_2a\cap B)\subseteq(pr_2a\cap A)$.

Получаем, что $pr_1a\,\omega_A=$ $=kera$á$(V_1\cap A_2)\supseteq kera$á$(V_1\cap B_2)=pr_1a\,\omega_B$.

С другой стороны, имеем $pr_1b=kerb$áV_3, $pr_2b=cokerb$áV_4, где V_3, V_4 – некоторые фиксированные дополнения. Обозначим $C_2=\{\,\bar{y}:(\bar{x},\bar{y})\in b$, где $\bar{x}\in pr_1(b\bigcap C)\}$ и $D_2=\{\,\bar{y}:(\bar{x},\bar{y})\in b$, где $\bar{x}\in pr_1b\bigcap D)\}$, $pr_2\,\omega_C^{-1}b=$ $=cokerb$á$(V_4\cap C_2)$, $pr_2\,\omega_D^{-1}b=cokerb$á$(V_4\cap D_2)$. Если, по условию $C\supseteq D$, то и $(pr_1b\cap C)\supseteq(pr_1b\cap D)$. Тогда $pr_2\,\omega_C^{-1}b\supseteq pr_2\,\omega_D^{-1}b$.

Значит, отношение λ_1 является отношением замкнутого стабильного квазипорядка полугруппы $LR_1(V)$.

Аналогично доказывается, что λ_1–λ_8 – замкнутый порядок на $LR_1(V)$.

II. Обратно, пусть λ – произвольный замкнутый квазипорядок на $LR_1(V)$. Пусть даны подпространства A, B, C, $D\subseteq V$, такие, что $\omega_A\lambda\omega_B$ и $\omega_C^{-1}\lambda\,\omega_D^{-1}$.

Докажем, что λ совпадает с одним из соотношений λ_n или им обратным. Представим A и B в виде $A=A\bigcap B\oplus A_1$ и $B=A\bigcap B\oplus B_1$, где A_1 и B_1 – фиксированные дополнения. Предположим, что A_1 и B_1 одновременно ненулевой размерности. Обозначим A_2 – базис A_1, B_2 – базис B_1. Определим отношения: $a=<(\bar{x},\bar{x}):\bar{x}\in A_2>$, $b=<(\bar{y},\bar{y}):\bar{y}\in B_2>$, $c=<(\bar{z},\bar{m}):\bar{z}\in B_2,\bar{m}\in A_2>$. Из $\omega_A\lambda\omega_B$, $a\omega_A=\omega_{A_1}$ и $a\omega_B=\omega$ следует $\omega_{A_1}\lambda\omega$. Аналогично из $\omega_A\lambda\omega_B$, $b\omega_B=\omega_{B_1}$ и $b\omega_A=\omega$ получаем $\omega\lambda\omega_{B1}$. А из $\omega_{A_1}\lambda\omega$, $c\omega_{A_1}=\omega_{B_1}$ и $c\omega=\omega$ следует $\omega_{B_1}\lambda\omega$. Из рефлексивности λ следует, что одновременно выполняются $\omega_{B_1}\lambda\omega$ и $\omega\lambda\omega_{B_1}$, отсюда получаем $\omega_{A_1}\lambda\omega_{B_1}$. А это означает, что $\omega_A\lambda\omega_B$, если $A,B\subseteq V$. Значит, возможны варианты $A=B$; $A\subseteq B$; $A\supseteq B$; A, $B\subseteq V$. (1)

Представим D и C в виде $D=D\bigcap C\oplus D_1$ и $C=D\bigcap C\oplus C_1$, где D_1 и C_1 – фиксированные дополнения. Предположим, что D_1 и C_1 одновременно ненулевой размерности. Обозначим C_2 – базис C_1, D_2 – базис D_1. Определим отношения: $d=<(\bar{x},\bar{x}):\bar{x}\in D_2>$, $n=<(\bar{y},\bar{y}):\bar{y}\in C_2>$, $t=<(\bar{z},\bar{m}):\bar{z}\in D_2,\bar{m}\in C_2>$. Из $\omega_C^{-1}\lambda\omega_D^{-1}$ и $\omega_D^{-1}d=\omega_{D_1}^{-1}$, $\omega_C^{-1}d=\omega$ следует $\omega\lambda\omega_{D_1}^{-1}$ и $\omega_{C_1}^{-1}\lambda\omega$. Из рефлексивности λ следует, что одновременно выполняются $\omega\lambda\omega_{D_1}^{-1}$ и $\omega_{D_1}^{-1}\lambda\omega$, отсюда получаем $\omega_{C_1}^{-1}\lambda\omega_{D_1}^{-1}$. А это означает, что $\omega_C\lambda\omega_D$, если $A,B\subseteq V$. Значит, возможны варианты: $D=C$; $D\supseteq C$; $D\subseteq C$; $C,D\subseteq V$. (1)

