Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ:
элементы математической логики

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2014

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.122я73
В24

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 28.10.2014 г.

Составители: доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **М.И. Наумик;** старший преподаватель кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **А.П. Мехович**

Р е ц е н з е н т :
заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова,
доктор физико-математических наук, профессор *Н.Т. Воробьев*

В24 **Введение в математику: элементы математической логики :** методические рекомендации / сост. : М.И. Наумик, А.П. Мехович. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2014. – 38 с.

Методические рекомендации содержат материал первой части курса «Введение в математику» – начальные сведения из математической логики. Данный курс призван повысить общую культуру мышления студентов и тем самым подготовить их к сознательному и глубокому усвоению математических дисциплин общего и специального циклов. Данное учебное издание может служить основой для знакомства с предметом студентов-математиков.

Предназначено для студентов 1 курса математических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.122я73

Математику уже затем учить следует,
что она ум в порядок приводит
М.В. Ломоносов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данные методические рекомендации призваны повысить общую культуру мышления студентов первого курса математического факультета и тем самым подготовить их к сознательному усвоению дисциплин общего и специального циклов. Знакомство с языком математической логики и некоторыми ее методами поможет студентам приобрести навыки правильного рассуждения, отчетливых формулировок, краткой и корректной записи математических предложений. В этом смысле данный раздел является скорее «гуманитарным», нежели математическим, а его название «Элементы математической логики» – всего лишь дань традиции, согласно которой учебные, общеобразовательные курсы, излагающие азы, элементы какой-либо науки, именуются так же, как и сама наука.

В данном учебном издании содержится необходимый минимум теоретических сведений и набор упражнений и задач для активного усвоения материала, закрепления и повторения. В конце приводится параграф задач, который будет способствовать усвоению материала.

§ 1. Высказывания. Логические операции

Под *высказыванием* понимается повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Высказывания будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита. Примеры высказываний:

D: 5 – простое число;

E: $18 = 2\cdot 3^2$;

F: Земля – спутник Луны;

G: Функция $y = \cos x$ является четной;

H: если $\vec{a}$, $\vec{b}$ – различные векторы, то $\vec{a}-\vec{b} \neq \vec{b}-\vec{a}$.

Каждое высказывание кроме своего смыслового значения имеет и истинное значение, которое есть истина (сокращенно И) или ложь (сокращенно Л). Так в предыдущих примерах истинное значения высказываний D, E, G, H равны И, а истинное значение высказывания F равно Л. Высказывания D, E, F, G являются примерами простых высказываний, высказывание H – пример сложного высказывания. Сложные высказывания образуются из простых с помощью логических операций (связок). Определим следующие логические операции: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция.

Определение 1.1. *Отрицанием* высказывания A называется высказывание $\neg A$ (читается «не A»), которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно.

С помощью таблицы истинности это записывается так:

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

Вместо $\neg A$ часто пишут $\bar{A}$.

Определение 1.2. *Конъюнкцией* высказываний A и B называется высказывание $A \wedge B$ (читается «A и B»), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

С помощью таблицы истинности это записывается так:

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Определение 1.3. *Дизъюнкцией* высказываний A и B называется высказывание $A \vee B$ (читается «A или B»), которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

С помощью таблицы истинности это записывается так:

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Определение 1.4. *Импликацией* высказываний A и B называется высказывание $A \to B$ (читается «если A, то B»), которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно.

С помощью таблицы истинности это записывается так:

A	B	$A \to B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Вместо $A \to B$ часто пишут $A \Rightarrow B$. Высказывания в импликации $A \Rightarrow B$ имеют специальные названия: A называется *посылкой* или *условием*, а B называется *следствием* или *заключением*.

Определение 1.5. *Эквиваленцией* высказываний A и B называется высказывание $A \leftrightarrow B$ (читается «A тогда и только тогда, когда B»), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B одновременно истинны или ложны.

С помощью таблицы истинности это записывается так:

A	B	$A \leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Вместо $A \leftrightarrow B$ часто пишут $A \Leftrightarrow B$.

Пример 1.6. Пусть буквы D, E, F, G, H имеют тот же смысл, что и выше. Тогда:

- высказывание $(\urcorner D) \vee G$ является истинным, так как истинно высказывание G;

- высказывание $E\wedge(\neg G)\leftrightarrow F$ истинно, так как высказывание $E\wedge(\neg G)$ и F одновременно ложны;
- высказывание $D\rightarrow\neg G$ ложно, так как D истинно, а высказывание $\neg G$ ложно.
- подчеркнем, что логические операции определяются над любым высказыванием и поэтому истинными могут оказаться совершенно невероятные по своему смысловому значению высказывания, например: $F\rightarrow E$: если Земля – спутник Луны, то $18 = 2\cdot 3^2$.

Логические операции над высказываниями обладают рядом общих свойств. Применение этих свойств позволяет, с одной стороны, сводить анализ сложных высказываний к анализу более простых высказываний, а с другой стороны – преобразовать длинные цепочки высказываний в более короткие. Очевидно, что главным критерием верности выполненных преобразований является совпадение истинных значений первоначального и полученного высказываний для каждого шага преобразований. Изучение свойств логических операций естественно проводить не на конкретных высказываниях, а на особых выражениях, содержащих переменные, принимающие значения И и Л (также переменные будем называть пропозиционными переменными), знаки логических операций и круглые скобки для указания порядка выполнения действий. Пропозиционные переменные будем обозначать малыми буквами латинского алфавита, и называть их просто переменными. Сформулируем определение *формулы логики высказываний.*

Определение 1.7. 1) Пропозиционные переменные, буквы И, Л являются формулами логики высказываний;

2) если A, B – формулы логики высказываний, то формулами логики высказываний являются также выражения: $(\neg A)$, $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$;

3) выражение является формулой логики высказываний тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет первому и второму пункту данного определения.

Примеры формул логики высказываний: $(\neg(A\wedge(B\rightarrow C)))$, $((A\wedge\neg(B\rightarrow C)))$, $((A\rightarrow B)\leftrightarrow((\neg A)\vee C))$.

Следующие выражения не являются формулами логики высказываний: $(\neg A)\neg B$, $(\neg\rightarrow B)$, $(\vee A\vee B)$, $(A\neg\rightarrow B)$.

Из определения 1.7 следует, что формулы логики высказываний имеют внешнее сходство с буквенными выражениями элементарной алгебры. Они содержат конечное число переменных, то есть элементарных формул, левых и правых скобок, знаков, логических операций и букв И и Л. В дальнейшем там, где не возникает двусмыслия, для сокращения речи мы вместо слов «формула логики высказываний» будем говорить просто «формула». Как правило, формула логики высказываний, содержащая пять или более знаков логических операций, – это громоздкое и трудночитаемое выражение. Можно упростить формулу за счет уменьшения числа сковок в ней, приняв следующие соглашения:

1) внешние скобки в формуле можно опустить;

2) внутренние скобки в формуле можно опустить с учетом следующего порядка выполнения действий: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция.

Пример такого упрощения: формулу $(A\leftrightarrow(B\to(C\vee(D\wedge(\urcorner E)))))$ можно записать более коротко: $A\leftrightarrow B\to C\vee D\wedge\urcorner E$. Очевидно, что совсем без скобок обойтись нельзя. Действительно, в формулах $A\wedge(B\vee C)$ и $A\wedge B\vee C$ различные порядки выполнения действий.

Подставляя в формулу вместо переменных их значения и выполняя указанные в ней действия, находим истинное значение формулы. Зависимость истинных значений формулы от значений входящих в нее переменных иллюстрируют *истинностные таблицы.*

Существуют формулы, истинные значения которых не зависят от входящих в них переменных. Такие формулы имеют специальные названия.

Определение 1.8. Формула логики высказываний называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*), если при любых значениях входящих в нее переменных ее истинное значение равно истине (лжи).

Тождественно истинные формулы называют также *тавтологиями*, а тождественно ложные – *противоречиями*. Примерами тождественно истинных формул являются формулы $P\vee\bar{P}$, $p\wedge(p\to q)\to q$, $p\to p\wedge q$, а примерами тождественно ложных – $P\vee\urcorner P$, $(p\wedge(\urcorner p\vee q))\wedge\urcorner q$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно составить для каждой из формул таблицу истинности. Покажем, как это делается на примере формулы $p\wedge(p\to q)\to q$. Переменными в этой формуле являются буквы p и q. Порядок выполнения действий такой: импликация (в скобках), конъюнкция, импликация. В соответствии с этим выделяем части, из которых состоит формула: $p\to q$, $p\wedge(p\to q)$ и составляем таблицу:

p	q	$p\to q$	$p\wedge(p\to q)$	$p\wedge(p\to q)\to q$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И
Л	Л	И	Л	И

Существуют формулы, которые не являются ни тождественно истинными, ни тождественно ложными. Такие формулы принимают истинные значения И и Л и называются *выполнимыми*. Примеры таких формул: p, $p\vee\neg q$, $p\to\neg q$.

