Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

МАТЕМАТИКА:

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. СООТВЕТСТВИЯ. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ. ОТОБРАЖЕНИЯ. КОМБИНАТОРИКА. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2014

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
М34

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 28.10.2014 г.

Составители: доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук **В.В. Устименко;** старший преподаватель кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова **Т.В. Титова**

Р е ц е н з е н т :
доцент кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук
С.А. Шлапаков

М34 **Математика: множества и операции над ними. Соответствия. Отношения на множестве. Отображения. Комбинаторика. Математические понятия. Элементы математической логики :** методические рекомендации / сост. : В.В. Устименко, Т.В. Титова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2014. – 50 с.

Учебное издание написано в соответствии с действующей программой по математике и предназначено для студентов дневного и заочного отделений, обучающихся по специальности 1-01 02 02-01 «Начальное образование». В данных методических рекомендациях предлагается необходимый задачный материал для усвоения теоретического курса.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Математика» призван дать студентам педагогического факультета подготовку, необходимую для успешного обучения математике учащихся начальных классов.

Овладеть данным курсом, приобрести необходимые умения и навыки можно лишь в процессе решения задач. Предложенные методические рекомендации должны оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели, написаны в соответствии с действующей программой этого курса и состоят из следующих разделов: «Множества и операции над ними», «Соответствия», «Отношения на множестве», «Отображения», «Комбинаторика», «Математические понятия», «Элементы математической логики».

Предлагаемые в рекомендациях задания способствуют развитию культуры мышления студентов и умения пользоваться языком математики.

При создании методических рекомендаций были использованы следующие задачники:

1) Задачник-практикум по математике. Пособие для студентов-заочников факультета подготовки учителей начальных классов пединститутов / под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977.
2) Лаврова, Н.Н. Задачник-практикум по математике: учеб. пособие для студентов-заочников I–III курсов фак. педагогики и методики нач. обучения пед. институтов / Н.Н. Лаврова, Л.П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1985.

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Множества и элементы. Пустое множество

1. Как называют множество коров, пасущихся вместе?

2. Как можно назвать множество артистов, работающих в одном театре?

3. Как называют: а) множество всех пионеров школы; б) множество всех пионеров класса?

4. Приведите примеры множеств, составленных из объектов следующих видов: а) неодушевленных предметов; б) животных; в) растений; г) абстрактных понятий; д) целых чисел; е) геометрических фигур; ж) геометрических величин.

5. Назовите элементы, принадлежащие множеству: а) студентов вашей группы; б) предметов, изучаемых на педагогическом факультете; в) всех частей света; г) республик, входящих в СНГ.

6. A – множество многоугольников. Принадлежит ли этому множеству: а) восьмиугольник; б) параллелограмм; в) отрезок; г) параллелепипед; д) круг; е) полукруг?

7. Какие из записей верны:

а) $270 \in N$;
б) $1 \in N$;
в) $0 \in N$;
г) $-70 \in N$;
д) $1\frac{2}{3} \in N$;
е) $14 \notin N$;
ж) $-7 \in N$;
з) $-\frac{1}{4} \in N$;
и) $18 \in N$;
к) $0 \in Z$;
л) $-27 \in Z$;
м) $22\frac{7}{8} \notin Z$;
н) $22\frac{7}{8} \notin N$;
о) $-14{,}2 \notin Z$;
п) $-14{,}2 \in Z$?

8. Обозначим через E множество европейских государств, а через A– множество азиатских государств. Какие из следующих записей верны: а) Франция $\in E$; б) Испания $\notin E$; в) Монголия $\notin A$; г) Индия $\in A$; д) Иран $\notin E$; е) Волга $\in E$; ж) Гималаи $\notin A$; з) Нигерия $\notin A$; и) Япония $\in E$; к) Альпы $\notin E$; л) Швеция $\notin E$; м) Байкал $\in A$?

