Матэматыка

УДК 512.542

О классификации разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов

С.Ф. Каморников

Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет “Международный институт трудовых и социальных отношений”», Гомельский филиал

В работе изучаются свойства решетки RT(**S**) *всех разрешимых регулярных подгрупповых функторов. Здесь, в частности, доказывается, что эта решетка является решеткой с дополнениями, но не является модулярной. Вводится понятие θ-субнормального подгруппового функтора. Доказывается, что множество* SUB(**S**) *всех θ-субнормальных подгрупповых функторов образует подрешетку и идеал решетки* RT(**S**). *Исследуется связь решеток* RT(**S**) *и* SUB(**S**). *В частности, доказывается существование такой конгруэнции* Ψ, *определенной на решетке* RT(**S**), *что решетки* RT(**S**)/Ψ *и* SUB(**S**) *изоморфны.*

Ключевые слова: *конечная разрешимая группа, подгрупповой функтор, регулярный транзитивный подгрупповой функтор, решетка, решетка с дополнениями, изоморфизм решеток.*

On Classification of Solvable Regular Transitive Subgroup Functors

S.F. Kamornikov

Gomel Branch Higher Educational Establishment of the Federation of Trade Unions of Belarus «International University “MITSO”»

In the article the properties of lattice RT(**S**) *of all regular transitive subgroup functors are investigated. It is proved here, in particular, that this lattice is complemented lattice, but lattice* RT(**S**) *is not one-complemented lattice. We introduce the notion of θ-subnormal subgroup functor. In the article it is proved that the set* SUB(**S**) *of all θ-subnormal subgroup functors is a sublattice and an ideal of lattice* RT(**S**). *The connection of lattices* RT(**S**) *and* SUB(**S**) *is investigated. The existence of a congruence* Ψ *defined on* RT(**S**) *such that lattices* RT(**S**)/Ψ *and* SUB(**S**) *are isomorphic, in particular, is proved.*

Key words: *finite solvable group, subgroup functor, regular transitive subgroup functor, lattice, complemented lattice, isomorphism of lattices.*

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы и разрешимые подгрупповые функторы, т.е. функторы, определенные на классе **S** всех разрешимых конечных групп. Используемые определения и обозначения теории конечных групп и подгрупповых функторов стандартны, их можно найти в [1–2]. Что касается терминологии теории решеток, то мы отсылаем читателей к [3].

Центральное место в работе занимает понятие разрешимого подгруппового функтора, которое введено А.Н. Скибой в монографии [4]. Отображение θ, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathbf{S}$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется *разрешимым подгрупповым функтором*, если для любого изоморфизма φ группы G выполняется равенство $(\theta(G))^{\varphi} = \theta(G^{\varphi})$.

Подгрупповой функтор θ называется *регулярным*, если для любого эпиморфизма φ: $A \to B$ имеют место включения $(\theta(A))^{\varphi} \subseteq \theta(B)$, $(\theta(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \theta(A)$ и, кроме того, $G \in \theta(G)$ для любой группы G. Регулярность подгруппового функтора θ означает, что для любой нормальной подгруппы N группы G всегда выполняются следующие условия:

1) из $H \in \theta(G)$ следует $HN/N \in \theta(G/N)$;

2) из $H/N \in \theta(G/N)$ следует $H \in \theta(G)$.

Если же из $K \in \theta(H)$ и $H \in \theta(G)$ всегда следует $K \in \theta(G)$, то подгрупповой функтор θ называется *транзитивным*.

Идея регулярного транзитивного подгруппового функтора ярко проявилась в приложениях. Например, в теории формаций при изучении решеточных свойств подгрупп она связана с $\boldsymbol{F}$-субнормальными (Картер, Хоукс [5], Л.А. Шеметков [6]) и $\boldsymbol{F}$-достижимыми (Кегель [7]) подгруппами, естественно обобщающими понятие субнормальной подгруппы. Простая проверка (см. [2]) показывает, что для любой непустой формации $\boldsymbol{F}$ каждый $\boldsymbol{F}$-субнормальный и каждый $\boldsymbol{F}$-достижимый подгрупповой функторы являются регулярными и транзитивными. В теории классов (см. [1]) эффективно используются и другие типы регулярных транзитивных подгрупповых функторов (например, $\boldsymbol{F}$-субабнормальные функторы и функторы, которые выделяют в группе все ее подгруппы, содержащие $\boldsymbol{F}$-проекторы).