Определение 1.9. Две формулы логики высказываний A и B называются *равносильными*, если при любом наборе значений переменных, входящих в эти формулы, истинное значение формул A и B равны.

Тот факт, что формулы A и B равносильны будем записывать так: $A\equiv B$.

Понятия равносильности и эквиваленции тесно связаны между собой. Эта связь отражена в следующей

Теорема 1.10. *Формулы логики высказываний A и B равносильны тогда и только тогда, когда формула $A\leftrightarrow B$ является тождественно истинной.*

Доказательство. Пусть формулы A и B зависят от переменных p_1, p_2, …, p_n. Предположим сначала, что формулы A и B равносильны, и докажем, что $A\leftrightarrow B$ – тождественно истинная формула. Возьмем й.

Пусть теперь $A\leftrightarrow B$ – тождественно истинная формула. Докажем, что A и B равносильные формулы. При произвольном наборе значений переменных p_1, p_2, …, p_n, входящих в формулу $A\leftrightarrow B$, истинное значение формулы $A\leftrightarrow B$ равно И. Согласно определению эквиваленции это означает, что формулы A и B принимают одинаковые истинные значения, то есть являются равносильными. Теорема доказана.

Теорема 1.11. *Пусть формулы A и B зависят от переменных p_1, p_2, …, p_n. Предположим, что формулы A' и B' получены из формул A и B соответственно подстановкой произвольных A_1, A_2, ..., A_n вместо переменных p_1, p_2, …, p_n. Тогда, если $A\equiv B$, то $A'\equiv B'$.*

Доказательство. Пусть формулы A_1, A_2, ..., A_n зависят от переменных q_1, q_2, …, q_m. Тогда ясно, что формула $A'\leftrightarrow B'$, полученная из $A\leftrightarrow B$ заменой переменных p_1, p_2, …, p_n формулами A_1, A_2, ..., A_n соответственно, зависит от переменных q_1, q_2, …, q_m. Докажем, что формула $A'\leftrightarrow B'$ является тождественно истинной. Для этого возьмем произвольный набор значений переменных q_1, q_2, …, q_m. При этом наборе формулы A_1, A_2, ..., A_n примут какие-то истинные значения. Обозначим их буквами a_1, a_2, …, a_n соответственно. Теперь придадим переменным p_1, p_2, …, p_n истинные значения a_1, a_2, …, a_n соответственно. При этом формулы $A\leftrightarrow B$ и $A'\leftrightarrow B'$ будут иметь одинаковые истинные значения. Поскольку $A\equiv B$, то согласно теореме 1.10 $A\leftrightarrow B$ – тождественно истинная формула. Следовательно, формула $A'\leftrightarrow B'$ принимает значения И при любом наборе значений переменных q_1, q_2, …, q_m, то есть является тождественно истинной. Применяя теорему 1.10 теперь уже к формуле $A'\leftrightarrow B'$ заключаем, что $A'\equiv B'$. Теорема доказана.

Теорема 1.12. (*Законы логики высказываний*). *Пусть A, B, C – произвольные формулы логики высказываний. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $A\wedge A \equiv A$ – ***свойство идемпотентности конъюнкции;***
2. $A\vee A \equiv A$ – ***свойство идемпотентности дизъюнкции;***
3. $A\wedge B \equiv B\wedge A$ – ***свойство коммутативности конъюнкции;***
4. $A\vee B \equiv B\vee A$ – ***свойство коммутативности дизъюнкции;***
5. $A\wedge(B\wedge C) \equiv (A\wedge B)\wedge C$ – ***свойство ассоциативности конъюнкции;***
6. $A\vee(B\vee C) \equiv (A\vee B)\vee C$ – ***свойство ассоциативности дизъюнкции;***
7. $A\wedge(B\vee C) \equiv (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ – ***свойство дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции;***
8. $A\vee(B\wedge C) \equiv (A\vee B)\wedge(A\vee C)$ – ***свойство дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции;***
9. $\neg(A\wedge B) \equiv \neg A\vee\neg B$ – ***первое свойство де Моргана;***
10. $\neg(A\vee B) \equiv \neg A\wedge\neg B$ – ***второе свойство де Моргана;***
11. $A\wedge(A\vee B) \equiv A$ – ***свойство поглощения дизъюнкции;***
12. $A\vee(A\wedge B) \equiv A$ – ***свойство поглощения конъюнкции;***
13. $\neg(\neg A) \equiv A$ – ***свойство двойного отрицания;***
14. $A\to B \equiv \neg B\to\neg A$ – ***свойство контрапозиций;***
15. $\neg(A\to B) \equiv A\wedge\neg B$ – ***свойство отрицания импликации;***
16. $A\wedge\neg A \equiv$ Л – ***свойство противоречия;***
17. $A\vee\neg A \equiv$ И – ***свойство исключения третьего;***
18. $A\to B \equiv \neg A\vee B$;
19. $A\leftrightarrow B \equiv (A\to B)\wedge(B\to A)$;
20. $A\wedge$И $\equiv A$ – ***первое свойство конъюнкции;***
21. $A\wedge$Л $\equiv$ Л – ***второе свойство конъюнкции;***
22. $A\vee$И $\equiv$ И – ***первое свойство дизъюнкции;***
23. $A\vee$Л $\equiv A$ – ***второе свойство дизъюнкции;***

Доказательство. Согласно теореме 1.11 для доказательства теоремы 1.12 достаточно проверить свойства 1–23 для пропозиционных переменных. Доказательство этих свойств для переменных осуществляется методом истинных таблиц. Докажем например, свойство 7.

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\wedge(p\wedge r)$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	Л	И	И
И	Л	И	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л

Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

Сравнивая два последних столбца таблицы, заключаем, что $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\wedge(p\wedge r)$. Теорема доказана.

Пример 1.13. Докажем, что формула $p\wedge(p\to q)\to q$ является тождественно истинной.

Имеем: $p\wedge(p\to q)\to q \overset{18}{\equiv} p\wedge(\neg p\vee q)\to q \overset{7}{\equiv} (p\wedge\neg p)\vee(p\wedge q)\to q \overset{16}{\equiv}$

$\overset{16}{\equiv} Л\vee(p\wedge q)\to q \overset{3}{\equiv} (p\wedge q)\vee Л\to q \overset{23}{\equiv} p\wedge q\to q \overset{18}{\equiv} (p\wedge q)\vee q \overset{9}{\equiv} (\neg p\wedge\neg q)\vee q \overset{6}{\equiv}$

$\overset{6}{\equiv}\neg p\vee(\neg q\vee q) \overset{17}{\equiv} \neg p\vee И \overset{21}{\equiv} И.$

Число, стоящее над знаком равносильности, означает номер примененного свойства.

Пример 1.14. Докажем равносильность формул

$$p\to\neg(q\vee p)\vee\neg(r\vee q) \text{ и } \neg(p\wedge(q\vee r)).$$

Имеем:

$p\to\neg(q\vee p)\vee\neg(r\vee q) \overset{9}{\equiv} p\to\neg((q\vee p)\vee(r\vee q) \overset{4}{\equiv} p\to\neg((q\vee p)\wedge(q\vee r)) \overset{8}{\equiv}$

$\overset{8}{\equiv} p\to\neg(q\vee(p\wedge r)) \overset{18}{\equiv} \neg p\vee\neg(q\vee(p\wedge r)) \overset{9}{\equiv} \neg(p\wedge(q\vee(p\wedge r))) \overset{7}{\equiv}$

$\overset{7}{\equiv} \neg((p\wedge q)\vee(p\wedge(p\wedge r))) \overset{5}{\equiv} \neg((p\wedge q)\vee((p\wedge q)\wedge r))) \overset{1}{\equiv} ((p\wedge q)\vee((p\wedge r)) \overset{7}{\equiv}$

$\overset{7}{\equiv} \neg(p\wedge(q\vee r)).$

Примеры 1.13 и 1.14 расписаны подробно, каждому знаку равносильности соответствует применение одного свойства логических операций. На практике по мере накопления опыта в таких преобразованиях, применяют за один шаг несколько свойств, и поэтому цепочки равносильностей в аналогичных примерах становится значительно короче. Очевидно, что метод преобразования формул наиболее экономичен по сравнению с методом истинностных таблиц. Однако без метода истинностных таблиц совсем обойтись нельзя, так как на его использование основного доказательство свойств логических операций.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под высказыванием?
2. Сформулируйте определение логических операций.
3. Что называется формулой логики высказываний?
4. Каков порядок выполнения логических операций в формуле?
5. Какая формула называется тождественно истинной (тождественно ложной)?

6. В чем заключается метод истинностных таблиц?
7. Какие две формулы называются равносильными?
8. Сформулируйте и докажите теорему о связи двух равносильных формул с их эквиваленцией.
9. Сформулируйте и докажите теорему о подстановке формул в равносильные формулы.
10. Сформулируйте и докажите основные свойства логических операций.

