УДК 521.1

# Метод нелинейного времени в задаче двух тел

**Ю.В. Трубников, А.М. Воронов**

*Как известно, основная задача небесной механики формулируется следующим образом: изучить движение материальной системы, состоящей из конечного числа материальных точек, обладающих постоянными массами и движущихся в абсолютно пустом пространстве под действием сил взаимных притяжений, определяемых законом всемирного тяготения Ньютона. Астрономические наблюдения показывают, что отличия искусственной математической теории от действительности, вообще говоря, достаточно малы. Разложения решений задачи Коши в степенные ряды по времени – классический метод небесной механики, однако, по-настоящему эффективным этот метод в процессе нахождения рядов с большим количеством слагаемых. Выполнить такие вычислительные операции в аналитическом виде возможно только с применением прикладных математических пакетов, что и сделано в настоящей статье.*

Основной задачей небесной механики является движение системы, состоящей из некоторого конечного числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Эта задача и называется задачей многих тел, частными случаями которой являются задачи двух, трех и т.д. тел.

Развитие всей небесной механики образно можно разбить на три течения. Первое вобрало в себя фундаментальные аналитические и качественные методы, составляющие квинтэссенцию небесной механики. Порожденные этим течением волны основательно питают второе направление, связанное с построением численно-аналитических (эфемеридных) теорий движения конкретных небесных объектов, включая определение числовых значений динамических характеристик небесных тел и их орбит: величин масс, значений гармоник гравитационного потенциала, элементов орбит и т.п.

Оба эти направления находятся в плену все более разрастающегося в масштабах «поставщика» новых объектов исследования: движение искусственных спутников Земли (ИСЗ) и межпланетных космических станций.

Разработка математических методов небесной механики в XX веке связана с работами А. Пуанкаре (1854–1912 гг.), А.М. Ляпунова (1857–1918 гг.) и К. Зундмана.

А. Пуанкаре дал приложения своих исследований к задаче о движении трех тел, изучил периодические решения задачи, асимптотическое поведение решений. Им введены методы малого параметра, уравнений в вариациях, разработана теория интегральных инвариантов, написаны труды об устойчивости движения небесных тел и о фигурах равновесия гравитирующей вращающейся жидкости.

А.М. Ляпунов создал современную строгую теорию устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров.

К. Зундману (1909–1912 гг.), а позднее Г. Мерману, который в 1958 г. применил к задаче трех тел специального вида ряды Миттаг Леффлера, удалось решить задачу трех тел с помощью бесконечных степенных сходящихся рядов; сходимость этих рядов значительно улучшена в результате работ математиков школы А.Н. Колмогорова. Но оказалось, что эти бесконечные ряды сходятся настолько медленно, что практического значения не имеют. Более того, современные результаты свидетельствуют об отсутствии каких-либо надежд на успех в полном решении задачи трех тел.

Задачу двух тел в теории невозмущенного кеплеровского движения и по ныне предлагают решать методом Клеро–Лапласа [1, с. 430], либо записав уравнения невозмущенного движения в канонической форме и применив метод Гамильтона–Якоби [1, с. 431], либо перейти к цилиндрическим или сферическим координатам и использовать радиальную составляющую. Дифференциальное уравнение второго порядка для радиальной составляющей двух тел содержит сумму отрицательных степеней расстояния между двумя телами. Классический метод исследования [2, с. 43] этого уравнения состоит в получении зависимости $t = t(r)$ и последующего изучения свойств этой зависимости. Функцию $r = r(t)$ получают приближенно, используя приближенное решение уравнения Кеплера, выражающего соотношение между временем $t$ и эксцентрической аномалией $E = E(t)$ [3, с. 73].

Подкласс точных решений уравнения невозмущенного движения $x = x(t)$ имеется только в случае прямолинейного движения, притом начальная скорость и начальная координата связаны строгим равенством [1, с. 520]. Общего же аналитического решения нет.

Авторы статьи предлагают замену времени, приводящую в случае ньютоновского потенциала к явной параметрической зависимости от «нового» времени радиальной составляющей в задаче двух тел и, как следствие, в нахождении рядов Фурье декартовых координат невозмущенного кеплеровского движения.