Значит, возможны варианты $D=C$, $D\subseteq C$, $C\supseteq D$. (2)

Из (1) и (2) для множеств A, B, C, D получаем следующие варианты:

1) если $A=B$ и $D\subseteq C$, то λ совпадает с λ_3;
2) если $A=B$ и $D\supseteq C$, то λ совпадает с λ_3^{-1};
3) если $A\supseteq B$ и $D=C$, то λ совпадает с λ_4^{-1};
4) если $A\supseteq B$ и $D\supseteq C$, то λ совпадает с λ_2;
5) если $A\supseteq B$ и $D\subseteq C$, то λ совпадает с λ_1;
6) если $A\subseteq B$ и $D=C$, то λ совпадает с λ_4;
7) если $A\subseteq B$ и $D\supseteq C$, то λ совпадает с λ_1^{-1};
8) если $A\subseteq B$ и $D\subseteq C$, то λ совпадает с λ_2^{-1};
9) если $A=B$ и $D=C$, λ – тождественное отображение;
10) если $A\subseteq B$, то λ совпадает с λ_5^{-1};
11) если $A\supseteq B$, то λ совпадает с λ_5;
12) если $D\subseteq C$, то λ совпадает с λ_6^{-1};
13) если $D\supseteq C$, то λ совпадает с λ_6;
14) если $C\Leftrightarrow D$, CÌD, $A\Leftrightarrow B$, BÌA, то λ совпадает с λ_8.

Получили, что если $\omega_A\lambda\omega_B$ и $\omega_C^{-1}\lambda\,\omega_D^{-1}$, то λ совпадает с одним из соотношений λ_n или им обратным.

Теорема доказана.

Воспользовавшись теоремой, перейдем к описанию квазипорядков $LR(V)$.

Пусть $LR_1(V)=\{\,a|ranka<1\}$ – идеал [5] полугруппы $LR(V)$, L – цепочка таких подполугрупп $P_n\subset P_{n-1}\subset\ldots\subset P_1$, что 1Y$P_n$, $0\notin P_i$, где $P_i^{-1}=\{\,a^{-1}|a\in P_i\,\}$, $(1\le i\le n)$ и $P_i\subset F$.

Обозначим через $\sum_L^{1k}(1\le k\le n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{1k}b\Leftrightarrow a,b\in LR_1(V)$ и $\sum_L^{1k}=\lambda_1$ на $LR_1(V)$, или $a\in LR_1(V)$, а $rank\,b\le k$, $pr_1b\subseteq pr_1a$, $pr_2b\subseteq pr_2a$, или $rank\,a>0$, а $a=\lambda b$, где $\lambda\in P_{rank\,a}=P_{rank\,b}$.

Обозначим через $\sum_L^{2k}(1\le k\le n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{2k}b\Leftrightarrow a,b\in LR_1(V)$ и

$\sum_L^{2k}=\lambda_1^{-1}$ на $LR_1(V)$, или $a\in LR_1(V)$, а $rank\, b\le k$, $pr_1 a\subseteq ker\, b$, $pr_2 b\subseteq coker\, b$, или $rank\, a>0$, а $a=\lambda b$, где $\lambda\in P_{ranka}=P_{rankb}$.

Обозначим через $\sum_L^{3k}(1\le k\le n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{3k}b\Leftrightarrow a,b\in LR_1(V)$ и $\sum_L^{3k}=\lambda_2$ на $LR_1(V)$, или $a\in LR_1(V)$, а $rank\, b\le k$, $pr_1 b\subseteq pr_1 a$, $pr_2 a\subseteq coker\, b$, или $rank\, a>0$, а $a=\lambda b$, где $\lambda\in P_{ranka}=P_{rankb}$.

