Получим следующий результат

$$P_2^*(x)=\frac{2h\left(3h^2-1\right)}{\left(1-h^2\right)^2}-\frac{4h^2}{1-h^2}\cdot x-\frac{8h^3}{\left(1-h^2\right)^2}\cdot x^2;$$

$$P_2^*(x)=\frac{2h\left(2h^2-1\right)}{1-h^2}+\frac{4h^2\left(4h^2-1\right)}{\left(1-h^2\right)^2}\cdot x-\frac{8h^3}{1-h^2}\cdot x^2-\frac{16h^4}{\left(1-h^2\right)^2}\cdot x^3;$$

$$P_4^*(x)=-\frac{2h\left(4h^4-3h^2+1\right)}{\left(1-h^2\right)^2}+\frac{4h^2\left(3h^2-1\right)}{1-h^2}\cdot x+\frac{8h^3\left(5h^2-1\right)}{\left(1-h^2\right)^2}\cdot x^2-\frac{16h^4}{1-h^2}\cdot x^3-\frac{32h^5}{\left(1-h^2\right)^2}\cdot x^4.$$

Список литературы

1. Кутрунов, В.Н. Полином наилучшего равномерного приближения в итерационном методе решения систем алгебраических уравнений // Сибирский математический журнал. – 1992. – Т. 33. – С. 62–68.
2. Ахиезер, Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И.Ахиезер. – М.: Наука,1965. – 407 с.

КОНСТРУКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В ЧЕБЫШЕВСКОЙ НОРМЕ

Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко, Сунь Байюй
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Явные формулы для коэффициентов экстремального полинома степени n на множестве M, содержащем $n+2$ точки [1, с. 73], позволяют с любой точностью найти экстремальный полином для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Е.Я. Ремез [1, 2] предложил способ перехода от одного подмножества из $n+2$ точек к следующему подмножеству и, таким образом, построил алгоритм получения экстремального полинома. Однако, это очень трудоемкий процесс. Цель настоящей работы: разработать конструктивный алгоритм нахождения экстремальных полиномов в чебышевской норме.

Материал и методы. Объектами исследования являются: экстремальные полиномы в чебышевской метрике. Использовались: аналитические, численные методы исследования; пакет символьной математики *Maple* 14.

Результаты и их обсуждение. В тех случаях, когда известно, что точки *a* и *b* являются точками альтернанса, точные выражения для коэффициентов экстремального полинома могут быть найдены в результате совместного анализа и решения двух систем уравнений, отражающих различные свойства чебышевского альтернанса. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Наличие альтернанса означает существование, по крайней мере, $n+2$ точек $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \le b$, в которых происходит чередование абсолютных максимумов и минимумов разности

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \tag{1}$$

между функцией и экстремальным полиномом. Этот факт можно отразить в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} &f(a)-\sum_{k=0}^{n} c_k a^k = d, && f(x_2)-\sum_{k=0}^{n} c_k x_2^k = -d, \ \ldots \\ &f(x_{n+1})-\sum_{k=0}^{n} c_k x_{n+1}^k = (-1)^n d, && f(b)-\sum_{k=0}^{n} c_k b^k = (-1)^{n+1} d, \end{aligned} \tag{2}$$

содержащей $2n+2$ неизвестных $c_0, c_1, \ldots, c_n;\ d;\ x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$. Однако, во внутренних точках альтернанса имеет место равенство нулю производных разности (1), и этот факт можно отразить в виде еще одной системы

Репозиторий ВГУ

$$f'(x_2)-\sum_{k=1}^{n}kc_kx_2^{k-1}=0,\ \ldots\ f'(x_{n+1})-\sum_{k=1}^{n}kc_kx_{n+1}^{k-1}=0, \tag{3}$$

состоящей из n уравнений. Таким образом, общее число уравнений в системах (2-3) равно $2n+2$. На основании этого факта может быть предложен следующий алгоритм построения экстремального полинома.

1. Система уравнений (3) является линейной относительно неизвестных $c_1,c_2,\ldots,c_n$. Их можно выразить через точки альтернанса $x_2,x_3,\ldots,x_{n+1}$ и подставить в систему (2).

2. Решая полученную нелинейную систему относительно точек альтернанса, находим $x_2,x_3,\ldots,x_{n+1}$, а так как коэффициенты $c_1,c_2,\ldots,c_n$ к этому моменту выражены явным образом через точки альтернанса, то они становятся известными.

3. После этого из любых двух уравнений системы (2) находится величина уклонения $d=E_n(f)$ и коэффициент c_0.

4. Используя полученные значения коэффициентов $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_n$, записываем выражение для экстремального полинома.