Как самостоятельные объекты исследования регулярные транзитивные подгрупповые функторы стали рассматриваться в связи с проблемой их классификации, предложенной А.Н. Скибой:

Можно ли классифицировать все регулярные транзитивные подгрупповые функторы ([4], вопрос 1.2.12)?

Как показывает практика, данная проблема является достаточно трудной и далекой от окончательного решения. В то же время в разрешимом случае некоторые направления ее исследования получили сегодня существенное развитие. Одно из таких направлений связано с исследованием свойств решетки всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов.

Решетка RT(**S**). Обозначим через RT(**S**) множество всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов и введем на этом множестве частичный порядок $\leq$, полагая, что отношение $\theta_1 \leq \theta_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой группы G справедливо включение $\theta_1(G) \subseteq \theta_2(G)$.

Для совокупности $\{\theta_i \mid i \in I\}$ из RT(**S**) определим пересечение $\theta = \bigcap_{i \in I} \theta_i$ следующим образом: $\theta(G) = \bigcap_{i \in I} \theta_i(G)$ для любой разрешимой группы G. Простая проверка показывает, что θ – регулярный транзитивный подгрупповой функтор. Этот функтор является точной нижней гранью множества $\{\theta_i | i \in I\}$ в RT(**S**). Таким образом, RT(**S**) – полная решетка, единицей которой является подгрупповой функтор 1_S, выделяющий в каждой группе все ее подгруппы, а нулем – тривиальный подгрупповой функтор 0_S, выделяющий в каждой группе G только саму группу G.

Идеал SUB(**S**). Пусть θ – подгрупповой функтор. Подгруппа H группы G называется:

1) *θ-субнормальной,* если либо $H=G$, либо существует такая максимальная цепь

$H=H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$,

что $H_{i-1} \in \theta(H_i)$ для всех $i=1,2,\ldots,n$;

2) *θ-субабнормальной*, если либо $H=G$, либо существует такая максимальная цепь

$H=M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = G$,

что $M_{i-1} \notin \theta(M_i)$ для всех $i=1,2,\ldots,n$.

Если θ – подгрупповой функтор, то множество всех θ-субнормальных подгрупп группы G будем обозначать $\mathrm{sub}_\theta(G)$, а множество всех ее θ-субабнормальных подгрупп – $\mathrm{subab}_\theta(G)$.

Лемма 1. *Если θ – подгрупповой функтор, то:*

1) функция sub_θ: $G \to \mathrm{sub}_\theta(G)$ *является подгрупповым функтором;*

2) функция subab_θ: $G \to \mathrm{subab}_\theta(G)$ *является подгрупповым функтором.*

Далее для подгруппового функтора θ функтор sub_θ: $G \to \mathrm{sub}_\theta(G)$ будем обозначать sub_θ, а функтор subab_θ: $G \to \mathrm{subab}_\theta(G)$ – subab_θ.

Лемма 2. *Если θ – регулярный подгрупповой функтор, то θ-субабнормальный подгрупповой функтор* subab_θ *также является регулярным.*

Лемма 3. *Пусть θ – регулярный подгрупповой функтор. Тогда θ-субнормальный подгрупповой функтор* sub_θ *также является регулярным.*

Лемма 4. *Для любого подгруппового функтора θ подгрупповые функторы* sub_θ *и* subab_θ *являются транзитивными.*

Напомним, что непустое подмножество I решетки L называется *идеалом*, если из $x,y \in I$ и $z \leq x$ всегда следует, что $\sup\{x,y\} \in I$ и $z \in I$.

Теорема 1. *Множество* $\mathrm{SUB}(\mathbf{S}) = \{\mathrm{sub}_\theta \mid \theta \in \mathrm{RT}(\mathbf{S})\}$ *является подрешеткой и идеалом решетки* RT(**S**).

Свойства решетки RT(**S**). Элемент θ решетки RT(**S**) называется *дополняемым*, если в RT(**S**) найдется элемент τ такой, что $\sup\{\theta,\tau\}=1_S$ и $\inf\{\theta,\tau\}=0_S$. Очевидно, элементы 0_S и 1_S решетки RT(**S**) являются дополняемыми.

Лемма 5. *Пусть $\theta \in$* RT(**S**). *Тогда и только тогда θ-подгруппа H группы G является θ-субабнормальной в G, когда $H=G$.*

Теорема 2. *Решетка* RT(**S**) *является решеткой с дополнениями.*

Элементы x и y решетки L с дополнениями называются перспективными, если они имеют общее дополнение, т.е.

$\sup\{x,z\} = \sup\{y,z\} = 1_S$, $\inf\{x,z\} = \inf\{y,z\} = 0_S$

для некоторого элемента $z \in L$. Элемент z называется в этом случае осью перспективы.