В случае произвольного потенциала подстановка $\frac{dt}{d\tau} = r\left[t(\tau)\right]$ приводит к удобному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = hr + \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\left[r^2 \cdot \frac{dU(r)}{dr} + 2rU(r)\right],$$

в котором $\tau$ – «новое» время, $U(r)$ – произвольная силовая функция, $h, m_0, m_1$ – постоянные.

Рассмотрим задачу движения двух тел с массами $m_0$ и $m_1$ в силовом поле с произвольным потенциалом $U(r), r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$, зависящим лишь от расстояния между телами.

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение, в абсолютных декартовых координатах будет иметь вид:

$$m_0\ddot{x}_0=\frac{\partial U\ \ r}{\partial x_0}=\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_0}=-\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot\frac{1}{r}\cdot\ \ x_1-x_0\ \ , \tag{1}$$

$$m_1\ddot{x}_1=\frac{\partial U\ \ r}{\partial x_1}=\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_1}=-\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot\frac{1}{r}\cdot\ \ x_1-x_0\ \ , \tag{2}$$

Аналогичные уравнения получаются и для переменных $y_0, y_1, z_0, z_1$.

Таким образом,

$$\ddot{x}_0=-\frac{1}{m_0}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot\ \ x_1-x_0\ \ , \tag{3}$$

$$\ddot{x}_1=+\frac{1}{m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot\ \ x_1-x_0\ \ , \tag{4}$$

Вычтя из уравнения (4) уравнение (3), получаем

$$\ddot{x}_1-\ddot{x}_0=\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_0}\right)\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot\ \ x_1-x_0\ \ . \tag{5}$$

Уравнение (5) дает возможность перейти к относительной системе координат, положив

$$x=x_1-x_0,\quad y=y_1-y_0,\quad z=z_1-z_0,$$

тогда получим систему уравнений

$$\ddot{x}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot x, \tag{6.1}$$

$$\ddot{y}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot y, \tag{6.2}$$

$$\ddot{z}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot \mathrm{z}. \tag{6.3}$$

Умножим обе части уравнения (6.1) на $\dot{x}$ (соответственно (6.2) на $\dot{y}$, (6.3) на $\dot{z}$) и сложим полученные равенства, тогда

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot\ \ x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}\ \ =\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{dU\left[r\ \ t\ \ \right]}{dt},$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\ \ \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\ \ =\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{dU\left[r\ \ t\ \ \right]}{dt}. \tag{7}$$

Таким образом, интеграл энергии будет иметь вид

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\frac{2\ \ m_0+m_1}{m_0 m_1}\cdot U\left[r\ \ t\ \ \right]+h, \tag{8}$$

где $h$ – постоянная, определяемая начальными условиями.

Далее из системы (6.1)–(6.3) получаем

$$x\ddot{x}=\frac{m_0+m_1}{m_0 m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot x^2; \tag{9.1}$$

$$y\ddot{y}=\frac{m_0+m_1}{m_0 m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot y^2; \tag{9.2}$$

$$z\ddot{z}=\frac{m_0+m_1}{m_0 m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}\cdot z^2. \tag{9.3}$$

Сложим уравнения (9.1)–(9.3), тогда

$$x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}=\frac{m_0+m_1}{m_0 m_1}\cdot r\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}. \tag{10}$$

Из (8) и (10) получаем следующее равенство

$$\frac{d^2}{dt^2}\ \ r^2\ \ =\frac{d}{dt}\ \ 2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}\ \ =2\ \ x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}\ \ +2\ \ \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\ \ =$$

$$=\frac{2\ \ m_0+m_1}{m_0 m_1}\cdot\frac{rdU\ \ r}{dr}+\frac{4\ \ m_0+m_1}{m_0 m_1}\cdot U\ \ r\ \ +2h, \tag{11}$$

т.е.

$$\frac{d^2}{dt^2}\ \ r^2\ \ =\frac{2\ \ m_0+m_1}{m_0 m_1}\left[r\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}+2U\ \ r\ \ \right]+2h. \tag{12}$$

С другой стороны

$$\frac{d^2}{dt^2}\ \ r^2\ \ =2\ \ \dot{r}\ \ ^2+2r\ddot{r}. \tag{13}$$

Приравнивая правые части равенств (12) и (13), найдем, что

$$\dot{r}\ \ ^2+r\ddot{r}=\frac{m_0+m_1}{m_0 m_1}\left[r\cdot\frac{dU\ \ r}{dr}+2U\ \ r\ \ \right]+h. \tag{14}$$

