

Определение. Линейное отношение $a \in LR(V)$ назовем ниль-отношением, если существует такое натуральное число n , что $a^n \in LR_0(V)$.

Будем говорить, что ненулевые вектора $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ образуют a -серии типа I, если $(\bar{x}_1, \bar{0}), (\bar{x}_2, \bar{x}_1), \dots, (\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}) \in a$.

Будем говорить, что ненулевые вектора $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ образуют a -серии типа II, если $(\bar{x}_1, \bar{0}), (\bar{x}_2, \bar{x}_1), \dots, (\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}), (\bar{0}, \bar{x}_n) \in a$.

Будем говорить, что ненулевые вектора $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ образуют a -серии типа III, если $(\bar{0}, \bar{x}_n), (\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}), \dots, (\bar{x}_2, \bar{x}_1) \in a$.

Аналогично будем говорить, что ненулевые вектора $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ образуют a -серии типа IV, если $(\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}), \dots, (\bar{x}_2, \bar{x}_1) \in a$.

Базис пространства V называется каноническим, если он состоит из множества попарно непересекающихся a -серий типа I, II, III, IV.

Теорема. Пусть $a \in LR(V)$ – ниль-отношение. Следующие условия для линейного отношения a эквивалентны:

- 1) для a существует квазиобратный элемент $b \in LR(V)$;
- 2) a является k -простым линейным отношением;
- 3) для a в пространстве V можно выбрать канонический базис.

Список литературы

1. Шайн, Б.М. Симметрическая полугруппа преобразований покрывается своими инверсными подполугруппами / Б.М. Шайн // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 22. – № 1-2. – 1971. – С. 163–170.
2. Маклейн, С. Алгебра аддитивных отношений / С. Маклейн // Сб. переводов. Математика. – 1963. – № 7:6. – С. 1–12.

ГОМОТЕТИЧЕСКИЕ АВТОМОРФИЗМЫ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ VI ТИПА

М.Н. Подоксенов

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Преобразование алгебры Ли $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ называется автоморфизмом, если оно сохраняет операцию скобки: $[fX, fY] = f[X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}$. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда преобразование $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ называется подобием (или гомотетией) с коэффициентом e^μ , если $\langle fX, fY \rangle = e^{2\mu} \langle X, Y \rangle \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}$. В случае $\mu=0$ преобразование f называется изометрией.

Преобразование, являющееся одновременно подобием и автоморфизмом, будем называть автоподобием. Решение задачи о существовании автоподобий для алгебр Ли связано с решением задачи о существовании гомотетических преобразований для однородных пространств групп Ли, снабжённых левоинвариантной метрикой.

Материал и методы. Рассматриваются алгебры Ли VI типа снабжённые лоренцевым скалярным произведением сигнатуры $(+, +, +, -)$. В исследовании применяются методы аналитической геометрии и линейной алгебры.

Результаты и их обсуждение. В данной работе мы найдём автоподобия для разрешимых четырёхмерных алгебр Ли VI типа, которые более детально классифицированы на 4 подтипа А.З. Петровым [1].

Эти алгебры Ли содержат трёхмерный коммутативный идеал $\mathcal{L}$, и, если выбрать базис $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ так, чтобы $\{E_2, E_3, E_4\} \in \mathcal{L}$, то коммутационные соотношения будут задаваться равенствами

$$[E_i, E_j] = 0, [E_1, E_i] = C_i^j E_j, i, j = 2, 3, 4$$

Другими словами, вектор E_1 действует на $\mathcal{L}$ с помощью линейного преобразования $\text{ad}E_1$, которое задаётся матрицей C . А.З.Петров приводит следующие неизоморфные канонические виды действия $\text{ad}E_1$ (изменена нумерация векторов).

