УДК 512.542

О минимальных тотально ω-насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп

В.Г. Сафонов*, И.Н. Сафонова**
**Министерство образования Республики Беларусь*
***Белорусский государственный университет*

При исследовании и классификации формаций конечных групп возникает необходимость изучения их внутреннего строения, опираясь на свойства некоторых хорошо изученных классов групп. Важным инструментом таких исследований являются критические формации, т.е. минимальные по включению формации, не содержащиеся в заданном классе групп, все собственные подформации которых в нем содержатся. В частности, свойства решетки подформаций исследуемой формации тесно связаны с наличием или отсутствием критических подформаций того или иного вида, а также от их взаимного расположения в данной формации. Актуальной является задача развития метода критических формаций для изучения частично тотально насыщенных формаций конечных групп.

Цель исследования – описание минимальных тотально ω-насыщенных ненильпотентных формаций конечных групп.

Материал и методы. *Материалом для исследования является решетка тотально ω-насыщенных подформаций тотально ω-насыщенной формации конечных групп. Используются методы теории конечных групп и теории формаций конечных групп.*

Результаты и их обсуждение. *В работе получено описание минимальных тотально ω-насыщенных не $\mathfrak{X}$-формаций конечных групп, где $\mathfrak{X}$ – некоторая насыщенная подформация формации всех нильпотентных групп. В частности, даны описания минимальных тотально ω-насыщенных и тотально p-насыщенных ненильпотентных формаций (p – простое число), а также описание атомов решетки всех тотально ω-насыщенных и p-насыщенных формаций.*

Заключение. *Полученные результаты могут быть использованы при изучении структурного строения частично тотально насыщенных формаций.*

Ключевые слова: *формация конечных групп, тотально насыщенная формация, критическая формация.*

On Minimal Totally ω-Saturated Non-nilpotent Formations of Finite Groups

V.G. Safonov*, I.N. Safonova**
**Ministry of Education of the Republic of Belarus*
***Belarusian State University*

During investigation and classification of finite group formations necessity arises to study their inner structure while relying on features of some well studied classes of groups. An important instrument of such research is critical formations, i.e. minimal on inclusion formations which are not included into the given class of groups, all own subformations of which it contains. In particular, features of the lattice of subformations of the studied formation are closely linked with the presence or absence of critical subformations of this or that kind, and on their mutual location in the given formation. The urgent problem is the development of the method of critical formations for the study of partly totally saturated formations of finite groups.

The aim of the study is description of minimal totally ω-saaturated non-nilpotent formations of finite groups.

Material and methods. *The material of the research is the lattice of totally ω-saturated subformations of the totally ω-saturated formation of finite groups. Methods of theory of finite groups and theory of formations of finite groups are used.*

Findings and their discussion. *Description of minimal totally ω-saturated non $\mathfrak{X}$-formations of finite groups, where $\mathfrak{X}$ is some saturated subformation of the formation of all nilpotent groups is presented in the article. In particular, descriptions of minimal totally ω-saturated and totally p-saturated non nilpotent formations (p is a simple number) are presented, as well as the description of atoms of the lattice of all totally ω-saturated and p-saturated formations.*

Conclusion. *The findings can be used in studying structural composition of partially totally saturated formations.*

Key words: *formation of finite groups, totally saturated formation, critical formation.*

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Мы используем терминологию и обозначения, принятые в [1].

Впервые задача описания критических формаций (минимальных, по включению, формаций, не входящих в заданный класс групп) была поставлена Л.А. Шеметковым в его докладе на VI Симпозиуме по теории групп [2]. Теория критических кратно насыщенных формаций широко используется в вопросах изучения и классификации кратно насыщенных формаций, имеющих заданные структурные ограничения (см., например, [3–4]).

Активное развитие в последние годы теорий тотально насыщенных и тотально ω-насыщенных (иначе, частично тотально насыщенных) формаций вызвало необходимость изучения и описания критических тотально ω-насыщенных формаций.