Новизна метода состоит в замене времени

$$\frac{dt}{d\tau}=r\left[t\ \ \tau\ \ \right]. \tag{15}$$

В силу такой замены справедливы равенства

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}=\dot{r}r, \tag{16}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \ddot{r}r^2 + \ \dot{r}\ \ ^2 \cdot r = r\left[\ddot{r}r + \ \dot{r}\ \ ^2\right]. \tag{17}$$

Теорема 1. Подстановка (15) приводит уравнение для радиальной составляющей $r$ к виду

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = hr + \frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\left[r^2 \cdot \frac{dU\ \ r}{dr} + 2rU\ \ r\ \ \right]. \tag{18}$$

При этом уравнения для координат будут иметь вид:

$$\frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d^2x\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{d\tau^2} - \frac{d^2t}{d\tau^2} \cdot \frac{dx\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{d\tau} - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \cdot \frac{m_0+m_1}{m_0m_1} \cdot \frac{dU\ \ r}{dr} \cdot x\left[t\ \ \tau\ \ \right] = 0, \tag{19.1}$$

$$\frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d^2y\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{d\tau^2} - \frac{d^2t}{d\tau^2} \cdot \frac{dy\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{d\tau} - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \cdot \frac{m_0+m_1}{m_0m_1} \cdot \frac{dU\ \ r}{dr} \cdot y\left[t\ \ \tau\ \ \right] = 0, \tag{19.2}$$

$$\frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d^2z\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{d\tau^2} - \frac{d^2t}{d\tau^2} \cdot \frac{dz\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{d\tau} - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \cdot \frac{m_0+m_1}{m_0m_1} \cdot \frac{dU\ \ r}{dr} \cdot z\left[t\ \ \tau\ \ \right] = 0. \tag{19.3}$$

Доказательство. Из равенств (17) и (14) получаем

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = r\left[\ddot{r}r + \ \dot{r}\ \ ^2\right] = r\left\{\frac{m_0+m_1}{m_0m_1} \cdot \left[r \cdot \frac{dU\ \ r}{dr} + 2U\ \ r\ \ \right] + h\right\} =$$

$$= hr + \frac{m_0+m_1}{m_0m_1} \cdot \left[r^2 \cdot \frac{dU\ \ r}{dr} + 2rU\ \ r\ \ \right]. \tag{20}$$

Для вывода уравнения (19.1) заметим, что

$$\frac{dx\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{d\tau} = \frac{dx\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau},$$

и

$$\frac{d^2x\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{d\tau^2} = \frac{d^2x\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{dx\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{dt} \cdot \frac{d^2t}{d\tau^2} =$$

$$= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \cdot \frac{m_0+m_1}{m_0m_1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dU\ \ r}{dr} \cdot x\left[t\ \ \tau\ \ \right] + \frac{dx\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{dt} \cdot \frac{d^2t}{d\tau^2} =$$

$$= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \cdot \frac{m_0+m_1}{m_0m_1} \cdot \frac{1}{\frac{dt}{d\tau}} \cdot \frac{dU\ \ r}{dr} \cdot x\left[t\ \ \tau\ \ \right] + \frac{dx\left[t\ \ \tau\ \ \right]}{dt} \cdot \frac{d^2t}{d\tau^2}.$$

Умножив обе части полученного равенства $\dfrac{dt}{d\tau}$, получаем уравнение (19.1). Аналогично выводятся уравнения (19.2) и (19.3).

В частности, если

$$U\;\; r\;\; = \frac{fm_0 m_1}{r},$$

то уравнение (18) становится линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Действительно

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = hr + \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\left[ r^2 \left( -\frac{fm_0 m_1}{r^2} \right) + 2r\,\frac{fm_0 m_1}{r} \right] =$$

$$= hr + \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\;\; -fm_0 m_1 + 2\,fm_0 m_1 \;\; = hr + f\;\; m_0 + m_1\;\; , \tag{21}$$

где $f$ – гравитационная постоянная.

Теорема доказана.