Обозначим через $\sum_L^{4k}(1\le k\le n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{4k}b\Leftrightarrow a,b\in LR_1(V)$ и $\sum_L^{4k}=\lambda_2^{-1}$ на $LR_1(V)$, или $a\in LR_1(V)$, а $rank\, b\le k$, $pr_1 a\subseteq ker\, b$, $pr_2 b\subseteq pr_2 a$, или $rank\, a>0$, а $a=\lambda b$, где $\lambda\in P_{ranka}=P_{rankb}$.

Обозначим через $\sum_L^{5k}(1\le k\le n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{5k}b\Leftrightarrow a,b\in LR_1(V)$ и $\sum_L^{5k}=\lambda_3$ на $LR_1(V)$, или $rank\, a>0$, а $a=\lambda b$, где $\lambda\in P_{rank\, a}=P_{rank\, b}$.

Обозначим через $\sum_L^{6k}(1\le k\le n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{6k}b\Leftrightarrow a,b\in LR_1(V)$ и $\sum_L^{6k}=\lambda_3^{-1}$ на $LR_1(V)$или$rank\, a>0$, а $a=\lambda b$, где $\lambda\in P_{ranka}=P_{rankb}$.

Обозначим через $\sum_L^{7k}(1\le k\le n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{7k}b\Leftrightarrow a,b\in LR_1(V)$ и $\sum_L^{7k}=\lambda_4$ на $LR_1(V)$, или $rank\, a>0$, а $a=\lambda b$, где $\lambda\in P_{ranka}=P_{rankb}$.

Обозначим через $\sum_L^{8k}(1\le k\le n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{8k}b\Leftrightarrow a,b\in LR_1(V)$ и $\sum_L^{8k}=\lambda_4^{-1}$ на $LR_1(V)$или$rank\, a>0$, а $a=\lambda b$, где $\lambda\in P_{ranka}=P_{rankb}$.

Обозначим через $\sum_L^{9k}(1\le k\le n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{9k}b\Leftrightarrow a,b\in LR_1(V)$ и $\sum_L^{9k}=\lambda_5$ на $LR_1(V)$, или $rank\, a>0$, а $a=\lambda b$, где $\lambda\in P_{ranka}=P_{rankb}$.

Обозначим через $\sum_L^{10k}(1\le k\le n)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{10k}b\Leftrightarrow a,b\in LR_1(V)$ и $\sum_L^{10k}=\lambda_5^{-1}$ на $LR_1(V)$ или $rank\, a>0$, а $a=\lambda b$, где $\lambda\in P_{ranka}=P_{rankb}$.

Обозначим через $\sum_L^{11k}(k=1)$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{11k}b\Leftrightarrow rank\, a=rank\, b$, $rank\, a>0$, а $a=\lambda b$, где $\lambda\in P_{rank\, a}=P_{rank\, b}$.

Обозначим через $\sum_L^{12k}$ такое отношение на $LR(V)$, что $a\sum_L^{12k}b\Leftrightarrow a,b\in LR_1(V)$ и $a=b$.

Теорема 2. *Отношение $\sum_L^{tk}$ является стабильным квазипорядком на полугруппе LR(V). Обратно, каждый квазипорядок на полугруппе LR(V) единственным образом представим в виде $\sum_L^{tk}$ или ${}^{-1}\sum_L^{tk}$ для подходящих L, t, k.*

Для доказательства теоремы нам понадобится лемма, где стабильные квазипорядки рассматриваются на $LR(V)$. Если ясно, о каком стабильном порядке идет $\sum_L^{tk}$ речь, то часто вместо $a\sum_L^{tk}b$ будем писать $a\sum b$.