В представленной работе получено описание минимальных тотально ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, где $\mathfrak{H}$ – некоторая нильпотентная насыщенная формация. В частности, даны описания минимальных тотально ω-насыщенных и тотально p-насыщенных ненильпотентных формаций (p – простое число), а также описание атомов решетки всех тотально ω-насыщенных формаций.

В качестве следствия основного результата получено описание минимальных тотально насыщенных ненильпотентных формаций [5].

1. Определения и обозначения

Пусть ω – непустое множество простых чисел. Символом $G_{\omega d}$ обозначается наибольшая нормальная в G подгруппа, у которой каждый композиционный фактор является ωd-группой (если таких подгрупп в G нет, то полагают $G_{\omega d}=1$). Всякую функцию вида $f:\omega\cup\{\omega'\}\to$ {формации} называют ω-локальным спутником. Через $LF_\omega(f)$ обозначают класс всех таких групп G, что $G/G_{\omega d}\in f(\omega')$ и $G/F_p(G)\in f(p)$ для любого $p\in\omega\cap\pi(G)$. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F}=LF_\omega(f)$, то говорят, что $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией, а f – ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G с $G/L\in\mathfrak{F}$, где $L\subseteq O_\omega(G)\cap\Phi(G)$. Как было показано в [1], формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной тогда и только тогда, когда она ω-локальна.

Всякую формацию считают 0-кратно ω-насыщенной. При $n\geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно ω-насыщенной, если $\mathfrak{F}=LF_\omega(f)$, где все значения ω-локального спутника f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями. Формацию n-кратно ω-насыщенную для любого целого неотрицательного n называют тотально ω-насыщенной.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Тогда через $l_\infty^\omega\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают тотально ω-насыщенную формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех тотально ω-насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. При этом, если $\mathfrak{X}=\{G\}$, то формацию $l_\infty^\omega\mathrm{form}G$ называют однопорожденной тотально ω-насыщенной формацией.

Множество l_∞^ω всех тотально ω-насыщенных формаций относительно включения $\subseteq$ образует полную модулярную решетку [6]. Понятно, что в этой решетке $\vee_\infty^\omega(\mathfrak{F}_i\mid i\in I)=l_\infty^\omega\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$ и $\cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ являются, соответственно, точной верхней и точной нижней гранями для подмножества $\{\mathfrak{F}_i\mid i\in I\}$ из l_∞^ω. Формации из l_∞^ω называют l_∞^ω-формациями.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп, p – простое число. Тогда полагают $\mathfrak{X}(F_p)=\mathrm{form}(G/F_p(G)\mid G\in\mathfrak{X})$, если $p\in\pi(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}(F_p)=\varnothing$, если $p\notin\pi(\mathfrak{X})$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая тотально ω-насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ – произвольный класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной тотально ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией (или $\mathfrak{H}_\infty^\omega$-критической формацией), если $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$, но все ее собственные тотально ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

2. Вспомогательные результаты

Для доказательства основного результата нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 2.1 [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация, π – такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{F})\cap\omega\subseteq\pi$. Тогда формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ – тотально ω-насыщена.*

Лемма 2.2 [3, с. 167]. *Пусть A – монолитическая группа с цоколем P. Тогда если $P\not\subset\Phi(A)$, то $\mathrm{form}(A/P)$ – единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}A$.*

Следующая лемма является частным случаем леммы 5 из [1].

Лемма 2.3. *Если $\mathfrak{F}=l_\infty^\omega\mathrm{form}\mathfrak{X}$ и f – минимальный ω-локальный l_∞^ω-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega')=l_\infty^\omega\mathrm{form}(G/G_{\omega d}\mid G\in\mathfrak{X})$;

2) $f(p) = l_\infty^\omega \mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ *для всех* $p \in \omega$;

3) если $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$, *спутник* h l_∞^ω*-значен и* p *– некоторое фиксированное число из* ω, *то* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f_1)$, *где* $f_1(a) = h(a)$ *при любом* $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$ *и*

$$f_1(p) = l_\infty^\omega \mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1),$$

кроме того, $f_1(p) = f(p)$;

4) $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$, *где* $h(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(p) = f(p)$ *при всех* $p \in \omega$.

