УДК 512.547

Унипотентность образа представления F_2 в $GL(n,\mathbb{C})$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы с клетками Жордана малой размерности (II)

О.И. Тавгень*, Ян Синьсун, Лю Сщуньянь****
** Белорусский государственный университет*
*** Харбинский научно-технический университет (КНР)*

Установлена унипотентность представления $F_2(x, y)$ в $GL(n,\mathbb{C})$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы клеток Жордана малой размерности (II).

Доказано, что образ представления свободной группы F_2 (x, y) в $GL(n,\mathbb{C})$ является унипотентной подгруппой при условии $(\rho(p-E)^4=0$ для любого примитивного элемента p и $(\rho(p-E)^2=0$ для какого-то примитивного элемента q.

Ключевые слова: *группа, примитивный элемент, унипотентная подгруппа.*

An image unipotency of a representation of in by mapping of primitive elements into unipotent small Jordan matrices (II)

Aleh Tavhen*, Yang Xinsong, Liu Chunyan****
**Belarusian State University*
***Scientific and Technical University of Harbin*

Let ρ: $F_2(x, y)$ в $GL(n,\mathbb{C})$ be a matrix representation of F_2, where F_2 is a free group of rank two with generators x and y. If the image of any primitive element p from F_2 is an unipotent small Jordan matrix $(\rho(p-E)^4=0$, then $\rho(F_2)$ is a unipotent subgroup in $GL(n,\mathbb{C})$.

Keywords: *group, primitive element, unipotent subgroup.*

Пусть $F_2(x,y)$ – свободная группа с образующими x и y. Рассмотрим представление этой группы $\rho: F_2(x,y)\to GL(n,\mathbb{C})$, при этом образующие и все примитивные элементы группы F_2 переходят в унипотентные матрицы. Элемент свободной группы называется *примитивным*, если он может быть включен в некоторое множество свободных образующих этой группы [1]. Известным открытым вопросом является вопрос о том, будет ли при этих условиях унипотентным весь образ $\rho(F_2)$. В работах [2], [3] дан утвердительный ответ на этот вопрос для матриц порядков $n\le 5$. В работе [4] дан утвердительный ответ на этот вопрос для любого n при условии $(\rho(p)-E)^3=0$ для любого примитивного элемента p. В настоящей работе мы даем утвердительный ответ на этот вопрос для любого n при условии $(\rho(p)-E)^4=0$ для любого примитивного элемента p и соотношения $(\rho(q)-E)^2=0$ для какого-то примитивного элемента q.

Теорема 1. *Образ $F_2(x,y)$ относительно представления $\rho: F_2(x,y)\to GL(n,\mathbb{C})$ – унипотентная подгруппа в $GL(n,\mathbb{C})$ при условии $(\rho(p)-E)^4=0$ для любого примитивного элемента p и $(\rho(q)-E)^2=0$ для какого-то примитивного элемента q.*

Для доказательства теоремы 1 используются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* p *и* q *– два ассоциированных примитивных элемента группы* F_2. *Тогда все примитивные элементы, ассоциированные с* p, *имеют вид* $p^{\alpha}q^{\varepsilon}p^{\beta}$, *где* $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, $\varepsilon=\pm1$.

В дальнейшем обозначим $\rho(p)=A=H+E$, $\rho(q)=B=T+E$, где p и q – два ассоциированных примитивных элемента группы F_2, $H^2=T^4=0$, E – единичная матрица, $L(W)$ – длина слова W.

Лемма 2. *Если в слове* $W(H,B)$ *не менее четырех элементов H, то* $W(H,B)=0$.

Доказательство. Поскольку $B^4=4B^3-6B^2+4B-E$, то можно считать, что в слове $W(H,B)$ нет элементов B^4. Поскольку B^mA – унипотентные матрицы (см. лемму 1), то имеем $(B^mA-E)^4=0$. Отсюда

$$(A-E+mTA+\frac{m(m-1)}{2}T^2A+ +\frac{m(m-1)(m-2)}{6}T^3A)^4=0$$

Из этого получаем

$$(a_0+a_1m+a_2m^2+a_3m^3)^4=0,$$

где

$$\begin{aligned} &a_0=A-E=H,\\ &a_1=TA-\frac{1}{2}T^2A+\frac{1}{3}T^3A, \qquad (1)\\ &a_2=\frac{1}{2}T^2A-\frac{1}{2}T^3A,\quad a_3=\frac{1}{6}T^3A. \end{aligned}$$

