$$P_2^*(x) = -\frac{8h^3}{\left(1-h^2\right)^2}\cdot x^2 - \frac{4h^2}{1-h^2}\cdot x + \frac{2h\left(3h^2-1\right)}{\left(1-h^2\right)^2};$$

где $h = a - \sqrt{a^2-1}.$

Заключение. В работе предложен численно-аналитический алгоритм нахождения полиномов наилучшего приближения (экстремальных) в чебышевской (равномерной) метрике для произвольной дифференцируемой функции, определенной на отрезке $[a,\ b]$. Алгоритм сформулирован на базе теоремы П.Л. Чебышева об альтернансе и состоит из двух систем уравнений. Первая система уравнений содержит часть информации о точках альтернанса, связанную с чередованием максимумов и минимумов разности между функцией и экстремальным полиномом, а вторая использует тот факт, что во внутренних точках альтернанса производная разности между функцией и экстремальным полиномом равна нулю. Обе системы являются линейными по отношению к коэффициентам полинома. Выражая коэффициенты искомого полинома через внутренние точки альтернанса из второй системы и подставляя в первую, получаем нелинейную систему уравнений относительно точек альтернанса. Решая её аналитически или численно, находим точки альтернанса и, следовательно, коэффициенты экстремального полинома. Алгоритм, предложенный авторами настоящей статьи, допускает произвольную систему первого приближения точек альтернанса лишь в случае, когда система (2) решается каким-либо численным методом, например, методом Ньютона – Канторовича.

Список литературы

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. Ремез, Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения / Е.Я. Ремез. – Киев: Наукова думка, 1969. – 624 с.
3. Тиман, А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Ю.В. Трубников, О.В. Якименко
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Пусть $C_1[a, b]$ – пространство непрерывных вещественных функций, определённых на отрезке $[a, b]$ и имеющих непрерывную первую производную. Введем в этом пространстве норму

$$\| f \|_1 = \max\left\{ \max_{x\in[a,\ b]} | f(x)|,\ \max_{x\in[a,\ b]} | f'(x)| \right\}. \tag{1}$$

Цель данной публикации – сформулировать и применить алгоритм построения полинома наилучшего приближения в норме (1) (экстремального полинома) для некоторых конкретных случаев. Трудность построения экстремального в норме (1) полинома связана с тем, что в данной ситуации отсутствует базовая для многих алгоритмов [1-4] теорема Чебышева об альтернансе и приходится применять субдифференциальный критерий оптимальности.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ – произвольное банахово пространство (действительное или комплексное), $(E^*, \|\cdot\|_*)$ – пространство, сопряженное пространству *E*. Функционал $x^* \in E^*$ называется субградиентом нормы [5] в точке $x \in E$, если

$$\forall h(\in E)\ \|x+h\| - \|x\| \ge \mathrm{Re}\left\langle x^*, h\right\rangle, \tag{2}$$

где $\mathrm{Re}\, z$ – действительная часть комплексного числа *z*; $\left\langle x^*, h\right\rangle$ - значение функционала x^* на векторе *h*.

Множество всех субградиентов нормы в точке x называется субдифференциалом нормы в точке x и обозначается $\partial\|x\|$, т.е.

$$\partial\|x\| = \left\{x^* \in E^* : \forall h(\in E)\|x+h\| - \|x\| \geq \operatorname{Re}\left\langle x^*, h\right\rangle\right\}. \tag{3}$$

Далее рассмотрим критерий элемента наилучшего приближения. Итак, пусть G – подпространство существования такого элемента банахова пространства E. Задачу нахождения множества $P(x)$ (в общем случае единственности может не быть) элементов наилучшего приближения вектора x на подпространстве G можно отнести к выпуклой задаче с ограничениями типа равенств ([5], с.89), т.е.

$$f(h) = \|x-h\| \to \inf(h \in G). \tag{4}$$

Известно, что для того, чтобы точка $h_* \in G$ была решением задачи (4), необходимо и достаточно, чтобы $\partial f(h_*) \cap G^\perp \neq \varnothing,$ где $G^\perp$ – аннулятор подпространства G, т.е.

$$G^\perp = \left\{x^* \in E^* : \operatorname{Re}\left\langle x^*, h\right\rangle = 0, h \in G\right\}.$$

Таким образом, если нам известна пара μ, y, где $\mu \in \partial f(x-y) \cap G^\perp,\ y \in G,$ то мы можем установить экстремальность точки y и извлечь дополнительную информацию о структуре множества $P(x)$ элементов наилучшего приближения для точки x на подпространстве G.