Лемма 2.4 [1]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *формация* $\mathfrak{F}$ ω*-насыщена;*

2) $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$;

3) $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $f(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p)$ *для всех* $p \in \omega$;

4) *формация* $\mathfrak{F}$ ω*-локальна.*

Лемма 2.5 [3, с. 171]. *Если в группе* G *имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и* $O_p(G) = \{1\}$ (p *– некоторое простое число*), *то существует точный неприводимый* $\mathrm{F}_p G$*-модуль, где* F_p *– поле из* p *элементов.*

Лемма 2.6 [1]. *Если* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ *и* $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$, *для некоторого* $p \in \omega$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

3. Основной результат

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathfrak{F} = l_\infty^\omega \mathrm{form} G$, *где* G *– такая монолитическая группа с неабелевым цоколем* $P = G^{\mathfrak{N}_p}$, *что* $\pi(P) \cap \omega = \{p\}$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет единственную максимальную тотально* ω*-насыщенную подформацию* $\mathfrak{M}$, *причем* $\mathfrak{M} = l_\infty^\omega \mathrm{form}(G/P) = \mathfrak{N}_p$ *и* $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathrm{form} G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – группа, удовлетворяющая условиям леммы, $\mathfrak{F} = l_\infty^\omega \mathrm{form} G$. Поскольку по условию леммы $P = G^{\mathfrak{N}_p}$ и $\pi(G/P) \cap \omega = \{p\}$, то $\pi(\mathrm{form}(G)) \cap \omega = \{p\}$ и в силу леммы 2.1 формация $\mathfrak{N}_p \mathrm{form} G$ является тотально ω-насыщенной. Поэтому справедливо включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p \mathrm{form} G$. Кроме того, так как $G/P \in \mathfrak{N}_p$ и $p \in \omega$, то $l_\infty^\omega \mathrm{form}(G/P) = \mathfrak{N}_p$.

Покажем, что $\mathfrak{N}_p$ – единственная максимальная l_∞^ω-подформация формации $\mathfrak{F}$. Действительно, поскольку $p \in \omega$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Ясно также, что $\mathfrak{N}_p \neq \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольная собственная l_∞^ω-подформация формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{N}_p$ и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{N}_p$. Поскольку $\mathfrak{N}_p$ – насыщенная формация, то A – монолитическая группа с цоколем $R = A^{\mathfrak{N}_p} \not\subseteq \Phi(A)$. Так как ввиду условий леммы $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \{p\}$, то $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Поэтому R является либо ω'-группой, либо неабелевой pd-группой. Тогда поскольку $A \in \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p \mathrm{form} G$, то $A \in \mathrm{form} G$. Если $\mathrm{form} A = \mathrm{form} G$, то $G \in \mathrm{form} A \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Последнее противоречит выбору формации $\mathfrak{H}$. Значит, $\mathrm{form} A \subset \mathrm{form} G$. По лемме 2.2 формация $\mathrm{form} G$ имеет единственную максимальную подформацию $\mathrm{form}(G/P)$. Следовательно, $\mathrm{form} A \subseteq \mathrm{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{N}_p$, т.е. $A \in \mathfrak{N}_p$. Снова получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_p$ – единственная максимальная l_∞^ω-подформация формации $\mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathrm{form} G$. Так как по условию леммы P – неабелева pd-группа, то $F_p(G) = 1$. Значит, ввиду условия 2) леммы 2.3, значение на p минимального ω-локального l_∞^ω-значного спутника f формации $\mathfrak{F}$ такое, что $f(p) = l_\infty^\omega \mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_\infty^\omega \mathrm{form} G = \mathfrak{F}$. Поэтому по лемме 2.4 $\mathfrak{N}_p f(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$. Кроме того, поскольку $\mathrm{form} G \subseteq l_\infty^\omega \mathrm{form} G$, то $\mathfrak{N}_p \mathrm{form} G \subseteq \mathfrak{N}_p l_\infty^\omega \mathrm{form} G = \mathfrak{F}$. Но, как было показано ранее, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p \mathrm{form} G$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathrm{form} G$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть* G *– такая монолитическая группа с цоколем* $P = G^{\mathfrak{N}}$, *что* $\pi(P) \cap \omega = \varnothing$. *Тогда формация* $\mathfrak{F} = l_\infty^\omega \mathrm{form} G$ *имеет единственную максимальную* l_∞^ω*-подформацию* $l_\infty^\omega \mathrm{form}(G/P) = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – группа из условия леммы, $\mathfrak{F} = l_\infty^\omega \mathrm{form} G$ и $\mathfrak{M} = l_\infty^\omega \mathrm{form}(G/P)$.