Упражнения

1. С помощью метода истинностных таблиц определите вид формул:

а) $p\wedge q\to q\wedge p$;

б) $p\to\neg q\vee(p\to q)$;

в) $\neg(p\wedge q)\wedge(q\wedge p)\wedge(p\to q)\wedge(p\vee q)$;

г) $p\vee q\to\neg q\wedge p$;

д) $p\to(q\to p)\wedge(p\vee q)$;

е) $\neg(q\to\neg p)\wedge\neg q$.

2. Докажите утверждение: формулы A и B равносильны тогда и только тогда, когда формула $A\leftrightarrow\neg B$ является тождественно ложной.

3. С помощью свойств логических операций докажите следующие равносильности:

а) $\neg p\vee\neg(p\to q)\vee(p\wedge\neg(q\vee p))\equiv\neg(p\wedge q)$;

б) $p\leftrightarrow(\neg q\to\neg(p\to q\vee\neg p))\equiv q\to p$;

в) $\neg(p\to q)\vee(p\vee\neg q\to\neg p)\equiv$ И;

г) $(p\to(q\to r\vee\neg p)\wedge\neg r)\to p\vee q\equiv p\vee q$;

д) $((p\to q)\vee\neg(p\vee q))\wedge(\neg q\to(q\vee r))\equiv p\wedge q$;

4. С помощью свойств логических операций упростите формулы, приведенные в упражнении 1.

5. Равносильны ли формулы:

а) $(p\to q)\to r$ и $p\to(q\to r)$;

б) $\neg(p\wedge\neg(p\wedge\neg(p\wedge\neg(p\wedge\neg p))))$ и $\neg p$;

в) $p\wedge(q\vee(p\wedge(q\vee(p\wedge q))))$ и $p\wedge q$.

6. Запишите равносильности, выражающие логические операции: конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквиваленцию через

а) отрицание и конъюнкцию;

б) отрицание и дизъюнкцию;

в) отрицание и импликацию.

§ 2. Логическое следствие. Методы доказательств

Определение 2.1. Формула B называется *логическим следствием* формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если для каждого набора истинностных значений, входящих в $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ переменных, такого, что все формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, истинны, формула B также истинна.

Тот факт, что формула является следствием формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, будем записывать так: $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$.

Из определения 2.1 легко следует, что всякая тождественно истинная формула является логическим следствием любой формулы и что всякая формула является логическим следствием любой тождественно ложной формулы.

С помощью понятия логического следствия легко объяснить смысл доказательства теорем имеющих следующую весьма распространенную формулировку: пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$, тогда B. Действительно, смысл самой теоремы заключается в утверждении того, что если истинны $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то истинно и B. Смысл доказательства состоит в установлении того, то B – логическое следствие $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Кроме того, понятие логического следствия позволяет логически обосновать некоторые из широко употребляемых методов доказательств.

1. Метод косвенного доказательства (метод контрапозиции). Этот метод заключается в том, что вместо теоремы вида $A \to B$ доказывается теорема $\neg B \to \neg A$. Логическим обоснованием этого метода является свойство контрапозиции: $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$. Приведем пример использования такого метода. Доказать, что если для некоторого целого числа z и натурального числа n выполняется равенство

$$z^n + 2z - 3 = 0,$$

то z – нечетное число. Здесь посылка A: $z^n+2z-3 = 0$, заключение B: z – нечетное число. Предположим $\neg B$: z – четное число, то есть $z = 2m$, где m – некоторое целое число. Тогда

$$z^n + 2z - 3 = 2^n m^n + 4m - 3 = 2(2^{n-1} m^n + 2m) - 3 \neq 0,$$

так как $2(2^{n-1}m^n+2m) \neq 3$. Таким образом, истинно $\neg A$: $z^n+2z-3 \neq 0$.

2. Метод доказательств от противного. Этот метод часто используется при доказательстве утверждений и заключается в том, что предполагая ложность доказываемого утверждения, мы выводим истинность и ложность одного и того же высказывания. Логическим обоснованием этого метода является следующая

Теорема 2.2. *Если из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B$ логически следует противоречие, то B является логическим следствием формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B \models F$, где F – тождественно логическая формула. Пусть формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B$ зависят от переменных $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Придадим этим переменным произвольные значения. При этом истинностные значения формулы F равно Л, и так как она является логическим следствием формул $A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B$, то истинностные значения этих формул не могут одновременно равняться И. Предположим, что при этом наборе значений переменных $p_1, p_2, \ldots, p_m$ истинностные значения формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равны И. Тогда согласно показанному выше истинностное значение формулы $\neg B$ равно Л, а истинностное значения формулы B равно И. Это означает, что формула B принимает значение И всякий раз, когда значение И принимают формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то есть $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$. Теорема доказана.

Приведем пример применения метода от противного. Докажем теорему B: $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Предположим противное B: $\sqrt{2}$ – рациональное число, то есть

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

где m, n $(n \neq 0)$ – целые числа. Очевидно, что можно считать $\frac{m}{n}$ несократимой дробью. Пусть C: $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. Возводя обе части равенства (1) в квадрат, получим, что $2 = \frac{m^2}{n^2}$ и $m^2=2n^2$, откуда следует, что m^2 – четное число, а значит и m – четное число. Пусть $m=2k$. Тогда $2n^2=4k^2$, откуда $n^2=2k^2$. Рассуждая аналогично, заключаем, что n – четное число. Но тогда истинно $\neg C$: $\frac{m}{n}$ – сократимая дробь. Получаем противоречие: $C \wedge \neg C$. Таким образом, $\neg B \models C \wedge \neg C \equiv$ Л и поэтому B истинно.

3. Метод построения цепочки импликаций (метод рассуждения). Проиллюстрируем применение этого метода на решении такой задачи: доказать, что для любого натурального числа n число n^3+5n делится на 6 (то есть при делении этого числа на 6 остаток равен нулю). Введем обозначения:

A: – n натуральное число;

B: – n^3+5n делится на 6;

A_1: – числа $6n$, $(n-1)n(n+1)$ делятся на 6;

A_2: –сумма $6n+(n-1)n(n+1)$ делится на 6.

В этих обозначениях наша задача может быть записана так: доказать $A \to B$. Доказательство. Импликации $A \to A_1$, $A_1 \to A_2$ очевидны. Истинность импликации $A_2 \to B$ вытекает из того, что

$$6n+(n-1)n(n+1) = 6n+n^3-n = n^3+5n.$$

Таким образом, мы построили цепь импликаций $A \to A_1$, $A_1 \to A_2$, $A_2 \to B$, на основании которой заключаем, что $A \to B$. Логическим обоснованием этого метода является

Теорема 2.3. *Пусть* $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ *– произвольные формулы. Тогда* $A \to A_1, A_1 \to A_2, \ldots, A_n \to B \models A \to B$.

Доказательство. Пусть при некотором наборе значений переменных, входящих в формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n, B,$ истинностные значения формул $A \to A_1, A_1 \to A_2, \ldots, A_n \to B$ равны И. Тогда, если истинностное значение формулы A равно И, то истинностное значение формулы A_1 также равно И (поскольку истинностное значение формулы $A \to A_1$ значение равно И). Переходя к формулам $A \to A_1, A_1 \to A_2, \ldots, A_n \to B$ и рассуждая аналогично, мы через конечное число шагов придем к тому, что истинностное значение формулы B, а следовательно и формулы $A \to B$ равно И. если же истинностное значение формулы A равно Л, то по определению импликации истинностное значение формулы $A \to B$ равно И. Таким образом, при том же наборе значений переменных истинностное значение формулы $A \to B$ равно И. Это означает, что $A \to B$ логическое следствие формул $A \to A_1, A_1 \to A_2, \ldots, A_n \to B$. Теорема доказана.

4. Метод разбора случаев. Этот метод, так же как и предыдущий относится к типу прямых доказательств. Покажем суть этого метода на примере.

Доказать B: при любом натуральном n числа n, $n+2$, $n+13$ не могут быть одновременно простыми числами (напомним, что натуральное число p, большее единицы, называется простым, если оно имеет всего два натуральных делителя: 1 и p).

Рассмотрим три случая:

A_1: n делится на 3, то есть $n = 3m$ для некоторого натурального числа m;

A_2: при делении n на 3 получается остаток 1, то есть $n = 3m+1$ для некоторого натурального числа m;

A_3: при делении n на 3 получается остаток 2, то есть $n = 3m+2$ для некоторого натурального числа m.

Очевидно, что $A_1 \vee A_2 \vee A_3$=И. Доказательство нашего утверждения рассмотрим в каждом случае отдельно. Сначала докажем, что $A_1 \to B$. Действительно, если $n = 3m$ – просто число, то $m=1$ и тогда $n+2=5$ и $n+13=16$. Ясно, что последнее число не является простым. Докажем теперь, $A_2 \to B$. Пусть $n = 3m+1$. Тогда $n+2= 3m+3=3(m+1)$ и так как m – натуральное число, то $3(m+1)$ – не простое число. Остается доказать, что $A_3 \to B$. Пусть $n = 3m+2$. Тогда $n+13=3m+2+13=3(m+5)$. Ясно, что это число не является простым. Таким образом, B истинно. В процессе доказательства мы установили следующее: $A_1 \vee A_2 \vee A_3$, $A_1 \to B, A_2 \to B, A_3 \to B \models B$.Логическим обоснованием этого метода является следующая

Теорема 2.4. *Пусть* $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ *– произвольные формулы. Тогда* $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n, A_1 \to B, A_2 \to B, \ldots, A_n \to B \models B$.