Теорема 3. *Для любого разрешимого регулярного транзитивного подгруппового функтора θ элементы θ и* sub_θ *решетки* RT(**S**) *перспективны* *в* RT(**S**). *При этом осью перспективы является подгрупповой функтор* subab_θ.

Следующий пример показывает, что RT(**S**) не является решеткой с единственными дополнениями.

П р и м е р. Следуя Манну [8], подгруппу H группы G будем называть *X-нормальной*, если либо $H=G$, либо для любого эпиморфизма φ группы G такого, что $H^\varphi \neq G^\varphi$, в G^φ найдется собственная нормальная подгруппа, содержащая H^φ. Пусть θ – отображение, которое ставит в соответствие каждой группе G множество всех ее X-нормальных подгрупп. Как отмечено в [8], θ является регулярным транзитивным подгрупповым функтором. Этот функтор будем называть *X-нормальным.*

Отметим, что максимальная подгруппа разрешимой группы G является X-нормальной в G тогда и только тогда, когда она субнормальна в G. Это означает, что если θ – X-нормальный подгрупповой функтор, то $\mathrm{sn}(G) = \mathrm{sub}_\theta(G)$. Простые примеры показывают, что функторы θ и sub_θ различны (например, в знакопеременной группе S_4 любая силовская 3-подгруппа X-нормальна, но не субнормальна). По теореме 3 подгрупповые функторы θ и sn перспективны в решетке RT(**S**) и subab_θ – ось перспективы. Так как $\theta \neq \mathrm{sub}_\theta$, то функтор subab_θ имеет в RT(**S**) два дополнения θ и $\mathrm{sn} = \mathrm{sub}_\theta$.

Если θ – X-нормальный подгрупповой функтор и sn – субнормальный подгрупповой функтор, то подрешетка $\{0_\mathbf{S}, \mathrm{sn}, \theta, \mathrm{subab}_\theta, 1_\mathbf{S}\}$ решетки RT(**S**) является пентагоном. Отсюда вытекает следующее важное свойство решетки RT(**S**).

Следствие 1. *Решетка* RT(**S**) *не является модулярной.*

Свойства идеала SUB(**S**). В дальнейшем через $\boldsymbol{P}$ будем обозначать класс всех примитивных групп. Напомним, что группа называется *примитивной*, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром. Эта максимальная подгруппа называется *примитиватором* группы.

В [9] показано, что если G – разрешимая примитивная группа и M – ее примитиватор, то G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N, которая дополняется подгруппой M. Кроме того, любой примитиватор группы G сопряжен с подгруппой M.

Пусть $\boldsymbol{X}$ – некоторый (в том числе и пустой) подкласс класса $\boldsymbol{P}$. Следуя [10], такой подкласс будем называть *примитивным классом*.

Обозначим через $Cl(\boldsymbol{P})$ множество всех подклассов класса $\boldsymbol{P}$. На этом множестве естественным образом введем отношение частичного порядка: $\boldsymbol{X}_1 \leq \boldsymbol{X}_2$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{X}_1 \subseteq \boldsymbol{X}_2$. При этом $Cl(\boldsymbol{P})$ является полной решеткой, в которой

$\sup\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\} = \boldsymbol{X}_1 \cup \boldsymbol{X}_2$, $\inf\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\} = \boldsymbol{X}_1 \cap \boldsymbol{X}_2$.

Минимальным элементом (нулем) этой решетки является пустой класс $\emptyset$. В качестве ее максимального элемента (единицы) выступает класс $\boldsymbol{P}$. Понятно, что решетка $Cl(\boldsymbol{P})$ является бесконечно дистрибутивной. Кроме того, любой элемент $\boldsymbol{X} \in Cl(\boldsymbol{P})$ обладает дополнением $\boldsymbol{P}\backslash\boldsymbol{X}$. Поэтому решетка $Cl(\boldsymbol{P})$ является булевой.

Если θ – ненулевой разрешимый регулярный транзитивный подгрупповой функтор, то через $\boldsymbol{P}(\theta)$ обозначим класс всех тех примитивных групп A, у которых примитиваторы принадлежат $\theta(A)$. Если θ – нулевой функтор, то полагаем $\boldsymbol{P}(\theta) = \emptyset$.

Следующая теорема устанавливает связь между решетками SUB(**S**) и $Cl(\boldsymbol{P})$.