Поскольку $G \notin \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Кроме того, так как $\mathfrak{N}$ – насыщенная формация, то P Ъ $\Phi(G)$. Очевидно, также, что $\pi(\mathfrak{M}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$.

Рассмотрим следующие возможные три случая:

1) $\pi(G/P) \cap \omega = \varnothing$;

2) $\pi(G/P) \subseteq \omega$;

3) $\varnothing \neq \pi(G/P) \cap \omega \subset \pi(G/P)$.

Пусть имеет место 1). Тогда G – ω'-группа. Значит, $l_\infty^\omega \mathrm{form} G = \mathrm{form} G$ и $l_\infty^\omega \mathrm{form}(G/P) = \mathrm{form}(G/P)$. Поскольку ввиду леммы 2.2 формация $\mathrm{form}(G/P)$ является единственной максимальной подформацией формации $\mathrm{form} G$, то $\mathfrak{M}$ – единственная максимальная l_∞^ω-подформация $\mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ – нильпотентная формация, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.

Допустим, что имеет место 2). Тогда, очевидно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\pi(G/P)}$. Пусть $\mathfrak{H}$ – собственная l_∞^ω-подформация из $\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{\pi(G/P)}$. Пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{N}_{\pi(G/P)}$. Тогда A – монолитическая группа с цоколем $R = A^{\mathfrak{N}_{\pi(G/P)}}$. В силу леммы 2.1 имеет место включение $\mathfrak{F} = l_\infty^\omega \mathrm{form} G \subseteq \mathfrak{S}_\omega \mathrm{form} G$. Поэтому если R – абелева ω'-группа или неабелева группа, то $A \in \mathrm{form} G$. Поскольку $\mathrm{form} A \neq \mathrm{form} G$, то $\mathrm{form} A \subseteq \mathrm{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{N}_{\pi(G/P)}$. Следовательно, $A \in \mathfrak{N}_{\pi(G/P)}$. Противоречие. Значит, R – абелева r-группа, где $r \in \omega$. Так как по условию леммы P – ω'-группа, то $G \in \mathfrak{G}_{\omega'} \mathfrak{N}_{\pi(G/P)}$. Поскольку $\mathfrak{G}_{\omega'} \mathfrak{N}_{\pi(G/P)}$ – тотально насыщенная формация, то она является и тотально ω-насыщенной. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega'} \mathfrak{N}_{\pi(G/P)}$. Следовательно, $A \in \mathfrak{G}_{\omega'} \mathfrak{N}_{\pi(G/P)}$. Но R – ω-группа. Значит, $A \in \mathfrak{N}_{\pi(G/P)}$. Противоречие. Поэтому $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{\pi(G/P)} = \mathfrak{M}$.

Таким образом, и в этом случае $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\pi(G/P)}$ – единственная максимальная l_∞^ω-подформация формации $\mathfrak{F}$. Очевидно, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.

Пусть, наконец, имеет место 3) и $\mathfrak{H}$ – произвольная собственная l_∞^ω-подформация из $\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Предположим, что $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{N}$ не пусто и A – группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{N}$. Тогда A – монолитическая группа с цоколем R и $A/R \in \mathfrak{N}$.