Доказательство. Пусть для некоторого набора значений переменных, входящих в формулу $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ истинностные значения формул $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n, A_1 \to B, A_2 \to B, \ldots, A_n \to B$ равны И. Согласно определению операции дизъюнкции это означает, что хотя бы одна из формул $A_1, A_2, \ldots A_n$ принимает значение И. Пусть такой формулой будет A_k $(1 \leq k \leq n)$. Рассмотрим импликацию $A_k \to B$. Так как её истинное значение по условию равно И, то истинное значение формулы B так же равно И. Таким образом, B – логическое следствие формул $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n, A_1 \to B, A_2 \to B, \ldots, A_n \to B \models B$. Теорема доказана.

Рассмотренные методы доказательств не исчерпывают всех методов доказательств в математике. Кроме того, следует иметь в виду, что доказательства многих, в том числе и простых утверждений могут представлять собой сложную комбинацию различных методов доказательств.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют логическим следствием формул $A_1, A_2, \ldots A_n$?
2. В чем заключается метод косвенного доказательства? Каково его логическое обоснование?
3. В чем заключается метод доказательства от противного? Каково его логическое обоснование?
4. В чем заключается метод построения цепочки импликаций? Каково его логическое обоснование?
5. В чем заключается метод разбора случаев? Каково его логическое обоснование?

Упражнения

1. Доказать правило силлогизма: $p \to q, q \to r \models p \to r$.

2. Доказать, что:

а) $A, A \leftrightarrow B \models B$; *д*) $A, A \to B \models B$;

б) $A \to B, A \to C \models A \to B \wedge C$; *е*) $A \vee B, \neg B \models B$;

в) $A \to C, B \models A \wedge B \to C$; *ж*) $A \to C, B \to C \models A \vee B \to C$.

г) $A \to (B \to C) \models A \wedge B \to C$;

§ 3. Предикаты. Кванторы

Для обозначения объектов в математике (точек, чисел, множеств и т.д.) используются буквы. При этом буквами мы обозначаем как конкретные объекты (например: A – точка с координатами (2;0)), так и противоположные объекты (например: x – целое число). Во втором случае значениями букв могут быть различные объекты из какой-то конкретной области. Такие буквы мы будем называть *предметными переменными*. Предложения с переменными часто построены так же, как построены высказывания. Сравните, например предложения: «5 – простое число» и «x – простое число». Но часто предложения с переменными высказываниями не являются. Так в предыдущем примере предложение «x – простое число» не является высказыванием, но оно превращается в высказывание, когда вместо x мы подставляем конкретное число. Те объекты, для которых используется переменная в предложении, будем называть *допустимыми* значениями переменной. Если допустимыми значениями переменной x являются натуральные, целые или действительные числа, то x называется соответственно натуральной, целочисленной или действительной переменной. Препозиционной переменной, как мы знаем, называется переменная, чьи допустимые значения – буквы И и Л.

Определение 3.1. Предложение с n переменными, превращающееся в высказывание при подстановке вместо переменных их допустимых значений, называется *n-местным предикатом*.

Предикаты будем обозначать заглавными латинскими буквами с указанием в скобках всех входящих в них переменных. Примеры предикатов:

$P(x)$: $x^2–1=0$, x™R;

$Q(x, y)$: $xy=3$, x, y™R;

$T(x, y, z)$: $x^2+y^2+z < 1$, x, y, z™R;

$R(x)$: «x – четное число», x™N;

$S(x, y)$: «треугольники x и y подобны»;

$V(x, y)$: «прямые x и y не пересекаются»;

$W(x, y, z)$: «точки x, y, z лежат в одной плоскости».

Здесь $P(x)$, $R(x)$ – примеры одноместных предикатов, $Q(x, y)$, $S(x, y)$, $V(x, y)$ – примеры двуместных предикатов, $T(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ – примеры трехместных предикатов.

Если в двуместном предикате заменить одну из переменных любым ее допустимым значением, то получится одноместный предикат, например, если $P(x, y)$: $2x–3y=5$, то $P(5, y)$: $3y=5$. В общем случае, если в n-местном предикате заменить любую переменную её допустимым значением, то получится новый, уже $(n–1)$-местный предикат. Естественно, поэтому высказывания считать 0-местным предикатом.

Простые высказывания могут быть получены из соответствующих предикатов. Например: высказывание «Минск – столица Беларуси» может быть получено из одноместного предиката $P(x)$: «x – столица Беларуси» или даже из двуместного предиката $Q(x, y)$: «x – столица y». Сложные предикаты могут быть получены из простых с помощью логических операций, аналогичных тем, которые были определены в § 1 для высказываний. При этом надо иметь в виду, что в результате применения логической операции может получиться предикат, в котором количество переменных отлично от количества переменных в исходных предикатах. Например, если $P(x)$: «$x > 5$» и $Q(x)$: «x делится на 3», то предикат $P(x) \wedge Q(x)$: «$x > 5$ и x делится на 3» является одноместным. Если в одном из предыдущих предикатов переменную обозначить другой буквой, скажем, $Q(y)$: «y делится на 3», то предикат $P(x) \wedge Q(y)$: «$x > 5$ и y делится на 3» будет уже двуместным. Аналогичная ситуация может возникнуть при оперировании с многоместными предикатами. Логические операции применимы и к предикатам с различным числом переменных. Например, пусть $Q(x, y)$: $x+y=2$, $P(x)$: $x^2+3x+1 > 0$. Тогда можно рассмотреть предикат $P(x) \rightarrow Q(x, y)$: «если $x^2+3x+1 > 0$, то $x+y=2$», который является двуместным предикатом. Отметим без доказательства, что операции над предикатами обладают теми же свойствами, что и операции над высказываниями.

Значением любого предиката (то есть значением, получающимся в результате замены всех переменных их допустимыми значениями) является высказывание. Высказывание, как мы знаем, может быть истинным или ложным. Например, предикат $P(x)$: «x – простое число» при $x=2$ принимает значение истинного высказывания: «2 – простое число», а при $x=4$ принимает значение ложного высказывания: «4 – простое число». Однако предикат $Q(x)$: «если x – действительное число, то $x^2 \geq 0$» при любом действительном значении x дает истинное высказывание. Такой предикат имеет специальное название.

Определение 3.2. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *тождественно истинным* (*тождественно ложным*), если при любом наборе допустимых значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ этот предикат принимает значение истинного (ложного) высказывания.

Предикат, не являющийся тождественно ложным, называется *выполнимым*. Примеры тождественно истинных предикатов: $P(x)$: $|x| \geq 0$, $Q(x)$: $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$; тождественно ложных: $T(x)$: $\cos x > 1$, $P(x, y)$: $x^2+y^2 < 0$; выполнимых: $V(y)$: $3y > 0$; $W(x, y)$: $2x+3y = 1$, где x, y – действительные переменные.

Определение 3.3 Предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ($n \geq m$) называются *равносильными*, если при любом наборе допустимых значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ истинные значения получаемых высказываний равны.

Тот факт, что предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ равносильны, будем записывать так: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Примеры равносильных предикатов: $P(x)$: $\lg x \geq 0$ и $Q(x)$: $x \geq 1$; $P(x, y)$: $\cos x = \cos y$ и $Q(x, y)$: $x = \pm y + 2\pi k$.

Пусть x – предметная переменная. Выражение «для любого x» будем обозначать символом $\forall x$, который назовем *квантором всеобщности*. Выражение «существует x» будем обозначать символом $\exists x$, который назовем *квантором существования*. Происхождение знаков $\forall$ и $\exists$ связано с английскими словами *All* – все и *Exists* – существует, а слова квантор – с латинским словом *quantum* – сколько. Кванторы употребляются как приставки перед предикатами и действуют на предикаты. Поясним сначала как действуют кванторы на одноместные предикаты. Пусть $P(x)$ – произвольный одноместный предикат, зависящий от переменной x. Тогда под выражением $\forall x P(x)$ мы будем понимать высказывание, истинное тогда и только тогда, когда предикат $P(x)$ тождественно истинен. Под выражением $\exists x P(x)$ мы будем понимать высказывание, истинное тогда и только тогда, когда предикат $P(x)$ не является тождественно истинным. Приведем примеры. Пусть $P(x)$: $x^2 \geq 0$, $Q(x)$: $x = 3$, где x – действительная переменная. Тогда высказывания $\forall x P(x)$: «для любого x $x^2 \geq 0$» $\exists x P(x)$: «существует такой x, что $x^2 \geq 0$», $\exists x Q(x)$: «существует такой x, что $x=3$», являются истинными, а высказывание $\forall x Q(x)$: «для любого x $x=3$» ложно.