Лемма 1. *Если $\sum$ – стабильный квазипорядок и $a\sum b$, $rank\, a>0$, то $a=\lambda b$ для некоторого λYF.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a\sum b$ и $rank\, a>0$. Это означает, что $pr_1 a=pr_1 b$, $pr_2 a=pr_2 b$, $kera=kerb$, $cokera=cokerb$. Найдутся $\alpha_1,\alpha_2\in F\setminus\{0\}\{0\}$ такие, что $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)\in a$ и $(\bar{x}_2,\bar{y}_2)\in a$, где $\bar{x}_1,\bar{x}_2\in pr_1 a\setminus ker\, a$, а $(\bar{x}_1,\alpha_1\bar{y}_1)\in b$, $(\bar{x}_2,\alpha_2\bar{y}_2)\in b$ для некоторых $\bar{y}_1,\bar{y}_2$. Покажем, что $\alpha_1=\alpha_2$. Действительно, имеем $(\bar{x}_1+\bar{x}_2,\alpha_1\bar{y}_1+\alpha_2\bar{y}_2)\in b$ и $(\bar{x}_1+\bar{x}_2,\alpha(\bar{y}_1+\bar{y}_2))\in b$. Отсюда получаем $\alpha(\bar{y}_1+\bar{y}_2)$ - $\alpha_1\bar{y}_1+\alpha_2\bar{y}_2$ Y*cokerb*. Получаем $(\lambda-\lambda_1)\bar{y}_1+(\lambda-\lambda_2)\bar{y}_2=\bar{0}$. Отсюда следует $(\lambda-\lambda_1)=(\lambda-\lambda_2)=0$, т.е. $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$. Итак, $a=\lambda b$.

Следствие 1. *Если $rank\, a>0$, $a\sum b$, то* $rank\, a=rank\, b$.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы. Покажем, что $\sum_L^{tk}$ (t=1,2, …, 11) является стабильным квазипорядком.

Рефлексивность вытекает непосредственно из того, что $1\in P_n$.

Проверим транзитивность $\sum_L^{tk}$. Пусть $a\sum_L^{tk}b$ и $b\sum_L^{tk}$ с. Если хотя бы одно из линейных отношений является нулевым, то ясно, что $a\sum_L^{tk}c$. Пусть $rank\, a > 0$. Ввиду леммы 1 $a = \lambda b$ и $b = \mu c$ для некоторых $\lambda, \mu \in P_{ranka} = P_{rankb} = P_{rankc}$. Исходя из свойств P_i (i=1,2,….,n) $\lambda, \mu \in P_{rank\, a}$, а так как $a = \lambda\mu c$, то $a\sum_L^{tk}b$.

Покажем, что $\sum_L^{tk}$ стабильно. Пусть $a\sum_L^{tk}b$ и $c\sum_L^{tk}d$. Если $rank\, a = 0$, то $rank\, b \le k$, а значит, и $rank\, bd \le k$. Следовательно, $rank\, ac = 0$ и $ac\sum_L^{tk}bd$ на $LR_1(V)$. Пусть $rank\, a > 0$ и $rank\, c > 0$. Тогда $a = \lambda b$ и $c = \mu d$, а следовательно, и $ac = \mu\lambda bd$. Так как $rank\, ac \le \min(rank\, a, rank\, c)$, то в силу свойств P_i, $\lambda, \mu \in P_{rankac}$, а значит, и $\lambda\mu \in P_{rank\, ac}$. Таким образом, $ac\sum_L^{tk}bd$, то есть $\sum_L^{tk}$ – стабильный квазипорядок.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $\sum_L^{tk}$ – произвольный стабильный квазипорядок на $LR(V)$. Обозначим через k наибольший из рангов всех таких линейных отношений b, что $\omega_M\omega_T^{-1}\sum b$. Тогда для любого линейного отношения c, для которого $rankc \le k$ найдутся такие u и v, что $c = ubv$ и ввиду стабильности $\omega_M\omega_T^{-1}\sum c$.

Покажем, что $P_n \subset P_{n-1} \subset ... \subset P_1$. Пусть $\lambda \in P_i$. Тогда $\lambda e_i \sum e_i$, а значит, и $\lambda e_{i-1} = \lambda e_i e_{i-1} \sum e_i e_{i-1} = e_{i-1}$. Следовательно, $P_i \subset P_{i-1}$ (i=1, 2,…, n).

Таким образом, отношению $\sum$ соответствуют натуральное число k, δ_1 и цепочка подполугрупп $P_n \subset P_{n-1} \subset ... \subset P_1$ поля F, удовлетворяющие вышеперечисленным условиям. Покажем, что $\sum = \sum_L^{tk}$.