VI ₁ . $[E_1, E_2] = lE_2$	[E ₁ , E ₃] = εE_3 ,	[E ₁ , E ₄] = kE_4 ;
VI ₂ . $[E_1, E_2] = lE_2$,	[E ₁ , E ₃] = $kE_3 + E_4$,	[E ₁ , E ₄] = $-E_3 + kE_4$;
VI ₃ . $[E_1, E_2] = \varepsilon E_2$,	[E ₁ , E ₃] = $kE_3 + E_4$,	[E ₁ , E ₄] = kE_4 ;
VI ₄ . $[E_1, E_2] = \varepsilon E_2$,	[E ₁ , E ₃] = $kE_3 + E_4$,	[E ₁ , E ₄] = $kE_4 + E_2$,

$k, l \in \mathbf{R}, \varepsilon = 0, 1$

Любой автоморфизм должен оставлять инвариантным коммутативный идеал $\mathcal{L}$. Нетрудно доказать, что если в выбранном базисе вектор X имеет координаты $X(\alpha, x^2, x^3, x^4)$, то $\text{ad}X = \alpha \cdot \text{ad}E_1$. Другими словами, выбирая вместо E_1 другой базисный вектор, мы, разве что умножим все коэффициенты коммутационных соотношений на ненулевое число.

Предположим, что относительно введенного скалярного произведения на идеале $\mathcal{L}$ индуцируется невырожденное скалярное произведение. Пусть $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ есть автоподобие. Тогда оно оставляет инвариантным идеал $\mathcal{L}$, а значит, оставляет инвариантным его ортогональное дополнение I . Выберем в качестве E_1 вектор, принадлежащий I . Если f отлично от изометрии, то $E_1' = f(E_1) = \pm e^\mu E_1, \mu \neq 0$. Поэтому f не может быть изоморфизмом алгебры Ли.

Предположим теперь, что на идеале $\mathcal{L}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение. Тогда в $\mathcal{L}$ существует единственное изотропное направление J и оно должно быть инвариантно относительно подобию $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$. Согласно [2] можно так выбрать базис в $\mathcal{G}$, что матрица преобразования f имеет вид

$$e^\mu \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 \\ 0 & e^\nu \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{---} \\ S \\ \text{---} \end{matrix} \quad \text{или} \quad e^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица скалярного произведения –

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{---} \\ E \\ \text{---} \end{matrix} \quad (1).$$

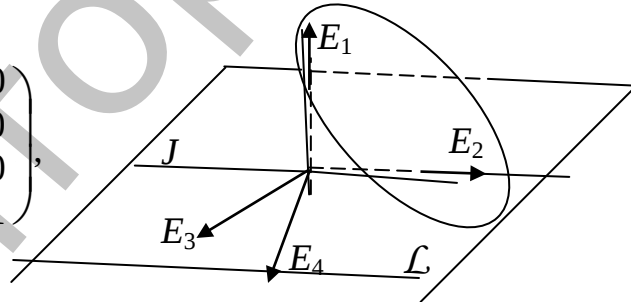


рис. 1

Здесь E – единичная матрица порядка 2, а S – ортогональная матрица порядка 2. Расположение базисных векторов и конуса изотропных векторов показано на рисунке 1. Преобразование f будет автоморфизмом только, если оно задаётся первой из матриц, и, при этом, $\mu = \nu$. Тем самым необходимое условие существования автоподобий, отличных от изометрий: идеал $\mathcal{L}$ является прямой суммой одномерного и двумерного идеалов. Можно доказать, что это условие является и достаточным. Это приводит к следующему результату.

Теорема. Среди четырёхмерных алгебр Ли VI типа по классификации А.З.Петрова, автоподобия относительно лоренцевого скалярного произведения допускают алгебры Ли подтипов VI₁, VI₂, VI₄, и только они. При этом скалярное произведение в подходящем базисе задаётся матрицей (1), а автоподобия – матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\mu} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{---} \\ S \\ \text{---} \end{matrix} \begin{pmatrix} e^{2\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{---} \\ E \\ \text{---} \end{matrix}.$$

Закключение. В данной работе найдены все алгебры Ли VI типа по классификации А.З.Петрова, которые допускают гомотетические автоморфизмы относительно лоренцевого скалярного произведения. В дальнейшем предполагается дать описание полной группы таких автоморфизмов и указать однопараметрические подгруппы гомотетических автоморфизмов.