Рассмотрим следующий пример ([4, с.22]). Пусть спутник движется в экваториальной плоскости Земли. Земля несколько сжата к своему экватору, поэтому сила, действующая на спутник, будет несколько отличаться от ньютоновской. Однако при движении спутника в плоскости экватора эта сила останется центральной, постоянно направленной к центру Земли. В этом случае потенциал $U\;\; r$ будет иметь вид:

$$U\;\; r\;\; = \frac{fm_0 m_1}{r} + \frac{\varepsilon\, fm_0 m_1 R_0^2}{3r^3}. \tag{22}$$

Здесь первый член – обычное ньютоновское центральное ускорение, а второй член – возмущающее ускорение, вызванное сжатием Земли. При этом $r$ – расстояние от спутника до центра Земли, $\varepsilon$ – постоянная безразмерная величина, зависящая от степени сплюснутости Земли; для Земли можно принять $\varepsilon = 0{,}0016$, $R_0$ – экваториальный радиус Земли.

Запишем вид уравнения (18) для данного случая. Так как

$$r^2 \cdot \frac{dU}{dr} + 2rU\;\; r\;\; = r^2\left( -\frac{fm_0 m_1}{r^2} - \frac{\varepsilon\, fm_0 m_1 R_0^2}{r^4} \right) +$$

$$+2r\left( \frac{fm_0 m_1}{r} + \frac{\varepsilon\, fm_0 m_1 R_0^2}{3r^3} \right) = -fm_0 m_1 - \frac{\varepsilon\, fm_0 m_1 R_0^2}{r^2} +$$

$$+2\,fm_0 m_1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{\varepsilon\, fm_0 m_1 R_0^2}{r^2} = fm_0 m_1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{\varepsilon\, fm_0 m_1 R_0^2}{r^2},$$

то

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = hr + \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\left[ fm_0 m_1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{\varepsilon\, fm_0 m_1 R_0^2}{r^2} \right] =$$

$$= hr + f\left(m_0 + m_1\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{\varepsilon f\left(m_0 + m_1\right)R_0^2}{r^2}. \tag{23}$$

Таким образом,

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = hr + f\left(m_0 + m_1\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{\varepsilon f\left(m_0 + m_1\right)R_0^2}{r^2}. \tag{24}$$

Уравнение (24) можно исследовать следующим образом. Если известно, что движение финитное, т.е.

$$R_0 < r_{\min} \le r \le r_{\max}, \tag{25}$$

то, естественно, аппроксимировать функцию $\frac{1}{r^2}$ многочленом первой степени в чебышевской метрике, затем в явном виде решить уравнение (24) и результат подставить в уравнения для координат (19.1)–(19.3), которые являются линейными уравнениями с переменными коэффициентами.

Покажем, как этот алгоритм реализуется в более простом случае, когда

$$U\left(r\right) = \frac{f m_0 m_1}{r}.$$

Рассмотрим систему уравнений, описывающих невозмущенное кеплеровское движение в декартовых координатах:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\mu x}{r^3}, \\ \ddot{y} = -\dfrac{\mu y}{r^3}, \\ \ddot{z} = -\dfrac{\mu z}{r^3}, \end{cases} \tag{26}$$

где $\mu$ – некоторая постоянная, $r$ – расстояние между телами, т.е.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Из системы (26) получаем, что

$$\begin{cases} x\ddot{x} = -\dfrac{\mu x^2}{r^3}, \\ y\ddot{y} = -\dfrac{\mu y^2}{r^3}, \\ z\ddot{z} = -\dfrac{\mu z^2}{r^3}, \end{cases} \tag{27}$$

Сложим уравнения системы (27), тогда

$$x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}=-\frac{\mu}{r^3}\left(x^2+y^2+z^2\right)=-\frac{\mu}{r}. \tag{28}$$

Далее применим закон сохранения энергии [1, с. 436]:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\frac{2\mu}{r}+h, \tag{29}$$

где $h$ – постоянная энергии.