Рассмотрим теперь, как действуют кванторы на двуместные предикаты на примере предиката $P(x, y)$ с действительными переменными: $x^2+y > 3$. Сначала рассмотрим предложение $\forall x P(x, y)$: «для любого x $x^2+y > 3$». Очевидно, что это предложение не является высказыванием, однако при $y = 4$ получаем истинное высказывание: «для любого x $x^2+4 > 3$», а при $y = -1$ – ложное высказывание: «для любого x $x^2-1 > 3$». Таким образом, предложение $\forall x P(x, y)$ зависит только от переменной y и потому является одноместным предикатом. Переменная x в этом предикате $\forall x P(x, y)$ называется *связанной* переменной. Рассмотрим теперь предложение $\exists x P(x, y)$: «существует x такой, что $x^2+y > 3$». Легко видеть, что это предложение не является высказыванием, но превращается в высказывание при конкретных значениях переменной y. Следовательно, $\exists x P(x, y)$ – одноместный предикат, зависящий от переменной y, а переменная x в этом предикате является *связанной*. Ясно, что если перед предикатом $P(x, y)$ приписать поочередно кванторы $\forall y$ или $\exists y$, то получатся одноместные предикаты $\forall y P(x,y)$ и $\exists y P(x,y)$ соответственно. Аналогично действуют кванторы на многоместные предикаты. Таким образом, если $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-местный предикат, то связывая кванторами k различных переменных, получим $(n\text{-}k)$-местный предикат.

Рассмотрим следующий пример: пусть $Q(x, y)$: $x+y = 1$, где x, y –действительные переменные. Тогда высказывание $\exists x\forall y \quad x+y = 1$ ложно. Действительно, не существует такого числа x, чтобы $x+y = 1$ при любом значении y. Однако высказывание $\forall y\exists x \quad x+y = 1$ истинно, так как для любого значения y существует значение $x = 1–y$ такое, что $x+y = 1$. Этот пример говорит о том, что перестановка между собой разноименных кванторов может привести к различным по смыслу выражениям. Истинные значения высказываний $\forall x\forall y \quad x+y = 1$ и $\forall y\forall x \quad x+y = 1$, а так же высказываний $\exists x\exists y \quad x+y = 1$ и $\exists y\exists x \quad x+y = 1$ равны. Эти примеры являются проявлением общего правила: при перестановке одноименных кванторов смысловое значение получающихся высказываний или предикатов сохраняется.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется n-местным предикатом?
2. Является ли высказывание предикатом?
3. Какие логические операции можно выполнять на д предикатами?
4. На какие виды делятся все предикаты? Дайте определения этих видов?
5. Какие два предиката называются равносильными?
6. Дайте понятие квантора всеобщности и существования
7. Как действуют кванторы на одноместные предикаты?
8. Как действуют кванторы на многоместные предикаты?

Упражнения

1. В следующих предложениях выделите и обозначьте предикаты, и с помощью обозначений и знаков запишите данные предложения:

а) сумма двух четных чисел является четным числом;

б) центры любых трех шаров лежат в одной плоскости;

в) скрещивающиеся прямые не лежат в одной плоскости;

г) модуль суммы двух чисел не больше суммы их модулей.

2. Пусть x, y, z – действительные переменные. Определите вид каждому из следующих предикатов:

а) $P(x)$: $\sqrt{x^2} = |x|$;

б) $Q(x, y)$: $|x|+|y| \geq |x+y|$;

в) $T(x, y)$: $|x–y|+|y–x| = 0$;

г) $V(x, y, z)$: $x^2+y^2 \geq z^2$;

д) $W(x, y)$: $x^x = y^y$;

е) $F(x, y)$: $1+|x| = –|y|–1$.

3. Определите истинностные значения высказываний:

а) если $P(x)\vee Q(x)$ –тождественно истинный предикат, то $P(x)$ и $Q(x)$ – тождественные истинные предикаты;

б) если $P(x)\wedge Q(x)$ – тождественно ложный предикат, то $P(x)$ и $Q(x)$ – тождественно ложные предикаты;

в) если $P(x)\to Q(x)$ – выполнимый предикат, то один из предикатов $P(x)$ или $Q(x)$ выполним.

4. Определите истинностные значения высказываний:

а) $\forall x\, P(x)$;

б) $\exists x \exists y\, Q(x, y)$;

в) $\forall x \forall y\, Q(x, y)$;

г) $\forall x \exists y\, T(x, y)$;

д) $\exists y \forall x\, T(x, y)$;

е) $\forall x \exists y \forall z\, V(x, y, z)$;

ж) $\forall x \forall z \exists y\, V(x, y, z)$;

з) $\exists x \exists y\, W(x, y)$;

и) $\forall x \exists y\, W(x, y)$;

к) $\exists x \exists y\, F(x, y)$,

где $P(x)$, $Q(x, y)$, $T(x, y)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y)$, $F(x, y)$ – предикаты, определенные в упражнении 2.

5. Какие из следующих предложений являются высказываниями, одно- или двуместными предикатами:

а) сумма двух целых чисел четна, если одно из них четно;

б) любое положительное число больше любого отрицательного числа;

в) среди трех попарно различных натуральных чисел существует наименьшее натуральное число;

г) существует такое значение x, что точка $M(x, y)$ принадлежит прямой $3x+2y = 1$;

д) для любого значения y точка $M(x, y)$ принадлежит прямой $3x+2y = 1$;

е) точка $M(x, y)$ принадлежит прямой $3x+2y = 1$;

ж) для любого значения x существует значение y такое, что точка $M(x, y)$ принадлежит прямой $3x+2y = 1$;

з) через некоторые три точки можно провести три различные прямые;

и) сумма двух простых чисел является простым числом;

к) разность квадратов любых двух нечетных чисел четна.

6. Докажите, что предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ равносильны тогда и только тогда, когда предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ является тождественно истинным.

§ 4. Формулы логических предикатов

Логические операции (включая и операции приписывания кванторов) над предикатами и их свойства изучаются в логике предикатов. Языком логики предикатов являются особые выражения-формулы логики предикатов. Определим формулу логики предикатов. Пусть, как и прежде, латинские буквы с индексами или без них обозначают предметные переменные, заглавные латинские буквы с индексами или без них – символы n-местных предикатов (n-натуральные числа или $n = 0$).

Определение 4.1. 1) символы 0-местных предикатов, а так же выражения вида $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где P – символ n-местного предиката ($n \geq 1$) являются формулами логики предикатов;

2) если P, Q – формулы логики предикатов, то формулами логики предикатов являются выражения $(\neg P)$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$. Если T – формула логики предикатов, содержащая переменную x , то формулами логики предикатов являются выражения $(\forall xT)$ и $(\exists xT)$;

3) выражение являются формулой логики предикатов тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет пункту 1) или пункту 2) данного определения.

Формулы логики предикатов будем обозначать заглавными латинскими буквами. Примем соглашение об экономии скобок: внешние скобки будем опускать, внутренние скобки можно опускать с учётом следующего порядка выполнения действий: приписывание кванторов, отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. Например, формулу $((((\forall xP(x)) \wedge (\neg Q(y)))) \vee T(z))$ можно записать в более простом виде: $\forall xP(x) \wedge \neg Q(y) \vee T(z)$. В этой формуле формула $P(x)$ называется *областью действия* квантора $\forall x$. Область действия квантора $\exists x$ в формуле $\exists x(P(x) \wedge Q(y))$ есть формула $P(x) \wedge Q(y)$.

Формула логики предикатов, удовлетворяющая первому пункту определения 4.1, называется *элементарной формулой*, а удовлетворяющая второму пункту, – *составной формулой*. Элементарные формулы играют роль переменных в составных формулах, так же, как и пропозиционные переменные в формулах логики высказываний Значениями элементарных формул являются конкретные предикаты.

Определение 4.2. Предикатные формулы A и B называются *равносильными*, если при любом наборе значений входящих в них элементарных формул получаются равносильные предикаты.

Если формулы A и B равносильны, то будем писать $A \equiv B$. Заметим, что проверка того, являются ли две предикатные формулы A и B равносильными, сводится в конечном итоге к сравнению истинностных значений двух высказываний, получающихся из A и B последовательной подстановкой сначала конкретных предикатов, а затем допустимых значений, входящих в них переменных. На этом основании мы можем утверждать, что равносильности, имеющие место для формул логики высказываний, сформулированные в теореме 1.12, справедливы и для формул логики предикатов. Покажем, например, что для любых формул A и B логики предикатов справедливо утверждение: $A \wedge B \equiv B \wedge A$. Возьмем произвольный набор значений элементарных формул, входящих в A и B и получим предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) \wedge P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Эти предикаты равносильны, так как при любом наборе допустимых значений переменных $x_1, x_2, x_{m,}, \ldots, x_n$ получающиеся высказывания $P \wedge Q$ и $Q \wedge P$ имеют равные истинностные значения.