Из $(a_0+a_1m+a_2m^2+a_3m^3)^4=0$ имеем $\sum_{k=0}^{12}G_km^k=0$ для любого m. Если взять $m=m_i$, $i=\overline{1,13}$, неравными, то $G_i=0$, $i=\overline{0,12}$. Так как по условию $a_0^2=H^2=0$, то мы получаем

$$\begin{aligned} &G_0=a_0^4=0,\\ &G_1=a_0^3a_1+a_0^2a_1a_0+a_0a_1a_0^2+a_1a_0^3=0,\\ &G_2=a_0a_1^2a_0+a_0a_1a_0a_1+a_1a_0a_1a_0=0 \qquad (2)\\ &\vdots\\ &G_{12}=a_3^4. \end{aligned}$$

Поскольку A^mB – унипотентные матрицы (см. лемму 1), то имеем $(A^mB-E)^4=0$. Отсюда $(B-E+mHB)^4=0$. Из этого получаем $\sum_{k=0}^{4}G'_km^k=0$ для любого m. Если взять $m=m_i$, $i=\overline{1,5}$, неравными, то $G'_i=0$, $i=\overline{0,4}$. Из $G'_1=G'_2=G'_3=G'_4=0$ получаем

$$B^3H+B^2HB+BHB^2+HB^3-4B^2H- -4HB^2-4BHB+6HB+6BH-4H=0, \qquad (3)$$

$$6(HB)^2-4[B(HB)^2+(HB)^2B+HB^2HB]+ +B^2(HB)^2+BHB^2HB+HB^3HB+ +(HB)^2B^2+HB^2HB^2+BHBHB^2=0, \qquad (4)$$

$$(HB)B(HB)^2+(HB)^3B+(HB)^2B(HB)+ +B(HB)^3-4(HB)^3=0, \qquad (5)$$

$$G'_4=(HB)^4=0 \qquad (6)$$

Если в слове $W(H,B)$ не менее четырех элементов H, тогда

$$W(H,B)=\cdots HB^{s_1}HB^{s_2}HB^{s_3}HB^{s_4}\cdots$$

Пусть $s=s_1+s_2+s_3+s_4$, тогда $W(H,B)=0$, если $s<5$ (потому что $H^2=0$ и $G'_4=(HB)^4=0$). Рассмотрим следующие случаи.

(I) $s=5$. Из $H^2=0$, $HG'_1=0$ получаем

$$HB^3H-4HB^2H-4HBHB+6HBH+ +HB^2HB+HBHB^2=0. \qquad (7)$$

Аналогично, для A, AB имеем

$$H(AB)^3H-4H(AB)^2H-4HABHAB+6HABH+ +H(AB)^2HAB+HABH(AB)^2=0.$$

Следовательно,

$$H(HB+B)^3H-4H(HB+B)^2H- -4H(HB+B)H(HB+B)+6H(HB+B)H+ +H(HB+B)^2H(HB+B)+H(HB+B)H(HB+B)^2=0.$$

Из этого равенства и (7) получаем

$$HB^2HBH+HBHB^2H- -4HBHBH+2(HB)^3=0. \qquad (8)$$

Из $HG'_1H=0$ получаем

$$HB^2HBH + HBHB^2H - 4HBHBH = 0. \quad (9)$$

Из (8), (9) получаем

$$HBHBH = 0, \quad (10)$$

$$HB^2HBH + HBHB^2H = 0. \quad (11)$$

Из (10), (11) и $G_3' = 0$ получаем $(HB)B(HB)^2 + +(HB)^2B(HB) = 0$. Умножив последнее равенство на HB справа, получаем

$$HBHB^2HBHB = 0. \quad (12)$$

Поэтому

$$HBHBHBHB^2 = HBHBHB^2HB = $$
$$= HBHB^2HBHB = HB^2HBHBHB = 0.$$

Случай (**I**) доказан.

(**II**) $s = 6$. Из $G_1' = 0$ получаем

$$T^3H + T^2HT + THT^2 + HT^3 = 0. \quad (13)$$

Умножив (13) на T, T^2 или T^3 справа, имеем

$$T^3HT + T^2HT^2 + THT^3 = 0, \quad (14)$$

$$T^3HT^2 + T^2HT^3 = 0, \quad (15)$$

$$T^3HT^3 = 0. \quad (16)$$

Так как $G_2a_0 = a_0a_1a_0a_1a_0 = 0$, то $H(6T - 3T^2 + 2T^3)H(6T - 3T^2 + 2T^3)H = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} &36HTHTH - 18HT^2HTH + 12HT^3HTH - \\ &-18HTHT^2H + 9HT^2HT^2H - \\ &-6HT^3HT^2H + 12HTHT^3H - \\ &-6HT^2HT^3H + 4HT^3HT^3H = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (10), (11), (13), (14), (15), (16), (17) получаем