В силу замены (15) справедливы равенства

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}=\dot{r}r, \tag{30}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=\ddot{r}r^2+\left(\dot{r}\right)^2r=r\left[\ddot{r}r+\left(\dot{r}\right)^2\right]. \tag{31}$$

Следствие. Подстановка (15) приводит уравнение для радиальной составляющей $r$ к виду

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=hr+\mu, \tag{32}$$

т.е. к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Доказательство. Преобразуем правую часть равенства (31) к более удобному виду. Для этого заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left(x^2+y^2+z^2\right)=2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}$$

и

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(r^2\right)=\frac{d}{dt}\left(2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}\right)=$$

$$2\left(x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}\right)+2\left[\left(\dot{x}\right)^2+\left(\dot{y}\right)^2+\left(\dot{z}\right)^2\right],$$

следовательно из равенств (28) и (29) получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(r^2\right)=2\left(-\frac{\mu}{r}\right)+2\left(\frac{2\mu}{r}+h\right)=\frac{2\mu}{r}+2h. \tag{33}$$

С другой стороны

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(r^2\right)=2\left(\dot{r}\right)^2+2r\ddot{r},$$

т.е. справедливо равенство

$$\left(\dot{r}\right)^2+r\ddot{r}=\frac{\mu}{r}+h. \tag{34}$$

Подставив правую часть равенства (34) в правую часть равенства (31), получаем:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=r\left(\frac{\mu}{r}+h\right)=hr+\mu. \tag{35}$$

Уравнение (35) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим далее три случая. В случае эллиптического движения $h<0,$ тогда

$$r=r(\tau)=\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]\cos\sqrt{|h|}\tau+\frac{r'(0)}{\sqrt{|h|}}\sin\sqrt{|h|}\tau-\frac{\mu}{h}. \tag{36}$$

Правую часть равенства (36) подставим в уравнение (15), тогда

$$\frac{dt}{d\tau}=\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]\cos\sqrt{|h|}\tau+\frac{r'(0)}{\sqrt{|h|}}\sin\sqrt{|h|}\tau-\frac{\mu}{h}, \tag{37}$$

т.е.

$$t=t(\tau)=\frac{1}{\sqrt{|h|}}\cdot\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]\sin\sqrt{|h|}\tau-$$
$$-\frac{r'(0)}{|h|}\cos\sqrt{|h|}\tau-\frac{\mu}{h}\tau+t_0, \tag{38}$$

где $t_0$ − произвольная постоянная, а штрихом обозначена производная по параметру $\tau$.

Таким образом, формулы (36) и (38) дают в явном параметрическом виде зависимость расстояния $r$ и времени $t$ от параметра $\tau$. Постоянную $t_0$ можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство $t(0)=0$. Действительно,

$$t(0)=-\frac{r'(0)}{|h|}+t_0$$

и, если положить

$$t_0=\frac{r'(0)}{|h|},$$

то равенство $t(0)=0$ будет выполнено. В дальнейшем можно считать, что

$$t(\tau)=\frac{1}{\sqrt{|h|}}\cdot\left[r(0)-\frac{\mu}{h}\right]\sin\sqrt{|h|}\tau-$$
$$-\frac{\dot r(0)r(0)}{|h|}\cos\sqrt{|h|}\tau-\frac{\mu}{h}\tau+\frac{\dot r(0)r(0)}{|h|}. \tag{39}$$

Равенство (37) в этом случае можно записать следующим образом

$$r=r(\tau)=\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]\cos\sqrt{|h|}\tau+\frac{\dot r(0)r(0)}{|h|}\sin\sqrt{|h|}\tau-\frac{\mu}{h}. \tag{40}$$

В параболическом случае, т.е. когда $h=0,$ уравнение (35) будет иметь вид

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=\mu, \tag{41}$$

т.е.

$$r\;\;\tau\;\;=\frac{\mu\tau^2}{2}+c_1\tau+c_2=\frac{\mu\tau^2}{2}+r'\;\;0\;\;\tau+r\;\;0\;\;. \qquad (42)$$

Правую часть равенства (42) подставим в уравнение (15), тогда

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{\mu\tau^2}{2}+r'\;\;0\;\;\tau+r\;\;0\;\;,$$

т.е.

$$t\;\;\tau\;\;=\frac{\mu\tau^3}{6}+\frac{r'\;\;0}{2}\cdot r^2+r\;\;0\;\;\tau+t_0. \qquad (43)$$