Сформулируем без доказательства еще ряд равносильностей для формул логики предикатов, которые вместе с отмеченными выше называются *законами логики* предикатов:

1. $\neg(\forall x\, A(x)) \equiv \exists x(\neg A(x))$ – 1-й закон построения отрицания;
2. $\neg(\exists x\, A(x)) \equiv \forall x(\neg A(x))$ – 2-й закон построения отрицания;
3. $\forall x \forall y\, A(x, y) \equiv \forall y \forall x\, A(x, y)$;
4. $\exists x \exists y\, A(x, y) \equiv \exists y \exists x\, A(x, y)$;
5. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$;
6. $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$.

Математические предложения несут информацию об отношениях между математическими объектами: числами, точками, прямыми, векторами, функциями и т.д. Эти отношения: равенство, больше, меньше, принадлежит, делится и т.д. являются предикатами, многие из которых имеют общепринятые обозначения. Так, например, предикат равенства «x равно y» обозначается так: $x = y$, а предикаты «x больше y» и «x меньше y» обозначаются естественно $x > y$ и $x < y$, предикат «x принадлежит y» обозначается так: x ™ y. Используя язык логики предикатов в сочетании с общепринятым математическим языком мы можем получить краткую и понятную запись математических предложений. Так как языком логики предикатов являются формулы логики предикатов, то предложение считается правильно записанным на этом языке тогда и только тогда, когда оно получено из формулы логики предикатов заменой предикатных символов конкретными предикатами. Полученные таким способом выражения так же будем называть формулами логики предикатов. Рассмотрим примеры.

1. Запишем на языке логики предикатов такую аксиому: «Для любых двух различных точек существует одна и только одна содержащая их прямая». Математические объекты в этом предложении – это точки и прямые. Первые мы обозначим заглавными, а вторые – малыми математическими буквами. Выделим теперь отношения между объектами в этом предложении: точки не равны, точка принадлежит прямой, прямые равны. Таким образом, четыре объекта (две точ-

ки и две прямые) связаны тремя отношениями (неравенства, принадлежность и равенства): $A \neq B$, A ™ a, B ™ a, A ™ a', B ™ a', $a = a'$. Теперь согласно формулировке применим кванторы и получим формулу: $\forall A \forall B$ ($A \neq B \rightarrow \exists a$($A$™$a \wedge B$™$a \wedge \forall a'$($A$™$a' \wedge B$™$a' \rightarrow a = a'$))).

2. Применим теперь язык логики предикатов к записи определения предела числовой последовательности: «Число a называется пределом числовой последовательности (a_n), если для каждого положительного числа ξ существует такой номер n_ξ, что для всех номеров n, больших n_ξ, выполняется неравенство $|a_n - a| < \xi$». Объектами в этом предложении является действительные числа a, a_n, ξ и натуральные числа n_ξ, n, а отношениями между ними больше и меньше: $\xi > 0$, $n > n_\xi$, $|a_n - a| < \xi$. Поэтому определение предела может быть записано так: «Число a называется пределом числовой последовательности (a_n), если $\forall \xi(\xi > 0\ \exists n_\xi \forall n(n > n_\xi\ |a_n - a| < \xi))$».

Заметим, что последнюю формулу можно упростить, если применить расширенные кванторы $\forall \xi > 0$ и $\forall n > n_\xi$, означающие «для любого положительного ξ» и «для любого n, большего n_ξ» соответственно:

$$\forall \xi > 0\ \exists n_\xi\ \forall n > n_\xi\ |a_n - a| < \xi. \qquad (*)$$

3. Теорема: «Прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна любой другой плоскости, параллельной данной плоскости» – записывается следующим образом: $\forall a \forall \alpha \forall \beta(a \perp \alpha \wedge \alpha \| \beta \rightarrow a \perp \beta)$, где a – прямая, α, β –плоскости.

Применение языка логики предикатов к записи математических предложений даёт возможность применить законы логики предикатов к получению новых формулировок определений и теорем. Это особенно важно при проведении доказательств методом от противного. Приведем примеры.

4. Определить понятие: что значит, что число a не является пределом числовой последовательности (a_n).

Ясно, что число a не является пределом числовой последовательности, если оно не удовлетворяет определению предела последовательности (a_n). То есть не удовлетворяет условию (*) (см. пример 2). Следовательно, a не является пределом последовательности (a_n), если для него выполнено условие $\neg(\forall \xi > 0\ \exists n_\xi\ \forall n > n_\xi\ |a_n - a| < \xi)$. Однако в такой формулировке смысл определения непонятен. Преобразуем последнюю формулу по правилам построения отрицаний:

$$\neg(\forall \xi > 0\ \exists n_\xi\ \forall n > n_\xi\ |a_n - a| < \xi) \equiv \exists \xi > 0\ \forall n_\xi\ \neg(\forall n > n_\xi\ |a_n - a| < \xi) \equiv$$
$$\equiv \exists \xi > 0\ \forall n_\xi\ \exists n > n_\xi\ \neg(|a_n - a| < \xi) \equiv \exists \xi > 0\ \forall n_\xi\ \exists n > n_\xi\ |a_n - a| \geq \xi.$$

Таким образом, число a не является пределом числовой последовательности (a_n), если найдется такое положительное число ξ, что для любого номера n_ξ существует такой номер $n > n_\xi$, для которого

$$|a_n - a| \geq \xi.$$

5. Сформулируем определение непериодической функции, построив отрицание определения периодической функции. Напомним определение периодической функции: функция $f(x) = f$ называется периодической, если существует число т $\neq 0$, что при любом x из области определения f числа $x–T$ и $x+T$ так же принадлежит этой области и при этом выполняются равенства $f(x–T) = f(x) = f(x+T)$. Используя общепринятые обозначение $D(f)$ области определения функции f, перепишем определение периодической функции: функция f называется периодической, если

$$\exists T\neq 0\ \forall x\text{™}D(f)\ (x-T)\text{™}D(f) \wedge (x+T)\text{™}D(f) \wedge f(x-T) = f(x) = f(x+T).$$

Построив отрицание этой формулы согласно правилам построения отрицаний и законам де Моргана, получим такое определение: функция f называется непериодической, если

$$\forall T\neq 0\ \exists x\text{™}D(f)\ ((x-T)\notin D(f) \vee (x+T) \notin D(f) \vee f(x-T) \neq f(x) \vee f(x+T) \neq f(x)).$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется формулой логики предикатов?
2. Какая формула логики предикатов называется элементарной, а какая составной?
3. Какие две формулы логики предикатов называется равносильными?
4. Сформулируйте правила построения отрицаний.

Упражнения

1. Укажите области действия кванторов в формулах:

а) $\forall xP(x)\wedge Q(x)$;
б) $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$;
в) $\exists xP(x)\to Q(x)$;
г) $\forall x\exists yP(xy)$;
д) $\exists x\forall y(P(x)\wedge Q(y))$;
е) $\exists x(P(x)\wedge\forall yQ(y))$;
ж) $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$;
з) $\forall x(P(x)\to Q(y))$;
и) $\exists xP(x)\wedge Q(x,y)$.

2. Равносильны ли следующие формулы:

а) $\forall xP(x)\vee Q(x)$ и $\forall x(P(x)\vee Q(x))$;
б) $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x))$ и $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$;
в) $\forall x(P(x)\to Q(x)$ и $\exists x(\urcorner P(x)\vee Q(x))$;
г) $\exists x\urcorner P(x)\vee\exists xQ(x)$ и $\exists x(P(x)\to Q(x))$;
д) $\forall x\urcorner P(x)\vee\forall x\urcorner Q(x)$ и $\urcorner(\exists x(P(x)\vee Q(x)))$?

3. Постройте отрицание формул, приведенных в упражнении 1.

4. Применяя язык логики предикатов, запишите в краткой форме определения:

а) параллельных прямых;

б) перпендикулярных плоскостей;

в) коллинеарных векторов;

г) четной функции;

д) нечетной функции;

е) предел функции в точке;

ж) точек максимума и минимума функции.

5. Сформулируйте отрицания определений, указанных в упражнении 4.

6. Запишите на языке логики предикатов следующие высказывания:

а) если каждое из двух целых чисел делится на число m, то сумма, разность и произведение этих чисел делится на m;

б) два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0;

в) через любую точку можно провести единственную прямую, параллельную данной;

г) уравнение $x^2–2=0$ не имеет рациональных корней;

д) уравнение $x^2–2=0$ имеет ровно два различных действительных корня;

е) для некоторых действительных положительных значений x выполняется неравенство $x^2 > 2^x$;

ж) для любого ненулевого значения a функция $y=ax+b$ не является периодической.

7. Запишите отрицания высказываний из упражнения 6 на языке логики предикатов и полученные высказывания сформулируйте на обычном языке.