$$HT^2HT^2H = 0. \quad (18)$$

Из (18), (10), (11) получаем

$$HB^2HB^2H = 0. \quad (19)$$

Из (19), (12) следует, что

$$HB^2HB^2HBHB = HBHB^2HB^2HB =$$
$$= HBHB^2HBHB^2 = 0.$$

Из равенств $G_2'(HB)^2 = 0$, $(HB)^4 = 0$, (10), (19) и того, что $W(H,B) = 0$, если $s \le 5$, получаем

$$HBHB^3HBHB = 0. \quad (20)$$

Аналогично, из $HB^2G_3 = 0$ получаем

$$HB^2HBHB^2HB = 0. \quad (21)$$

Поскольку $(HB)^3 = 0$, то

$$HBHBHBHB^3 = HBHBHB^3HB =$$
$$= HB^3HBHBHB = 0,$$
$$HBHBHB^2HB^2 = HB^2HBHBHB^2 = 0.$$

Случай (**II**) доказан.

(**III**) Пусть $s = 7$ или $s = 8$. Из $HG_1' = 0$ следует

$$\begin{aligned} HB^3H = 4HB^2H + 4HBHB - 6HBH - \\ - HB^2HB - HBHB^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Поэтому если в $HB^{r_1}HB^{r_2}HB^{r_3}HB^{r_4}$ есть B^3, то из (22) следует

$$HB^{r_1}HB^{r_2}HB^{r_3}HB^{r_4} = \sum a_iHB^{k_1}HB^{k_2}HB^{k_3}HB^3,$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le k_i < 3$ и $k_1 + k_2 + k_3 \le 5$. Но тогда

$$HB^{k_1}HB^{k_2}HB^{k_3}HB^3 = (HB^{k_1}HB^{k_2}HB^{k_3}HB)B^2 = 0$$

в силу пунктов (I) и (II), поскольку $k_1 + k_2 + k_3 + 1 \le 6$.

Поэтому можно считать, что в $W(H,B)$ нет B^3. Из (19), (21) следует, что

$$HB^2HB^2HB^2HB = HB^2HB^2HBHB^2 =$$
$$= HBHB^2HB^2HB^2 =$$
$$= HB^2HBHB^2HB^2 = HB^2HB^2HB^2HB^2 = 0.$$

Случай (**III**) доказан.

(**IV**) $s \ge 9$. Уже доказано, что

$$HB^{s_1}HB^{s_2}HB^{s_3}HB^{s_4} = \sum a_iHB^{r_{i1}}HB^{r_{i2}}HB^{r_{i3}}HB^3,$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le r_{ij} < 3$. Поэтому можем считать, что $s_i \le 2$, $i = 1,2,3$, $s_4 = 3$. Так как $s \ge 9$, тогда $s_i = 2$, $i = 1,2,3$, и

$$HB^2HB^2HB^2HB^3 = 0$$

в силу (19). Случай (**IV**) и лемма 2 доказаны.

Доказательство. Берем любое слово $W(H,B)$, в котором не менее одного элемента H. Тогда $(W(H,B))^4 = 0$ (см. лемму 2). Отсюда получаем $\operatorname{tr} W(H,B) = 0$. Берем любой элемент $W(A,B)$ в подгруппе $\rho(G_2)$. Тогда

$$W(A,B) = B^k + \sum a_i W_i(H,B),$$

где в $W_i(H,B)$ не менее одного H. Поэтому
$\operatorname{tr} W(A,B) = \operatorname{tr} B^k + a_i \sum \operatorname{tr} W_i(H,B) = n + 0 = n.$

Так как это равенство справедливо для любого элемента W, то $\operatorname{tr} W = \operatorname{tr} W^2 = \cdots = \operatorname{tr} W^n = n$. Отсюда следует, что $W(A,B)$ – унипотентная матрица. Следовательно, $\rho(G_2)$ – унипотентная подгруппа. Теорема доказана.

Авторы благодарны профессору В.В Беняш-Кривцу за помощь в проверке вычислений и написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Магнус, В. Комбинаторная теория групп: представление групп в терминах образующих и соотношений / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. – М.: Наука, 1974.
2. Самсонов Ю.Б., Тавгень О.И. // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 6. – С. 29–32.
3. Тавгень О.И., Синьсун Ян // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2009. – № 3. – С. 74–79.
4. Тавгень О.И., Синьсун Ян // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2010. – № 3. – С. 48–53.

Поступила в редакцию 7.10.2010
Адрес для корреспонденции: e-mail: 75142861@qq.com – Лю Сщуньянь