Рассмотрим далее гиперболический случай, т.е. $h>0,$ тогда из уравнения (35)

$$r\;\;\tau\;\;=\frac{1}{2}\left[r\;\;0\;\;+\frac{\mu}{h}+\frac{r'\;\;0}{\sqrt{h}}\right]e^{\sqrt{h}\tau}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[r\;\;0\;\;+\frac{\mu}{h}-\frac{r'\;\;0}{\sqrt{h}}\right]e^{-\sqrt{h}\tau}-\frac{\mu}{h}. \qquad (44)$$

Уравнение (44) в этом случае будет иметь вид

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{2}\left[r\;\;0\;\;+\frac{\mu}{h}+\frac{r'\;\;0}{\sqrt{h}}\right]e^{\sqrt{h}\tau}+\frac{1}{2}\left[r\;\;0\;\;+\frac{\mu}{h}-\frac{r'\;\;0}{\sqrt{h}}\right]e^{-\sqrt{h}\tau}-\frac{\mu}{h}. \qquad (45)$$

Таким образом,

$$t\;\;\tau\;\;=\frac{1}{2\sqrt{h}}\left[r\;\;0\;\;+\frac{\mu}{h}+\frac{r'\;\;0}{\sqrt{h}}\right]e^{\sqrt{h}\tau}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{h}}\left[r\;\;0\;\;+\frac{\mu}{h}-\frac{r'\;\;0}{\sqrt{h}}\right]e^{-\sqrt{h}\tau}-\frac{\mu}{h}\tau+t_0. \qquad (46)$$

Теорема 1 доказана.

Поставим далее задачу получить уравнения, аналогичные уравнению (35), для координат $x\;\;\tau\;\;,y\;\;\tau\;\;,z\;\;\tau$ движущегося тела. Для этого заметим, что

$$\frac{dx\left[t\;\;\tau\;\;\right]}{d\tau}=\frac{dx\left[t\;\;\tau\;\;\right]}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau},$$

и

$$\frac{d^2x\left[t\;\;\tau\;\;\right]}{d\tau^2}=\frac{d^2x\left[t\;\;\tau\;\;\right]}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2+\frac{dx\left[t\;\;\tau\;\;\right]}{dt}\cdot\frac{d^2t}{d\tau^2}=$$

$$=-\frac{\mu x\left[t\;\;\tau\;\;\right]}{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3}\cdot\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2+\frac{dx\left[t\;\;\tau\;\;\right]}{dt}\cdot\frac{d^2t}{d\tau^2}. \qquad (47)$$

Умножая обе части уравнения (47) на $\dfrac{dt}{d\tau}$, получаем

$$\frac{dt}{d\tau}\cdot\frac{d^2x\left[t(\tau)\right]}{d\tau^2}-\frac{d^2t}{d\tau^2}\cdot\frac{dx\left[\dot t(\tau)\right]}{d\tau}+\mu x\left[t(\tau)\right]=0. \tag{48}$$

Уравнение (48) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. В случае эллиптического движения оно принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}\left\{\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]\cos\sqrt{|h|}\tau+\frac{\dot r(0)r(0)}{\sqrt{|h|}}\sin\sqrt{|h|}\tau-\frac{\mu}{h}\right\}x''(\tau)-\\ -\left\{-\sqrt{|h|}\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]\sin\sqrt{|h|}\tau+\dot r(0)r(0)\cos\sqrt{|h|}\tau\right\}x'(\tau)+\mu x(\tau)=0.\end{gathered} \tag{49}$$

Для нахождения рядов Фурье решений уравнения (49) приведем коэффициенты этого уравнения к комплексной форме:

$$\begin{gathered}r(\tau)=\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]\cos\omega\tau+\frac{\dot r(0)r(0)}{\omega}\sin\omega\tau-\frac{\mu}{h}=\\ =\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]\cdot\frac{e^{i\omega\tau}+e^{-i\omega\tau}}{2}+\frac{\dot r(0)r(0)}{\omega}\cdot\frac{e^{i\omega\tau}-e^{-i\omega\tau}}{2i}-\frac{\mu}{h}=\\ =\frac{1}{2}\left\{\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]+\frac{\dot r(0)r(0)}{\omega i}\right\}e^{i\omega\tau}+\\ +\frac{1}{2}\left\{\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]-\frac{\dot r(0)r(0)}{\omega i}\right\}e^{-i\omega\tau}-\frac{\mu}{h}=\\ =a_2e^{i\omega\tau}+b_2e^{-i\omega\tau}+c,\end{gathered}$$