Допустим, что R – неабелева или абелева ω'- группа. Так как ввиду леммы 2.1 имеет место включение $\mathfrak{F} = l_\infty^\omega \mathrm{form} G \subseteq \mathfrak{S}_\omega \mathrm{form} G$, то $A \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\omega \mathrm{form} G$, что влечет $A \in \mathrm{form} G$. Поскольку понятно, что $\mathrm{form} A \neq \mathrm{form} G$, то $\mathrm{form} A \subset \mathrm{form} G$ и, в силу леммы 2.2, имеем $\mathrm{form} A \subseteq \mathrm{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{N}$. Получили противоречие. Следовательно, R – абелева r-группа, где $r \in \omega$. Но $G \in \mathfrak{G}_{\omega'} \mathfrak{N}$. Значит, $A \in \mathfrak{N}$. Снова получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Но тогда $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ – единственная максимальная l_∞^ω-подформация формации $\mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$. Ясно, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$. Допустим, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N} \not\subseteq \mathfrak{M}$ и B – группа минимального порядка из $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) \setminus \mathfrak{M}$. Тогда B – монолитическая группа с цоколем $L = B^{\mathfrak{M}}$. Поскольку группа B нильпотентна, то B – примарная группа. Пусть $\pi(B) = \{q\}$. Ввиду того, что $\pi(\mathfrak{M}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, имеем $q \in \omega'$. Так как $B \in \mathfrak{F}$ и по лемме 2.1 справедливо включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\omega \mathrm{form} G$, то $B \in \mathrm{form} G$. Поскольку $\mathrm{form} B \neq \mathrm{form} G$, то $\mathrm{form} B \subseteq \mathrm{form}(G/P)$ и, следовательно, $B \in l_\infty^\omega \mathrm{form}(G/P) = \mathfrak{M}$. Противоречие. Поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$. Лемма доказана.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально ω-насыщенная формация, $\mathfrak{X}$ – некоторая нильпотентная насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{X}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}_\infty^\omega$-критической формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\infty^\omega \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{X}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$;

2) $G = [P]Q$ – группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$, где $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $|Q| = q$ – простое число;

3) P – неабелева pd-группа, $G/P \in \mathfrak{N}_p$, где $p \in \omega$, причем $\pi(G) \cap \omega = \{p\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная тотально ω-насыщенная не $\mathfrak{X}$-формация, где $\mathfrak{X}$ – некоторая нильпотентная насыщенная формация. Выберем в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}$ группу G минимального порядка. Тогда G –

монолитическая группа с цоколем $P = G^{\mathsf{X}}$. Понятно, что $l_{\infty}^{\omega}\text{form}G \subseteq \mathsf{F}$. Поскольку $G \notin \mathsf{X}$ и F – $\mathsf{X}_{\infty}^{\omega}$-критическая формация, то $\mathsf{F} = l_{\infty}^{\omega}\text{form}G$.

Если $\pi = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$, то группа G удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть $\pi \neq \varnothing$ и $p \in \pi$. Допустим, что P – абелева p-группа. Если $p \notin \pi(\mathsf{X})$, то в силу леммы 2.4 имеем $\mathsf{N}_p \not\subset \mathsf{X}$. Однако, поскольку $p \in \pi(\mathsf{F})$, то ввиду той же леммы справедливо включение $\mathsf{N}_p \subseteq \mathsf{F}$. Так как при этом N_p – ω-тотально-насыщенная формация, а F – минимальная тотально ω-насыщенная не X-формация, то имеет место равенство $\mathsf{F} = \mathsf{N}_p$. Но тогда G – p-группа. Поскольку G – монолитическая группа, то $G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega \setminus \pi(\mathsf{X})$. Таким образом, в этом случае группа G удовлетворяет условию 1) данной теоремы.