Список литературы

1. Петров, А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров. – М.: Наука, 1966.
2. Alekseevski, D. Self-similar Lorentzian manifolds / D. Alekseevski // Ann. of Global Anal. Geom. – 1985. – V.3, № 1. – С. 59–84.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ПРОЕКЦИИ ВЕСА ТЕЛА НА ПОДОШВУ КОПЫТЦА КРУПНОГО РОГАТОГО СКОТА

О.В. Пышиненко¹, С.М. Станкевич¹, Е.В. Ховайло²

¹Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова; ²Витебск, ВГАВМ

Болезни копытца, связанные с излишним отрастанием копытцевого рога, являются наиболее актуальной проблемой скотоводства, так как наносят значительный экономический ущерб хозяйствам за счет выбраковки большого количества больных животных, причем чаще высокопродуктивных. Известно, что 20–25% поголовья скота имеют ортопедические заболевания копытца, а на комплексах с грубыми нарушениями содержания данная цифра может достигать 50% [1, 2]. Излишнему отрастанию копытцевого рога и, следовательно, перераспределению нагрузки на мякиш, способствует и отсутствие регулярных ортопедических диспансеризаций. Количество ортопедических расчисток копытца чаще основано не на научных данных о росте и стирании копытцевого рога, а на экономических возможностях хозяйства. Поэтому, в настоящей работе была поставлена цель: разработать математический метод расчета отрастания копытцевого рога до критического момента, предрасполагающего к развитию язвенных поражений.

Материал и методы. Материалы: рентгенограммы, анатомические параметры строения копытца крупного рогатого скота (КРС) и относительная скорость роста копытцевого рога, полученные путем промеров натуральных препаратов на кафедре анатомии животных ВГАВМ. Объект исследования: процесс движения проекции веса тела на подошву копытца КРС. Предмет исследования: математическая модель данного процесса. Использовались: аналитические, численные методы исследования; пакет символьной математики Maple 14.

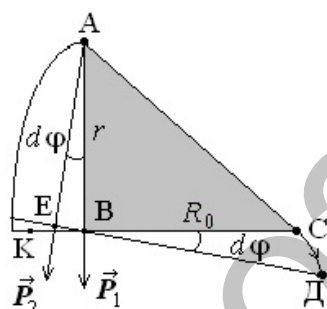


Рис.1 - Модель копытца КРС.

Ис-пользовались: аналитические, численные методы исследования; пакет символьной математики Maple 14.

Результаты и их обсуждение. В качестве модели копытца предлагается использовать модель абсолютно твердого тела (рис.1), где КС – подошва копытца; А – копытцевый сустав; В –

проекция веса тела $\vec{P}_1$ в норме; К – критическое положение (точка) проекции веса тела, при достижении которого возникновение ортопедических поражений копытца наиболее вероятно; АС – линия роста копытцевого рога; АВ = r – длина перпендикуляра от суставной поверхности копытцевой кости до подошвы копытца; ВС = R_0 – начальное расстояние от пересечения r с подошвой копытца до зацепа копытца – С в норме; ВК – расстояние от пересечения r с подошвой копытца до места наиболее частой локализации язвы мякиша.

Отрастание копытцевого рога происходит со скоростью v_p . При движении КРС по различным видам полов в с/х предприятиях происходит стирание копытцевого рога со скоростью $v_{ст}$. Поэтому в данной модели учитывается относительная скорость роста $v = v_p - v_{ст}$.

В процессе роста копытцевого рога с относительной скоростью v происходит: удлинение участка подошвы ВС; появляется дополнительный вращающий момент, поворачивающий копытце и, соответственно, линию подошвы на угол $d\phi$. Тогда ВД – это новая линия соприкосновения подошвы с опорой. При этом проекция веса тела $\vec{P}_2$ смещается из точки В в точку Е в