Теорема 4. *Отображение* F: $\theta \to \boldsymbol{P}(\theta)$, *сопоставляющее каждому функтору* $\theta\in$ SUB(**S**) *примитивный класс* $\boldsymbol{P}(\theta)$, *является изоморфизмом решеток* SUB(**S**) *и* $Cl(\boldsymbol{P})$.

Следствие 2. *Решетка* SUB(**S**) *является булевой.*

Следствие 3. *Решетка* SUB(**S**) *является атомной и коатомной.*

Следствие 4. *Подгрупповой функтор θ является атомом решетки* SUB(**S**) *тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{P}(\theta) = (G)$ для некоторой примитивной группы G.*

Следствие 5. *Подгрупповой функтор θ является коатомом решетки* SUB(**S**) *тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{P}(\theta) = \boldsymbol{P}\backslash(G)$ для некоторой примитивной группы G.*

6. Связь решеток RT(**S**) **и** SUB(**S**). Простая проверка показывает, что эквивалентность

$\Psi = \{(\theta,\tau) |\ \theta,\tau\in \mathrm{RT}(\mathbf{S}),\ \mathrm{sub}_\theta = \mathrm{sub}_\tau\}$,

определенная на решетке RT(**S**), является конгруэнцией. Поэтому множество RT(**S**) всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов разбивается на смежные классы конгруэнции Ψ. Для подгруппового функтора θ смежный класс конгруэнции Ψ имеет вид

$\Psi(\theta)=\{\alpha | (\alpha,\theta)\in \Psi\}$.

Легко проверить, что подгрупповые функторы θ, $\tau\in$ RT(**S**) попадают в один смежный класс тогда и только тогда, когда они перспективны. Отметим еще, что каждый смежный класс является выпуклой подрешеткой решетки RT(**S**). Следующая теорема устанавливает связь между решетками RT(**S**) и SUB(**S**).

Теорема 5. *Отображение, ставящее в соответствие каждому разрешимому регулярному транзитивному подгрупповому функтору θ ин-*

дуцированный им θ-субнормальный подгрупповой функтор sub_θ, *является эндоморфизмом решетки* $\mathrm{RT}(\mathbf{S})$ *на подрешетку* $\mathrm{SUB}(\mathbf{S})$.

Следствие 6. *Факторрешетка решетки* $\mathrm{RT}(\mathbf{S})$ *по конгруэнции* Ψ *изоморфна подрешетке* $\mathrm{SUB}(\mathbf{S})$.

Следствие 7. *Факторрешетка решетки* $\mathrm{RT}(\mathbf{S})$ *по конгруэнции* Ψ *является булевой.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992.
2. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003.
3. Артамонов, В.А. Общая алгебра / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков, Л.Н. Шеврин, Е.Г. Шульгейфер. – М.: Наука, 1991. – Т. 2.
4. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997.
5. Carter, R. The ***F***-normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.
6. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Мат. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.
7. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, № 3. – S. 225–228.
8. Mann, A. On subgroups of finite soluble groups, III / A. Mann // Israel J. Math. – 1973. – Vol. 16, № 4. – P. 446–451.
9. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
10. Каморников, С.Ф. Обобщенные подгруппы Фраттини как корадикалы групп / С.Ф. Каморников // Мат. заметки. – 2010. – Т. 87, № 3. – С. 402–411.

REFERENCES

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin–N.Y.: Walter de Gruyter, 1992.
2. Kamornikov S.F., Selkin M.V. *Podgruppoviye funktori i klassi konechnikh grupp* [Sugroup Functors and Classes of Finite Groups], Mn.: Belaruskaya navuka, 2003.
3. Aratamonov V.A., Salii V.N., Skorniakov L.A., Shevrin L.N., Shulgeifer E.G. *Obshchaya algebra* [General Algebra], Vol. 2. M.: Nauka, 1991.
4. Skiba A.N. *Algebra formatsii* [Algebra of Formations], Mn.: Belaruskaya navuka, 1997.
5. Carter R., Hawkes T. The ***F***-normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. Vol. 5, 2. P. 175–202.
6. Shemetkov L.A. *Mat. Sb.* [Math. Coll.], 1974, 94(4), pp. 628–648.
7. Kegel O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Bd. 30, № 3. S. 225–228.
8. Mann A. On subgroups of finite soluble groups, III // Israel J. Math. 1973. Vol. 16, № 4. P. 446–451.
9. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 115–187.
10. Kamornikov S.F. *Mat. zametki* [Math. Zametki], 2010, Vol. 87(3), pp. 402–411.

Поступила в редакцию 05.09.2014

Адрес для корреспонденции: e-mail: sfkamornikov@mail.ru – Каморников С.Ф.