Если же $p \in \pi(\mathsf{X})$, то поскольку X – насыщенная формация, имеем $P \not\subset \Phi(G)$ и $P = C_G(P) = F_p(G)$. Ввиду леммы 2.3 формация F имеет такой минимальный ω-локальный l_{∞}^{ω}-значный спутник f, что $f(p) = l_{\infty}^{\omega}\text{form}(G/F_p(G)) = l_{\infty}^{\omega}\text{form}(G/P)$. Заметим, что $G/P \neq 1$, поскольку в противном случае G является p-группой и принадлежит X, что невозможно. Поэтому найдется по меньшей мере одно $q \in \pi(G/P) \setminus \{p\}$. Пусть Q – группа порядка q. Так как $l_{\infty}^{\omega}\text{form}(G/P) \subseteq \mathsf{X}$ и X – наследственная формация, ввиду ее нильпотентности, то силовская q-подгруппа группы G/P принадлежит $l_{\infty}^{\omega}\text{form}(G/P)$. Значит, формации $l_{\infty}^{\omega}\text{form}(G/P) = f(p)$ принадлежит и группа Q. Поскольку Q – монолитическая группа и $O_p(Q) = 1$, то по лемме 2.5 существует точный неприводимый $\mathrm{F}_p Q$-модуль V, где F_p – поле из p элементов. Пусть $A = [V]Q$. Тогда группа A является группой Шмидта с $\Phi(A) = 1$. Понятно, что $F_p(A) = O_p(A) = V$. Тогда, поскольку $A/F_p(A) \cong V \in f(p)$, то, применяя лемму 2.6, имеем $A \in \mathsf{F}$. Так как при этом $A \notin \mathsf{X}$, то $\mathsf{F} = l_{\infty}^{\omega}\text{form}A$, где A – группа, удовлетворяющая условию 2) теоремы.

Пусть теперь P – неабелева pd-группа, где $p \in \omega$. Допустим, что $|\pi| > 1$. Тогда в π существует по крайней мере еще одно отличное от p простое число q. Понятно, что $F_p(G) = F_q(G) = 1$. В силу леммы 2.3 для минимального ω-локального l_{∞}^{ω}-значного спутника f формации F имеем:

$$f(p) = l_{\infty}^{\omega}\text{form}(G/F_p(G)) = l_{\infty}^{\omega}\text{form}G,$$

$$f(q) = l_{\infty}^{\omega}\text{form}(G/F_q(G)) = l_{\infty}^{\omega}\text{form}G.$$

Пусть Z_p – группа простого порядка p. Поскольку $O_q(Z_p) = 1$, то ввиду леммы 2.5 существует точный неприводимый $\mathrm{F}_q Z_p$-модуль W, где F_q – поле из q элементов. Пусть $B = [W]Z_p$. Ясно, что $F_q(B) = O_q(B) = W$. Тогда, так как $B/F_q(B) \cong W \in f(q)$, то по лемме 2.6 группа B принадлежит F.

Если $\mathsf{F} \neq l_{\infty}^{\omega}\text{form}B$, то $l_{\infty}^{\omega}\text{form}B \subseteq \mathsf{X} \subseteq \mathsf{N}$. Значит, группа B нильпотентна. Противоречие. Значит, $\mathsf{F} = l_{\infty}^{\omega}\text{form}B$ и F – разрешимая формация. Снова получили противоречие. Поэтому $|\pi| = 1$.

Покажем теперь, что $\pi(G/P) \subseteq \{p\}$. Предположим, что $\pi(G/P) \not\subset \{p\}$ и пусть $q \in \pi(G/P) \setminus \{p\}$. Обозначим через Q группу простого порядка q. Ввиду того, что формация $l_{\infty}^{\omega}\text{form}(G/P)$ нильпотентна, она является наследственной. Поэтому силовская q-подгруппа группы G/P, а следовательно, и группа Q, принадлежат формации $l_{\infty}^{\omega}\text{form}(G/P) = f(p)$. По лемме 2.5 существует точный неприводимый $\mathrm{F}_p Q$-модуль K, где F_p – поле из p элементов. Положим $M = [K]Q$. Тогда $F_p(M) = O_p(M) = K$. Поскольку $M/F_p(M) \cong K \in f(p)$, то по лемме 2.6 группа M принадлежит F. Ввиду того, что $M \notin \mathsf{X}$, имеем $\mathsf{F} = l_{\infty}^{\omega}\text{form}M$. Но тогда формация F разрешима. Получили противоречие. Следовательно, $G/P \in \mathsf{N}_p$ и группа G удовлетворяет условию 3) теоремы.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\mathsf{F} = l_{\infty}^{\omega}\text{form}G$, где G – группа из условия теоремы. Покажем, что формация F является $\mathsf{X}_{\infty}^{\omega}$-критической. Пусть $\pi = \varnothing$, т.е. P является ω'-группой. Тогда по лемме 3.2 формация F имеет единственную максимальную l_∞^ω-подформацию $l_\infty^\omega \mathrm{form}(G/P)$. Поскольку по условию теоремы $P = G^{\mathfrak{X}}$, то $l_\infty^\omega \mathrm{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}_\infty^\omega$-критической формацией.