где

$$\omega=\sqrt{|h|},\quad c=-\frac{\mu}{h},$$

$$a_2=\frac{1}{2}\left\{\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]+\frac{\dot r(0)r(0)}{\omega i}\right\},$$

$$b_2=\frac{1}{2}\left\{\left[r(0)+\frac{\mu}{h}\right]-\frac{\dot r(0)r(0)}{\omega i}\right\}.$$

Перепишем уравнение (49) следующим образом:

$$\begin{gathered}\left(a_2e^{i\omega\tau}+b_2e^{-i\omega\tau}+c\right)x''(\tau)-\\ -\left(a_2i\omega e^{i\omega\tau}-b_2i\omega e^{-i\omega\tau}\right)x'(\tau)+\mu x(\tau)=0.\end{gathered} \tag{50}$$

Запишем ряд Фурье $\dfrac{2\pi}{\omega}$ − периодического решения уравнения (50) в следующем виде:

$$x(\tau) = x_0 + \sum_{n=-\infty}^{n=-1} x_n e^{in\omega\tau} + \sum_{n=1}^{n=\infty} x_n e^{in\omega\tau}. \tag{51}$$

Теорема 2. Коэффициенты $x_n$ $(n = 0, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ в случае эллиптического движения можно выразить через два параметра $x_{-1}$ и $x_1$ следующим образом:

$$x_n = x_{-1} \prod_{k=1}^{|n|-1} \frac{\mu - ck^2\omega^2}{a_2 (k+1)(k+2)\omega^2} \qquad (n = -2, -3, \ldots); \tag{52}$$

$$x_n = x_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\mu - ck^2\omega^2}{b_2 (k+1)(k+2)\omega^2} \qquad (n = 2, 3, \ldots); \tag{53}$$

$$x_0 = \frac{2\omega^2}{\mu}(a_2 x_{-1} + b_2 x_1); \tag{54}$$

при этом коэффициенты $x_{-1}$ и $x_1$ связаны с начальными условиями уравнениями

$$\begin{cases} a_3 x_{-1} + b_3 x_1 = x(0), \\ a_4 x_{-1} + b_4 x_1 = x'(0), \end{cases} \tag{55}$$

где

$$a_3 = \frac{2\omega^2 a_2}{\mu} + \sum_{n=-\infty}^{n=-1} \prod_{k=1}^{|n|-1} \frac{\mu - ck^2\omega^2}{a_2 (k+1)(k+2)\omega^2};$$

$$b_3 = \frac{2\omega^2 b_2}{\mu};$$

$$a_4 = i\omega \sum_{n=-\infty}^{n=-1} \left[ n \prod_{k=1}^{|n|-1} \frac{\mu - ck^2\omega^2}{a_2 (k+1)(k+2)\omega^2} \right];$$

$$b_4 = i\omega \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\mu - ck^2\omega^2}{b_2 (k+1)(k+2)\omega^2} \right];$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left\{ \left[ r(0) + \frac{\mu}{h} \right] + \frac{\dot r(0) r(0)}{\omega i} \right\},$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left\{ \left[ r(0) + \frac{\mu}{h} \right] - \frac{\dot r(0) r(0)}{\omega i} \right\}.$$

$$\omega = \sqrt{|h|}, \quad c = -\frac{\mu}{h}, \quad h < 0.$$

Доказательство. Подставим ряд (51) в уравнение (49), тогда должно выполняться равенство

$$a_2e^{i\omega\tau}+b_2e^{-i\omega\tau}+c\left(-\sum_{n=-\infty}^{n=-1}n^2\omega^2x_ne^{in\omega\tau}-\sum_{n=1}^{\infty}n^2\omega^2x_ne^{in\omega\tau}\right)-$$

$$-\left(a_2i\omega e^{i\omega\tau}-b_2i\omega e^{-i\omega\tau}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{n=-1}in\omega x_ne^{in\omega\tau}+\sum_{n=1}^{\infty}in\omega x_ne^{in\omega\tau}\right)+$$

$$+\mu\left(x_0+\sum_{n=-\infty}^{n=-1}x_ne^{in\omega\tau}+\sum_{n=1}^{\infty}x_ne^{in\omega\tau}\right)=0 \qquad (56)$$