§ 5. Виды теорем. Необходимость и достаточность

Математические теории основываются на аксиомах – таких высказываниях, истинность которых устанавливается соглашением. Такое соглашение часто имеет практическую основу, например: счет, измерения и т.д. Аксиом, как правило, не много. Всякое другое высказывание, сформулированное в рамках данной теории, считается истинным, если оно является логическим следствием аксиом. Такие истинные высказывания будем называть *теоремами*. Многие теоремы в математике содержат в себе условие и заключение, которые в общем случае являются n-местными предикатами. Для упрощения наших рассуждений будем считать их одноместными предикатами. Тогда один из наиболее распространенных видов теорем выражается следующей формулой

$$\forall x(A(x)\rightarrow B(x)). \qquad (1)$$

Например: если произвольное целое число является квадратом, то оно оканчивается одной из цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9. Условие здесь $P(x)$: «целое число x является квадратом», заключение $Q(x)$: «последняя цифра числа x есть одна из следующих цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9», а все утверждения может быть записано в виде $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$. Для сокращения речи формулу (1) будем называть теоремой (заметим, что формулы превращается в теорему, когда после подстановки вместо предикатных символов $A(x)$ и $B(x)$ конкретных предикатов получается истинное высказывание). Имея теорему (1), можно построить следующие высказывания:

$$\forall x(B(x)\rightarrow A(x)), \qquad (2)$$

$$\forall x(\neg A(x)\rightarrow \neg B(x)), \qquad (3)$$

$$\forall x(\neg B(x)\rightarrow \neg A(x)). \qquad (4)$$

Высказывание (2) может быть ложным или истинным. Если высказывание (2) истинно, то оно называется *обратной* теоремой. Если высказывание (3) истинно, то оно называется *противоположной* теоремой. Высказывание (4) по свойству контрапозиции $\neg B(x)\rightarrow \neg A(x) \equiv$ $\equiv A(x)\rightarrow B(x)$ истинно поскольку истинно (1) и называется теоремой *обратной противоположной*. Сама теорема (1) в этом случае называется *прямой теоремой*. Так в предыдущем примере высказывание $\forall x(Q(x)\rightarrow P(x))$ ложно, так как число 5, например, не является квадратом никакого целого числа, и поэтому обратной теоремой не является. По свойству контрапозиции высказывание $\forall x(\neg P(x)\rightarrow \neg Q(x))$ тоже логично, и поэтому не является противоположной теоремой.

Рассмотрим другой пример. Пусть $T(x)$: «целое число x делится на 5», $S(x)$: «целое число x оканчивается цифрой 0 или цифрой 5».

Легко видеть, что все высказывания $\forall x(T(x)\to S(x))$, $\forall x(S(x)\to T(x))$, $\forall x(\neg T(x)\to \neg S(x))$, $\forall x(\neg S(x)\to\neg T(x))$ истинны.

В теореме $\forall x(A(x)\to B(x))$ $A(x)$ обычно называют *достаточным условием* для $B(x)$, а $B(x)$ *необходимым условием* для $A(x)$. В том случае, когда имеет место и обратная теорема $\forall x(B(x)\to A(x))$ $B(x)$ является *необходимы и достаточным* условием для $A(x)$, а $A(x)$ – *необходимым и достаточным* условием для $B(x)$. В этом случае все четыре теоремы (1) – (4) могут быть объединены в одну

$$\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x)) \qquad (5)$$

(на основании равносильностей: $A(x)\leftrightarrow B(x) \equiv (A(x)\to B(x))\wedge(B(x)\to A(x))$, $A(x)\to B(x) \equiv \neg B(x)\to\neg A(x)$, $B(x)\to A(x) \equiv \neg A(x)\to\neg B(x)$).

Доказательство теоремы (5) состоит из двух частей: из доказательства прямой теоремы $\forall x(A(x)\to B(x))$ и обратной теоремы $\forall x(B(x)\to A(x))$. Первая часть называется *необходимостью*, а вторая – достаточностью.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под прямой, обратной, противоположной и обратной противоположной теоремами?
2. Какая часть доказательства называется необходимостью, а какая – достаточностью?

Упражнения

1. Определите, для каких из следующих теорем имеют место обратные теоремы:

а) если сумма двух простых чисел является простым числом, то одно из них равно двум;

б) среди трех последовательных целых четных чисел хотя бы одно число делится на 6;

в) если $x > y$, то $(x-y)^2 > 0$;

г) если $x > 0$, то для любого y $x+y^2 > 0$;

д) если в треугольнике ABC угол C – прямой, то $AC^2+BC^2 = AB^2$;

е) если фигура Ф – выпуклый пятиугольник, то сумма внутренних углов равна 540˚;

ж) если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются периодическими и имеют общий период T, то функция $f(x)+g(x)$ является периодической с периодом T.

2. Для тех теорем упражнения 1, для которых справедливы обратные теоремы, сформулируйте обратную, противоположную, и обратную противоположной теоремы.

3. В теоремах упражнения 1 выделите и обозначьте предикаты и запишите теоремы(в том числе обратные и противоположные, если они существуют) в символической форме.

4. Определите является ли A необходимым, достаточным или необходимым и достаточным условием для B:

а) A: $x = y$, B: $\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}y$;

б) A: «x делится на y», B: «x+y делится на y»;

в) A: $x > y$, B: $\cos x > \cos y$;

г) A: «$\vec{x}$ коллинеарен $\vec{y}$», B: $(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$;

д) A: «треугольники x и y симметричны относительно прямой l», B: $x = y$;

е) A: «точки x, y, z принадлежат одной окружности», B: «точки x, y, z не лежат на одной прямой»;

ж) A: $f'(x)=g'(x)$, B: $f(x)=g(x)$;

з) A: «площади треугольников x и y равны», B: «периметры треугольников x и y равны»;

и) A: «функции $f(x)$ и $g(x)$ четные», B: «функция $f(x)+g(x)$ четная».

§ 6. Задачи

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями, а какие не являются:

а) треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны между собой;

б) если все стороны треугольника равны, то этот треугольник является равносторонним;

в) если все стороны треугольника равны, то этот треугольник является прямоугольным;

г) в повести А.С. Пушкина «Капитанская дочка» 200 775 букв;

д) число 0,0000001 очень мало;

е) существует ли рациональное число, равное $\sqrt{2}$;

ж) число $(126^{3728}+15^{15876})^{2387}+(111^{35933}-189^{1183})+4$ является простым;

з) в записи числа $\sqrt{2}$ в виде бесконечной десятичной дроби $\sqrt{2}$ = 1,41421… на 1 000 000-м месте после запятой стоит 7.

2. Пусть x и y – переменные, определенные на множестве всех людей. Введем следующие обозначения:

$M(x)$: (x есть мужчина);

$D(x)$: (x есть женщина);

$J(x, y)$: (x моложе, чем y);

$K(x,y)$: (x есть ребенок, потомок (сын или дочь) y);

$B(x,y)$: (x состоит в браке с y);

$L(x)$: (x живет в Москве);

$G(x)$: (x живет в Минске).

Запишите в символическом виде следующие высказывания:

1) каждый человек имеет отца и мать;

2) каждый, кто имеет отца, имеет и мать;

3) каждый человек моложе своих родителей;

4) каждый человек моложе родителей своих родителей;

5) x состоит в браке;

6) существует мужчина, жена сына которого старше его самого;

7) x и y братья;

8) если в Москве живет жена, имеющая брата в Минске, то в Минске есть мужчина, имеющий сестру в Москве;

9) не всякий женатый мужчина живет в Москве;

10) не всякая женщина из Минска имеет сына в Москве;

11) все дети человека x состоят в браке;

12) существует человек, все дети которого состоят в браке;

13) каждый потомок человека x состоит в браке с потомком человека y;

14) у человека y есть сын, который не состоит в браке с дочерью человека x;

15) существует два человека такие, что каждый потомок одного из них состоит в браке с потомком другого;

16) существует два человека такие, что ни один сын одного из них не состоит в браке с дочерью другого;

17) если y является ребенком человека x, то каждый ребенок человека y является внуком человека x;

3. Пусть переменные в нижеследующих выражениях определены на множестве всех действительных чисел. Прочтите эти выражения и укажите, истинны ли они:

1) $\exists a \forall b \exists x (x^2+ax+b=0)$;

2) $\forall b \exists a \forall x (x^2+ax+b=0)$;

3) $\forall x \forall y (x+y=3 \to 2=3)$;

4) $\exists y \forall x (x+y=3)$.

4. Построить таблицы истинности для формул:

а) $(P\to Q)\vee(P\to(Q\wedge P))$;

б) $\urcorner(P\to\urcorner(Q\wedge P))\to(P\vee R)$;

в) $(P\wedge(Q\to P))\to\urcorner P$;

г) $((P\wedge\urcorner Q)\to Q)\to(P\to Q)$;

д) $(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$;
е) $(P\wedge(Q\vee\neg P))\wedge((\neg Q\to P)\vee Q)$.

5. Показать равносильность формул двумя способами: с помощью таблицы истинности и с помощью преобразований.