Пусть теперь $\pi \neq \varnothing$ и для группы G выполняется условие 1), т.е. $G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ и (1) – единственная максимальная l_∞^ω-подформация формации $\mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{X}$ – насыщенная формация, то $\mathfrak{X} \neq \varnothing$ и $(1) \subseteq \mathfrak{X}$. Поэтому $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}_\infty^\omega$-критической формацией.

Пусть для группы G выполняется условие 2), т.е. $G = [P]Q$ – группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$, где $P = G^{\mathfrak{X}} = C_G(P)$ – абелева p-группа, $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $|Q| = q$ – простое число. Тогда $\mathfrak{F} = l_\infty^\omega \mathrm{form} G$ – ненильпотентная l_∞^ω-формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольная собственная l_∞^ω-формация из $\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Предположим, что $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{X}$ не пусто и A – группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{X}$. Тогда A – монолитическая группа с цоколем R и $A/R \in \mathfrak{X}$. Поскольку группа A разрешима и $\mathfrak{X}$ – насыщенная формация, то $R \not\subset \Phi(A)$, $R = O_r(A) = F_r(A)$ – абелева r-группа. Если теперь $r \neq p$, то $r = q$. Поскольку при этом $A \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{X}$, то $A \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Поэтому $r = p$ и $A/R \in \mathfrak{N}_q$. Если $A/R = 1$, то A является p-группой и, в силу условия теоремы, принадлежит $\mathfrak{X}$. Противоречие. Поэтому A/R неединичная q-группа. Но тогда, если $\mathfrak{L} = l_\infty^\omega \mathrm{form} A$, то по лемме 2.3 имеем $l(p) = l_\infty^\omega \mathrm{form}(A/F_p(A)) = l_\infty^\omega \mathrm{form}(A/R) \subseteq \mathfrak{N}_q$, где l – минимальный ω-локальный l_∞^ω-значный спутник формации $\mathfrak{L}$. Поскольку $G/O_p(G) \cong Q \in l(p)$, то в силу леммы 2.6 имеем $G \in \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$, что влечет $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Поэтому $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{X}_\infty^\omega$-критическая формация.

Пусть, наконец, для группы G выполняется условие 3), т.е. P – неабелева pd-группа, $G/P \in \mathfrak{N}_p$, где $p \in \omega$, причем $\pi(G) \cap \omega = \{p\}$. Ясно, что $\mathfrak{F} \not\subset \mathfrak{X}$. Ввиду леммы 3.1 формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную l_∞^ω-подформацию $l_\infty^\omega \mathrm{form}(G/P)$. Поскольку по условию теоремы $P = G^{\mathfrak{X}}$, то $l_\infty^\omega \mathrm{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}_\infty^\omega$-критической формацией. Теорема доказана.

Пусть $\omega = \{p\}$. Тогда из теоремы 3.3 получаем

Следствие 3.3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально p-насыщенная формация, $\mathfrak{X}$ – некоторая нильпотентная насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{X}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}_\infty^p$-критической формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\infty^p \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{X}}$, что либо $p \notin \pi(P)$, либо $p \in \pi(P)$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = P$ – группа простого порядка $p \notin \pi(\mathfrak{X})$;

2) $G = [P]Q$ – группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$, где $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $|Q| = q$ – простое число;

3) P – неабелева pd-группа и $G/P \in \mathfrak{N}_p$.