Сформулируем алгоритм построения экстремального по отношению к норме (1) полинома вида $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n.$

Шаг 1. Находим полином наилучшего приближения в чебышевской норме $P^*_{n-1}(x)$ для производной $f'(x).$

Шаг 2. Если $\| f - \int P^*_{n-1}(x)dx\| \ < \ \| f' - \ P^*_{n-1}\|$ при соответствующем выборе постоянной интегрирования, то $P^*_n(x) = \int P^*_{n-1}(x)dx$ является экстремальным для функции f полиномом. Заметим, что ситуация, когда $\| f - \int P^*_{n-1}(x)dx\| \ < \ \| f' - \ P^*_{n-1}\|$, является довольно типичной.

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть $f(x) = \sqrt{x},\ [a,\,b] = [1,\ 4].$ Пользуясь теоремой Чебышева об альтернансе, найдем экстремальный в чебышевской норме полином первой степени для производной $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$ Таким полиномом является полином $P^*_1(x) = 0,551677 - 0,083333x,$ при этом $\|1/2\sqrt{x} - P^*_1\| = 0,031656.$

Интегрируя разность $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 0,551677 + 0,083333x,$ получаем выражение

$$\sqrt{x} - 0,551677x + 0,083333 \cdot \frac{x^2}{2} + c_0.$$

Взяв $c_0 = -0,491766,$ получаем, что

$$\|\sqrt{x} - P^*_2\| = 0,001776 < \|1/2\sqrt{x} - P^*_1\| = 0,031656$$

и $P^*_2 = 0,491766 + 0,551677x - 0,083333 \cdot \dfrac{x^2}{2},\ P^{*\prime}_2 = 0,551677 - 0,083333x = P^*_1.$

Точками альтернанса функции $\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0,551677 + 0,083333x$ являются значения $x_1 = 1,\ x_2 = 2,080084,\ x_3 = 4.$ Функционал μ определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 0, \\ \mu_1 - 2,080084\mu_2 + 4\mu_3 = 0, \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \end{cases}$$

т.е. коэффициенты $\mu_1 = 0,319986,\ \mu_2 = 0,500000,\ \mu_3 = 0,180014,$ а значение функционала μ на функции f задаётся следующим образом

$$\langle \mu,\ f \rangle = \mu_1 f'(1) - \mu_2 f'(2,080084) + \mu_3 f'(4).$$

Аналогичные построения можно выполнить и для функции $f(x) = \ln x.$ Например, на отрезке [5, 10] экстремальным в чебышевской норме полиномом для функции $f'(x) = 1/x$ является полином $P_2^*(x) = 0,432843 - 0,060589x + 0,002745x^2.$ Интегрируя разность $1/x - P_2^*(x)$ и выбирая соответствующим образом постоянную интегрирования, получаем экстремальный в норме (1) полином.

Список литературы

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука,1977. – 512 с.
2. Коллатц, Л. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения / Л. Коллатц, В. Крабс. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. Лоран, П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
4. Ремез, Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения / Е.Я. Ремез. – Киев: Наукова думка, 1969. – 624 с.
5. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука,1974. – 480 с.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ УПРАВЛЕНИЯ И ИНТЕГРАЛА ОТ УПРАВЛЕНИЯ

О.В. Храмцов

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В данной работе объектом исследования являются стационарные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые линейны по состоянию и по управляющему воздействию. Исследуется свойство полной управляемости таких систем, т.е. возможность построения управляющего воздействия, переводящего состояние системы за конечный промежуток времени из любого наперед заданного начального состояния в любое наперед заданного конечное состояние. Это свойство хорошо изучено в математической литературе в случае управления, состоящего из вектор-функции (см., например, [1]-[4]). Управляемость в различных классах функций управления рассмотрена в работах [5]-[6] В настоящей работе свойство полной управляемости исследуется в предположении, что управляющее воздействие носит комбинированный характер: управляющее воздействие состоит из функции управления и интеграла от этой функции.

Цель данного исследования состоит в получении условий полной управляемости в случае комбинированного управления.

Материал и методы. Материалом исследования является аналитическое представление линейных стационарных систем. В работе используются методы: метод Эйлера построения фундаментальной матрицы решений однородных линейных стационарных систем ОДУ; метод Коши построения общего решения неоднородных линейных стационарных систем; метод проблемы моментов; методы матричного анализа теории матриц.

Результаты и их обсуждение. В данной работе все множество изучаемых дифференциальных систем разбито на четыре класса. В каждом классе получен критерий полной управляе-