1) $p\to\neg(q\wedge r)\equiv(p\to q)\vee(p\to\neg r)$;
2) $p\to\neg(q\vee r)\equiv(p\to\neg q)\wedge(p\to\neg r)$;
3) $(p\to q)\to r\equiv(\neg p\to r)\wedge(q\to r)$;
4) $p\to(q\to r)\equiv(p\to\neg q)\vee(p\to r)$;
5) $p\vee(q\to r)\equiv(q\to p)\vee(\neg r\to p)$;
6) $p\wedge(q\to r)\equiv(p\to q)\to(p\wedge r)$;
7) $p\to(q\wedge r)\equiv(p\to q)\wedge(p\to r)$;
8) $p\to(q\wedge r)\equiv(p\to q)\vee(p\to r)$;
9) $\neg p\wedge\neg(q\to r)\equiv(q\to p)\wedge\neg(q\to r)$;
10) $\neg p\to\neg(q\vee r)\equiv(q\to p)\wedge(r\to p)$;
11) $\neg p\to\neg(q\vee r)\equiv(q\to p)\wedge(r\to p)$;
12) $\neg(p\to q)\to r\equiv(p\to q)\vee(p\to r)$;
13) $p\to\neg(q\to r)\equiv(p\to q)\wedge(p\to\neg r)$;
14) $p\wedge\neg(q\to r)\equiv(\neg q\to p)\wedge(r\to p)$;
15) $p\wedge\neg(q\to r)\equiv\neg(p\to r)\wedge(q\to r)$;
16) $\neg p\to\neg(q\to r)\equiv(\neg q\to p)\wedge(r\to p)$;
17) $\neg(p\to q)\to\neg r\equiv(p\to q)\vee(r\to q)$;
18) $p\vee(\neg q\to r)\equiv(\neg p\wedge\neg r)\to(p\vee q)$;
19) $p\to(\neg q\to r)\equiv(p\to q)\vee(p\to r)$;
20) $\neg p\to(q\wedge r)\equiv(\neg p\wedge r)\to(p\vee\neg q)$;
21) $\neg p\vee\neg(q\to r)\equiv\neg(p\wedge r)\wedge(p\to q)$;
22) $p\to\neg(q\to r)\equiv(\neg q\to\neg p)\wedge(r\to\neg p)$;
23) $\neg(p\to q)\to\neg r\equiv(p\to\neg r)\vee(\neg q\to\neg r)$;
24) $p\to\neg(q\vee r)\equiv\neg(p\vee q)\wedge(p\to\neg r)$;
25) $p\to(q\vee r)\equiv(p\wedge\neg r)\to(p\to q)$;
26) $p\wedge\neg(q\wedge r)\equiv(p\to q)\to(p\wedge\neg r)$;
27) $p\to\neg(q\wedge r)\equiv(p\to\neg q)\vee(q\to\neg r)$;
28) $\neg(p\to q)\to\neg r\equiv(p\wedge r)\to(p\to q)$;
29) $p\vee(q\wedge r)\equiv(\neg q\to p)\wedge(\neg p\to r)$;
30) $\neg p\wedge(q\vee r)\equiv\neg(r\to p)\vee(q\to p)$.

6. Доказать выполнимость формул:
а) $\neg(P\to\neg P)$;
б) $(P\to Q)\to(Q\to P)$;
в) $((Q\to(P\wedge R))\wedge\neg((P\vee R)\to Q)$.

7. Доказать тождественную истинность формул:

а) $(P \to Q) \vee (Q \to P)$;

б) $(P \to Q) \vee (P \to \neg Q)$;

в) $P \to (Q \to (P \wedge Q))$;

г) $(P \to \neg Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$;

д) $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$;

е) $P \to (Q \to P)$;

ж) $P \vee \neg P$;

з) $(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$;

и) $(P \wedge Q) \to P$;

к) $(P \wedge Q) \to Q$;

л) $P \to (P \vee Q)$;

м) $Q \to (P \vee Q)$;

н) $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R))$;

о) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$;

п) $\neg\neg P \to P$;

р) $P \to \neg\neg P$;

с) $(\neg Q \to \neg P) \to ((\neg Q \to P) \to Q)$;

т) $(P \vee P) \to P$;

у) $(Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R))$;

ф) $((P \to Q) \to P) \to P$;

х) $\neg P \to (P \to Q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барвайс, П. Основания математики (Логические исчисления и формализация арифметики) / П. Барвайс, Д. Гильберт. – М.: Наука, 1979. – 560 с.

2. Важенин, Ю.М. Введение в математику / Ю.М. Важенин, А.П. Замятин. – Свердловск, 1984. – 95 с.

3. Верещагин, Н.К. Языки исчесления / Н.К. Верещагин, А. Шень.– М.: МЦНМО, 2002. – 288 с.

4. Вольвачев, Р.Т. Элементы математической логики и теории множеств / Р.Т. Вольвачев. – Минск: университетское, 1986. – 112 с.

5. Гжегорчик, А. Популярная логика / А. Гжегорчик. – М.: Наука, 1979. – 112 с.

6. Горский, Д.П. Краткий словарь по логике / Д.П. Горский, А.А. Ивин, А.Л. Никифоров. – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.

7. Градштейн, И.С. Прямая и обратная теоремы (Элементы алгебры логики) / И.С. Градштейн. – М.: Просвещение, 1965. – 110 с.

8. Гудстейн, Р.Л. Математическая логика / Р.Л. Гудстейн. – М.: ИЛ, 1961. – 164 с.

9. Ершов, Ю.Л. Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

10. Калужнин, А.А. Что такое математическая логика? / А.А. Калужнин. – М.: Просвещение, 1964. – 112 с.

11. Канцедал, С.А. Дискретная математика / С.А. Канцедал. – М.: Форум, 2007. – 224 с.

12. Карпов, В.Г. Математическая логика и дискретная математика / В.Г. Карпов, В.А. Мощенский. – Минск: Вышэйшая школа, 1977. – 256 с.

13. Клини, С.К. Математическая логика / С.К. Клини. – М.: Мир, 1973. – 496 с.

14. Колмогоров, А.Н. Введение в математическую логику / А.Н. Колмогоров, А.Г. Драгалин. – М.: Изд_во Моск. ун-та, 1982. – 120 с.

15. Колмогоров, А.Н. Математическая логика. Дополнительные главы: учеб. пособие / А.Н. Колмогоров, А.Г. Драгалин. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 120 с.

16. Конанов, С.Г. Введение в математику: в трех частях / С.Г. Конанов, Р.И. Тышкевич, В.И. Янчевский. – Минск: БГУ, 2003. – 112 с., 126 с., 130 с.

17. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел / Л.Я. Куликов. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с.

18. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Наука, 1975. – 240 с.
19. Лельчук, М.П. Практические занятия по алгебре и теории чисел / М.П. Лельчук, И.И. Полевченко, А.М. Радьков, Б.Д. Чеботаревский. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – 302 с.
20. Линдон, Р. Заметки по логике / Р. Линдон. – М.: Мир, 1968. – 128 с.
21. Лихтарников, Л.М. Первое знакомство с математической логикой / Л.М. Лихтарников. – Санкт-Петербург: Лань, 1997. – 112 с.
22. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
23. Мощенский, В.А. Лекции по математической логике / В.А. Мощенский. – Минск: Изд-во БГУ им. Ленина, 1973. – 160 с.
24. Никольская, И.Л. Математическая логика / И.Л. Никольская. – М.: Высшая школа, 1981. – 127 с.
25. Новиков, П.С. Элементы математической логики / П.С. Новиков. – М.: Физматгиз, 1973. – 400 с.
26. Новиков, Ф.А. Дискретная математика / Ф.А. Новиков. – М.: Питер, 2007. – 364 с.
27. Плотников, А.Д. Дискретная математика: учебное пособие / А.Д. Плотников. – Минск: Новое издание, 2008. – 320 с.
28. Справочная книга по математической логике: в 4 ч. / под ред. Дж. Барвайс. – М., 1982. –392 с., 376 с., 360 с., 392 с.
29. Столяр, А.А. Логическое введение в математику / А.А. Столяр. – Минск: Вышэйшая школа, 1971. – 224 с.
30. Столяр, А.А. Как математика ум в порядок приводит / А.А. Столяр. – Минск: Вышэйшая школа, 1991. – 207 с.
31. Столл, Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р.Р. Столл. – М.: Просвещение, 1968. – 231 с.
32. Харин, Н.Н. Математическая логика и теория множеств / Н.Н. Харин. – Росвузиздат, 1963. – 192 с.
33. Хромой, Я.В. Математическая логика (на укр. яз.) / Я.В. Хромой. – Киев: Вища школа, 1983. – 208 с.
34. Чёрч, А. Введение в математическую логику: т. 1 / А. Чёрч. – М.: ИЛ, 1961. – 484 с.
35. Шенфилд, Дж. Математическая логика / Дж. Шенфилд. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
36. Эдельман, С.Л. Математическая логика: уч. пособие для ин-тов / С.Л. Эдельман. – М.: Высшая школа, 1975. – 176 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ: ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Методические рекомендации

Составители:
НАУМИК Михаил Иванович
МЕХОВИЧ Андрей Павлович

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Л.Р. Жигунова*

Подписано в печать .2014. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,21. Уч.-изд. л. 1,46. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.