Далее опишем алгоритм нахождения коэффициентов $x_n$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Прежде всего найдем коэффициент при $e^{i\omega\tau}$:

$$-a_2\omega^2x_{-1}-b_2\omega^2x_1-a_2i^2\omega^2(-1)x_{-1}+b_2i\omega(i\omega)x_1+\mu x_0=0,$$

т.е.

$$\mu x_0=2\omega^2a_2x_{-1}+2\omega^2b_2x_1. \qquad (57)$$

Покажем, что коэффициенты $x_n$ с отрицательным индексом $n$ можно выразить через коэффициент $x_{-1}$, а коэффициенты $x_n$ $(n=1,2,\ldots)$ через $x_1$.

Найдем далее коэффициент при функции $e^{-i\omega\tau}$:

$$-a_24\omega^2x_{-2}+c(-\omega^2)x_{-1}-a_2i\omega(-2i\omega)x_{-2}+\mu x_{-1}=0,$$

т.е.

$$6a_2\omega^2x_{-2}=(\mu-c\omega^2)x_{-1},$$

$$x_{-2}=\frac{\mu-c\omega^2}{6a_2\omega^2}\cdot x_{-1}. \qquad (58)$$

Приравнивая к нулю коэффициент при функции $e^{-i2\omega\tau}$, получаем

$$-a_29\omega^2x_{-3}-b_2\omega^2x_{-1}+c(-4\omega^2)x_{-2}-$$

$$-a_2i\omega(-i3\omega)+b_2i\omega(-i\omega)x_{-1}+\mu x_{-2}=0,$$

т.е. с учетом (58)

$$x_{-3}=\frac{\mu-4c\omega^2}{12\omega^2a_2}\cdot x_{-2}=\frac{\mu-4c\omega^2}{12\omega^2a_2}\cdot\frac{\mu-c\omega^2}{6a_2\omega^2}\cdot x_{-1}. \qquad (59)$$

Применяя метод математической индукции, получаем, что при $n>0$

$$x_{-n}=x_{-1}\cdot\frac{\mu-c\omega^2}{a_2(2^2+2)\omega^2}\cdot\frac{\mu-2^2c\omega^2}{a_2(3^2+3)\omega^2}\cdot\ldots\cdot\frac{\mu-(n-1)^2c\omega^2}{a_2(n^2+n)\omega^2}, \qquad (60)$$

т.е. при $n<0$

$$x_n = x_{-1}\prod_{k=1}^{|n|-1}\frac{\mu - ck^2\omega^2}{a_2\ k+1\ \ k+2\ \omega^2} \qquad n=-2,-3,\dots\ , \tag{61}$$

а при $n > 0$

$$x_n = x_1\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\mu - ck^2\omega^2}{b_2\ k+1\ \ k+2\ \omega^2} \qquad n=2,3,\dots\ , \tag{62}$$

кроме того из равенства (57) вытекает равенство (54).

Из равенства (51) получаем, что

$$x'\ \tau\ = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} in\omega x_n e^{in\omega\tau} + \sum_{n=1}^{n=\infty} in\omega x_n e^{in\omega\tau}. \tag{63}$$

Подставив в равенства (51) и (63) значения $x_n$, получим систему уравнений (55).

Выводы: рассмотрена задача движения двух тел с массами $m_0$ и $m_1$ в силовом поле с произвольным потенциалом, и с помощью подстановки $\frac{dt}{d\tau} = r\left[t\ \ \tau\ \right]$ получено удобное дифференциальное уравнение (18). В случае ньютоновского потенциала данная замена времени приводит к явной параметрической зависимости от «нового» времени радиальной составляющей в задаче двух тел и, как следствие, нахождение рядов Фурье декартовых координат невозмущённого кеплеровского движения.

**Литература**

1. Дубошин, Г. Небесная механика / Г. Дубошин. – М., 1975.
2. Ландау, Л.Д. Краткий курс теоретической физики. – Книга 1 / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М., 1969.
3. Монтенбрук, О. Астрономия на персональном компьютере / О. Монтенбрук, Т. Пфлегер. – СПб., 2002.
4. Белецкий, В. Очерки о движении космических тел / В. Белецкий. – М., 1972.

*Поступило 14.02.2008*