Пример 1. Применение вышеуказанного алгоритма для построения на отрезке $[a,b]$ экстремального полинома второй степени для функции $f(x)=x^3$ быстро приводит к аналитическим выражениям для коэффициентов и экстремальному полиному

$$P_2^*(x)=\frac{1}{32}(a+b)\left(a^2+14ab+b^2\right)-\frac{3}{16}(a+3b)(3a+b)x+\frac{3}{2}(a+b)x^2.$$

Пример 2. Соответствующие построения для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ приводят к экстремальному полиному

$$P_2^*(x)=\frac{a+4\sqrt{ab}+b}{2ab}-\frac{a^2+4ab+b^2+3\sqrt{ab}(a+b)}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4}x+\frac{4\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{ab(b-a)^2}x^2.$$

Аналогично, используя численно – аналитическое решение систем (2)-(3) были построены экстремальные полиномы для функций $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ \ f(x)=\sqrt{x},\ \ f(x)\equiv 1$ на отрезке $[a,b]$.

Ещё один случай, когда экстремальный полином любой степени находится при помощи точных формул, рассмотрен в монографии [3, с. 87]. Предлагаемое автором равенство конструктивным не является.

Авторы настоящей работы приводят это равенство к удобному виду.

Теорема. Экстремальным полиномом произвольной степени n для функции $f(x)=\dfrac{1}{x-a},\ \ -1\le x\le 1,\ \ a>1$ ($a<-1$) является полином

$$P_n^*(x)=\frac{1}{x-a}-\frac{T_n(x)\dfrac{ax-1}{x-a}-\dfrac{1-x^2}{n}T_n'(x)\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{x-a}}{\left(a^2-1\right)\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n}, \tag{4}$$

где $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$.

Например, экстремальные полиномы, найденные по формуле (4):

$$P_1^*(x)=-\frac{4h^2}{\left(1-h^2\right)^2}\cdot x-\frac{2h}{1-h^2};$$

Репозиторий ВГУ

$$P_2^*(x) = -\frac{8h^3}{\left(1-h^2\right)^2}\cdot x^2 - \frac{4h^2}{1-h^2}\cdot x + \frac{2h\left(3h^2-1\right)}{\left(1-h^2\right)^2};$$

где $h = a - \sqrt{a^2-1}.$

Заключение. В работе предложен численно-аналитический алгоритм нахождения полиномов наилучшего приближения (экстремальных) в чебышевской (равномерной) метрике для произвольной дифференцируемой функции, определенной на отрезке $[a,\ b]$. Алгоритм сформулирован на базе теоремы П.Л. Чебышева об альтернансе и состоит из двух систем уравнений. Первая система уравнений содержит часть информации о точках альтернанса, связанную с чередованием максимумов и минимумов разности между функцией и экстремальным полиномом, а вторая использует тот факт, что во внутренних точках альтернанса производная разности между функцией и экстремальным полиномом равна нулю. Обе системы являются линейными по отношению к коэффициентам полинома. Выражая коэффициенты искомого полинома через внутренние точки альтернанса из второй системы и подставляя в первую, получаем нелинейную систему уравнений относительно точек альтернанса. Решая её аналитически или численно, находим точки альтернанса и, следовательно, коэффициенты экстремального полинома. Алгоритм, предложенный авторами настоящей статьи, допускает произвольную систему первого приближения точек альтернанса лишь в случае, когда система (2) решается каким-либо численным методом, например, методом Ньютона – Канторовича.

Список литературы

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. Ремез, Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения / Е.Я. Ремез. – Киев: Наукова думка, 1969. – 624 с.
3. Тиман, А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Ю.В. Трубников, О.В. Якименко
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Пусть $C_1[a,b]$ – пространство непрерывных вещественных функций, определённых на отрезке $[a,b]$ и имеющих непрерывную первую производную. Введем в этом пространстве норму

$$\| f \|_1 = \max\left\{ \max_{x\in[a,\,b]} | f(x)|,\ \max_{x\in[a,\,b]} | f'(x)| \right\}. \tag{1}$$

Цель данной публикации – сформулировать и применить алгоритм построения полинома наилучшего приближения в норме (1) (экстремального полинома) для некоторых конкретных случаев. Трудность построения экстремального в норме (1) полинома связана с тем, что в данной ситуации отсутствует базовая для многих алгоритмов [1-4] теорема Чебышева об альтернансе и приходится применять субдифференциальный критерий оптимальности.

Пусть $(E,\|\cdot\|)$ – произвольное банахово пространство (действительное или комплексное), $(E^*,\|\cdot\|_*)$ – пространство, сопряженное пространству *E*. Функционал $x^* \in E^*$ называется субградиентом нормы [5] в точке $x \in E$, если

$$\forall h(\in E)\ \|x+h\| - \|x\| \geq \operatorname{Re}\langle x^*, h\rangle, \tag{2}$$

где $\operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа *z*; $\langle x^*, h\rangle$ - значение функционала x^* на векторе *h*.

Репозиторий ВГУ