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, из теоремы 3.3 вытекает

Следствие 3.3.2 [7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ненильпотентная тотально ω-насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{N}_\infty^\omega$-критической формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\infty^\omega \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [P]Q$ – группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$, где $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, $p \in \omega$ и $|Q| = q$ – простое число;

2) P – неабелева pd-группа, $G/P \in \mathfrak{N}_p$, где $p \in \omega$, причем $\pi(G) \cap \omega = \{p\}$.

Если же $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, а $\omega = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, из теоремы 3.3 получаем

Следствие 3.3.3 [5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ненильпотентная тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной тотально насыщенной ненильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, где G – некоторая группа Шмидта.*

В случае когда $\mathfrak{X} = (1)$ – формация всех единичных групп, из теоремы 3.3 вытекает

Следствие 3.3.4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– некоторая тотально* ω*-насыщенная формация. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является атомом решетки* l_∞^ω *всех тотально* ω*-насыщенных формаций, когда* $\mathfrak{F} = l_\infty^\omega \mathrm{form} G$*, где* G *– либо группа простого порядка, либо простая неабелева* ω'*-группа.*

Если $\mathfrak{X} = (1)$ и $\omega = \{p\}$, то из теоремы 3.3 получаем

Следствие 3.3.5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– некоторая тотально* p*-насыщенная формация. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является атомом решетки* l_∞^p *всех тотально* p*-насыщенных формаций, когда* $\mathfrak{F} = l_\infty^p \mathrm{form} G$*, где* G *– либо группа простого порядка, либо простая неабелева* p'*-группа.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Скиба, А.Н. Кратно w-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 1. – С. 114–147.
2. Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Тр. VI Всесоюзн. симпозиума по теории групп. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 37–50.
3. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
4. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
5. Сафонов, В.Г. О минимальных τ-замкнутых тотально насыщенных не $\mathfrak{H}$-формациях / В.Г. Сафонов // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2008. – № 9. – С. 22–30.
6. Сафонов, В.Г. О тотально ω-насыщенных формациях конечных групп / В.Г. Сафонов. – Гомель, 2004. – 18 с. – (Препринт / Гомельск. гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 7).
7. Сафонов, В.Г. О минимальных тотально ω-насыщенных ненильпотентных формациях / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Международная алгебраическая конференция, посвященная 80-летию А.И. Кострикина: тез. докл., Нальчик, 12–18 июля 2009 г. – С. 53.

R E F E R E N C E S

1. Skiba A.N., Shemetkov L.A. *Matem. trudy* [Mathematical Works], 1999, 2(1), pp. 114–147.
2. Shemetkov L.A. *Tr. VI Vsesoyuzn. Simpoziuma po teorii grupp* [Works of VI Symposium on Theory of Groups], Kiev: Naukova dumka, 1980, pp. 37–50.
3. Shemetkov L.A., Skiba A.N. *Formatsii algebraicheskikh sistem* [Formations of Algebraic System], M.: Nauka, 1989, 256 p.
4. Skiba A.N. *Algebra formatsii* [Algebra of Formations], Minsk, Belaruskaya navuka, 1997, 240 p.
5. Safonov V.G. *Vestnik Polotskogo gos. univesiteta. Fundamentalniye nauki* [Newsletter of Polotsk State University. Fundamental Sciences], 2008, 9, pp. 22–30.
6. Safonov V.G. *O totalno ω-nasyshchennikh formatsiyakh konechnikh grupp* [On Totally ω-saturated Formations of Finite Groups], Gomel, Gomel State University, 2004, 18 p.
7. Safonov V.G., Safonova I.N. *Mezhdunarodnaya algebraicheskaya konferentsiya. Tez. dokl. Nalchik, 12–18 iyulia 2009* [International Algebraic Conference. Report Summary. Nalchik, July 12–18, 2009], p. 53.

Поступила в редакцию 05.11.2014

Адрес для корреспонденции: e-mail: vgsafonov@tut.by – Сафонов В.Г.