Уточнение предлагаемой модели может состоять в точном аналитическом решении (1) с учетом (3). Программная реализация метода позволит внедрить предлагаемый метод расчета в промышленность.

Заключение. В работе предложена математическая модель и численно-аналитический алгоритм нахождения времени сдвига проекции веса тела на подошву копытца КРС. Сравнительный анализ численных результатов предлагаемой модели с экспериментально наблюдаемыми анатомическими параметрами копытец КРС показывает адекватность предлагаемой модели и алгоритма расчета, что позволяет научно обосновать планирование ортопедических мероприятий в хозяйствах по профилактике заболеваний копытец КРС, связанных с излишним отрастанием копытцевого рога.

Список литературы

1. Веремей, Э.И. Лечебно-профилактические мероприятия для крупного рогатого скота при хирургической патологии на молочных комплексах Витебской области: рекомендации / Э.И. Веремей, В.М. Руколь, В.А. Журба; Витебская государственная академия ветеринарной медицины. – Витебск: ВГАВМ, 2011. – 27 с.
2. Поляков, П. Интенсивность отрастания копытцевого рога у коров / П. Поляков, Н. Гоцаценко // Молочное и мясное скотоводство. – 1979. – № 10. – С. 43–44.

О ТОЧНОМ НАХОЖДЕНИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Ю.В. Трубников, И.А. Орехова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Работа посвящена точному нахождению коэффициентов экстремальных полиномов типа Чебышева. В статье рассматривается один из немногих возможных случаев точного построения экстремального полинома относительно функции

$$f(x)=\frac{1}{x-a}\quad(-1\le x\le 1, a>1).$$

Основным результатом работы является найденная рекуррентная формула, связывающая $F_{n+2}(x)$, $F_{n+1}(x)$ и $F_n(x)$, на основании которой, строятся рекуррентные формулы, связывающие полиномы $T_{n+2}(x)$, $T_{n+1}(x)$ и $T_n(x)$. Необходимо отметить, что подобная проблема частично решена в работе [1], однако, проведенная проверка представленных в работе [1] формул и соотношений не дает заявленного искомого результата. В настоящей работе представлены все необходимы выкладки доказательств, основанные на теореме П.Л. Чебышева (об альтернансе), позволяющие построить рекуррентные формулы для экстремальных полиномов.

Одним из немногих случаев, когда экстремальный полином $P_n^*(x)$ можно найти точно для любого n=0,1,2,…, относится к функции

$$f(x)=\frac{1}{x-a}\quad(-1\le x\le 1, a>1). \tag{1}$$

В монографии [2] приводится рассуждения на тему одной из задач Чебышева.

Рассматривается функция

$$F_n(x)=\frac{2h^{n+2}}{\left(1-h^2\right)^2}\left(v^n\cdot\frac{h-v}{1-hv}+v^{-n}\cdot\frac{1-hv}{h-v}\right), \tag{2}$$

где

$$x=\frac{1}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right),\quad h=a-\sqrt{a^2-1}<1,$$

и доказывается, что экстремальный для функции (1) полином имеет вид

$$P_n^*(x)=\frac{1}{x-a}-F_n(x)\ \ (1\le x\le 1, a>1). \tag{3}$$

Однако, сложность применения равенства (3) состоит в том, что не известна явная зависимость $F_n(x)$. В настоящей работе находится рекуррентная формула, связывающая $F_{n+2}(x)$, $F_{n+1}(x)$ и $F_n(x)$.

На базе найденной формулы строятся рекуррентные формулы, связывающие полиномы $T_{n+2}(x)$, $T_{n+1}(x)$ и $T_n(x)$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$F_{n+2}-2hxF_{n+1}+h^2F_n=0. \tag{4}$$

Лемма 2. *Имеет место рекуррентное равенство*

$$P_{n+2}^*(x)=-2h+2hxP_{n+1}^*(x)-h^2P_n^*(x). \tag{5}$$

Остается найти в явном виде полиномы $P_0^*(x)$ и $P_1^*(x)$. Данные выражения находятся путем максимизации *d*, которое находится из системы уравнений

$$\begin{cases} d+a_0=\dfrac{1}{x_1-a}, \\ -d+a_0=\dfrac{1}{x_2-a}, \end{cases} \tag{6}$$

получаем

$$d_{\max}=\max_{-1\le x_1<x_2\le 1} d=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1-a}-\frac{1}{1-a}\right)=\frac{1}{a^2-1}.$$

Подставляя найденное значение d_{max} в одно из уравнений системы (6) находим

$$a_0=P_0^*=\frac{1}{1-a}+d_{\max}=\frac{1}{1-a}+\frac{1}{a^2-1}=\frac{a}{1-a^2}=-\frac{2h\left(h^2+1\right)}{\left(h^2-1\right)^2}.$$