Если $\omega_A\omega_C^{-1}\sum b$, $rank\, b = 0$ и $pr_1 b \subseteq A$, $pr_2 b \subseteq C$, то, очевидно, что $\sum = \delta_1$ на полугруппе $LR_1(V)$ и $\omega_M\omega_T^{-1}\sum_L^{tk}b$. Пусть $a\sum b$ и $rank\, a > 0$. Тогда в силу леммы 1, $a = \lambda b$. Найдутся такие $u, v \in LR(V)$, что $e_{ranka} = ubv$. Ввиду стабильности $\sum$, $\lambda e_{rank\, a} \sum e_{rank\, a}$, значит $\lambda \in P_{ranka}$ и, следовательно, $a\sum_L^{tk}b$. Итак, $\sum \subset \sum_L^{1k}$.

Проверим обратное включение. Пусть $a\sum_L^{tk}b$. Ясно, что если $a \in LR_1(V)$, то $a\sum_L^{tk}b$. Пусть $a \notin LR_1(V)$. Тогда $a = \lambda b$, для некоторого $\lambda \in P_{ranka}$. Последнее означает, что $\lambda e_{rank\, a} \sum e_{rank\, a}$. Выберем такие $u, v \in LR(V)$, что $b = ue_{ranka}v$. В силу стабильности $\sum$ $a = \lambda ue_{rank\, a}v \sum ue_{rank\, a}v = b$. Итак, $\sum_L^{1k} \subset \sum$. Равенство $\sum_L^{1k} = \sum$ доказано. Мы получили, что если $a \in LR_1(V)$ является для $\sum$ меньше любого линейного отношения ранга больше чем ноль, то $\sum$ единственным образом представляется в виде $\sum_L^{tk}$. Если же $a \in LR_1(V)$ является для $\sum$ больше любого линейного отношения ранга большего нуля, то ясно, что $\sum$ единственным образом представляется в виде ${}^{-1}\sum_L^{tk}$. Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Маклейн, С. Алгебра аддитивных отношений / С. Маклейн // Сб. переводов. Математика. – 1963. – № 7:6. – С. 3–12.
2. Пономарев, В.А. Начало теории аддитивных бинарных отношений в конечномерном векторном пространстве / В.А. Пономарев. – Пущино, 1969. – 88 с. – Препринт / Институт биологической физики АН СССР. Деп. ВИНИТИ № 988. – 69.
3. Sneperman, L.B. The Shur Theorem for periodie semigroupsof linear relations / L.B. Sneperman // Semigroup Forum. – 1982. – Vol. 25. – S. 203–211.
4. Шнеперман, Л.Б. О полугруппе рефлексивных линейных отношений / Л.Б. Шнеперман // Вопросы алгебры. – 1987. – № 3. – С. 117–123.
5. Наумик, М.И. Полугруппа линейных отношений / М.И. Наумик // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 3. – С. 34–37.
6. Наумик, М.И. Стабильные порядки полугруппы линейных отношений конечномерного векторного пространства над полем / М.И. Наумик, Е.С. Шайтор // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2013. – № 3. – 36–40.

R E F E R E N C E S

1. McLain, S. *Sb. perevodov. Matematika* [Collection of Translations. Mathematics], 1963, 7:6, pp. 3–12.
2. Ponomarev, V.A. *Nachalo teorii additivnikh binarnikh otnoshenii v konechnomernom vektornom prostranstve* [Beginning of the Theory of Additive Binary Relations in Finite Measured Vector Space], Pushchino, 1969, 88 p. Preprint, Institute of Biological Physics of the USSR AS, Dep. VINITI № 988, 69.
3. Sneperman, L.B. The Shur Theorem for periodie semigroupsof linear relations / L.B. Sneperman // Semigroup Forum. – 1982. – Vol. 25. – S. 203–211.
4. Shneperman, L.B. *Voprosi algebri* [Issues of Algebra], 1987, 3, pp. 117–123.
5. Naumik M.I. *Dokladi NAN Belarusi* [Reports of NAS of Belarus], 2004, 48(3), pp. 34–37.
6. Naumik M.I., Shaitor E.S. *Vestnik VGU* [Newsletter of Vitebsk State University], 2013, 3. 36–40.

Поступила в редакцию 12.01.2015

Адрес для корреспонденции: e-mail: naumik@tut.by – Наумик М.И.