Аналогично, находя *d* из системы уравнений

$$\begin{cases} -d+a_0+a_1x_1=\dfrac{1}{x_1-a}, \\ d+a_0+a_1x_2=\dfrac{1}{x_2-a}, \\ -d+a_0+a_1x_3=\dfrac{1}{x_3-a}, \end{cases} \tag{7}$$

и, максимизируя на множестве $-1\le x_1<x_2<x_3\le 1,$ получаем сначала максимум по x_1, x_2 при фиксированном x_2

$$d_{\max}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x_2)(x_2+1)}{\left(a^2-1\right)(a-x_2)},$$

где

$$x_2=a-\sqrt{a^2-1}=h$$

и, получаем

$$d_{\max}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-h^2}{\left(a^2-1\right)(a-h)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4h^2}{\left(h^2-1\right)^2}\cdot\frac{2h\cdot\left(1-h^2\right)}{\left(1-h^2\right)}=\frac{4h^3}{\left(h^2-1\right)^2}.$$

Далее из системы (7) находим a_0 и a_1:

$$a_0=-\frac{2h}{1-h^2},\ \ a_1=-\frac{4h^2}{\left(1-h^2\right)^2},$$

т.е.

$$P_1^*(x)=-\frac{4h^2}{\left(1-h^2\right)^2}\cdot x-\frac{2h}{1-h^2}. \tag{8}$$

Далее воспользуемся полученными равенствами (5) и найдем $P_2^*(x)$, $P_3^*(x)$ и $P_4^*(x)$.

Получим следующий результат

$$P_2^*(x)=\frac{2h(3h^2-1)}{(1-h^2)^2}-\frac{4h^2}{1-h^2}\cdot x-\frac{8h^3}{(1-h^2)^2}\cdot x^2;$$

$$P_2^*(x)=\frac{2h(2h^2-1)}{1-h^2}+\frac{4h^2(4h^2-1)}{(1-h^2)^2}\cdot x-\frac{8h^3}{1-h^2}\cdot x^2-\frac{16h^4}{(1-h^2)^2}\cdot x^3;$$

$$P_4^*(x)=-\frac{2h(4h^4-3h^2+1)}{(1-h^2)^2}+\frac{4h^2(3h^2-1)}{1-h^2}\cdot x+\frac{8h^3(5h^2-1)}{(1-h^2)^2}\cdot x^2-\frac{16h^4}{1-h^2}\cdot x^3-\frac{32h^5}{(1-h^2)^2}\cdot x^4.$$

Список литературы

1. Кутрунов, В.Н. Полином наилучшего равномерного приближения в итерационном методе решения систем алгебраических уравнений // Сибирский математический журнал. – 1992. – Т. 33. – С. 62–68.
2. Ахиезер, Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И.Ахиезер. – М.: Наука,1965. – 407 с.

КОНСТРУКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В ЧЕБЫШЕВСКОЙ НОРМЕ

Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко, Сунь Байюй
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Явные формулы для коэффициентов экстремального полинома степени n на множестве M, содержащем $n+2$ точки [1, с. 73], позволяют с любой точностью найти экстремальный полином для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Е.Я. Ремез [1, 2] предложил способ перехода от одного подмножества из $n+2$ точек к следующему подмножеству и, таким образом, построил алгоритм получения экстремального полинома. Однако, это очень трудоемкий процесс. Цель настоящей работы: разработать конструктивный алгоритм нахождения экстремальных полиномов в чебышевской норме.

Материал и методы. Объектами исследования являются: экстремальные полиномы в чебышевской метрике. Использовались: аналитические, численные методы исследования; пакет символьной математики *Maple* 14.

Результаты и их обсуждение. В тех случаях, когда известно, что точки a и b являются точками альтернанса, точные выражения для коэффициентов экстремального полинома могут быть найдены в результате совместного анализа и решения двух систем уравнений, отражающих различные свойства чебышевского альтернанса. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Наличие альтернанса означает существование, по крайней мере, $n+2$ точек $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \le b$, в которых происходит чередование абсолютных максимумов и минимумов разности

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \qquad (1)$$

между функцией и экстремальным полиномом. Этот факт можно отразить в виде системы уравнений

$$f(a)-\sum_{k=0}^{n} c_k a^k=d, \qquad f(x_2)-\sum_{k=0}^{n} c_k x_2^k=-d, \ \ldots$$
$$f(x_{n+1})-\sum_{k=0}^{n} c_k x_{n+1}^k=(-1)^n d, \qquad f(b)-\sum_{k=0}^{n} c_k b^k=(-1)^{n+1} d, \qquad (2)$$

содержащей $2n+2$ неизвестных $c_0, c_1, \ldots, c_n;\ d;\ x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$. Однако, во внутренних точках альтернанса имеет место равенство нулю производных разности (1), и этот факт можно отразить в виде еще одной системы