9. Пусть C– множество существительных, $П$ – множество прилагательных, $Г$ – множество глаголов, $Н$ – множество наречий. Укажите среди следующих записей верные:

а) «стол» $\notin Г$;
б) «человек» $\in C$;
в) «стоять» $\in Г$;
г) «мести» $\in Н$;
д) «зеленый» $\notin П$;
е) «быстро» $\in Н$;
ж) «течь» $\in C$;
з) «течь» $\in Г$;
и) «стекло» $\notin C$;
к) «стекло» $\notin Г$;
л) «стеклянный» $\in П$.

10. Обозначим через *П* множество простых чисел, через *Ч* – множество четных целых чисел и через *Н* – множество нечетных целых чисел. Укажите, каким из этих множеств принадлежат числа 7, 11, 12, 18, 115, 217, 321, 612, 318, 233. Запишите ответ с помощью символа ∈.

11. Дано множество B= {10, $12\frac{3}{4}$, 17.3, –7, 136}. Какие натуральные числа принадлежат этому множеству? Назовите три числа, не принадлежащие этому множеству. Сделайте верные записи.

12. Множество S состоит из чисел–2, –3, –4, –5. Запишите это множество. Назовите числа, противоположные данным. Запишите множество полученных чисел.

13. Перечислите элементы следующих множеств: *А* – множество нечетных чисел на отрезке [1; 15]; B – множество натуральных чисел, меньших 8; C – множество натуральных чисел, больших 10, но меньших 12; D – множество двузначных чисел, делящихся на 10; E – множество натуральных делителей числа 18;F – множество чисел, абсолютная величина которых равна $^2/_3$.

14. Перечислите элементы следующих множеств и запишите эти множества: а) множество различных букв в слове «головоломка»; б) множество различных цифр числа 134, 433, 154.

15. Прочтите следующие записи и перечислите элементы каждого из множеств: *А*= {a | a – студент вашей группы, чья фамилия начинается с буквы Л}; B = {b | b – месяц года, в названии которого входят четыре и только четыре различные буквы}; C = {c | c – европейское государство, название которого начинается с буквы Ш}; *D* = {*d* | *d*– число, меньшее 10 и делящееся на 3};

$E = \{x \mid x \in N, 1 < x < 5\}$;
$F = \{x \mid x \in Z, -6 \le x \le 4\}$;
$K = \{x \mid x \in N, x < 7\}$;
$L = \{x \mid 5x = x - 7\}$;
$M = \{y \mid 2(5y + 10) = 10y + 20\}$;
$N = \{x \mid 5x - 7 = 3(x - 7)\}$;
$Q = \{x \mid x(x + 12) = 0\}$;
$R = \{x \mid x \in N,\ x^2 = 4\}$;
$S = \{x \mid x \in Z,\ x^2 = 4\}$;
$T = \{x \mid x \in Z,\ x^2 = 2\}$;
$U = \{x \mid x \in R,\ x^2 = 2\}$;
$V = \{x \mid x \in N, x^2 < 9\}$;
$W = \{x \mid x \in N,\ x^2 \le 9\}$.

16. Изобразите на числовой прямой следующие множества:

а) $\{x \mid x \in N,\ x \le 3\}$;
б) $\{x \mid x \in Z,\ -2 \le x \le 2\}$;
в) $\{x \mid x \in R,\ x > 3{,}2\}$;
г) $\{x \mid x \in R,\ x < -7\}$;
д) $\{x \mid x \in R,\ -2{,}7 \le x \le 0\}$;
е) $\{x \mid x \in R,\ 3{,}4 < x \le 8\}$;
ж) $\{x \mid x \in R, -4\frac{1}{2} \le x \le -2\}$.

17. Укажите характеристические свойства элементов следующих множеств:

а) {а, е, и, о, у, э, ы, ю, я};

б) {111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999};

в) {существительные, глаголы, прилагательные, наречия, предлоги, союзы, числительные, междометия}.

18. Каким общим свойством обладает форма следующих букв русского алфавита:

а) ВЕЖЗКНОСФХЭЮ?

б) АДЖМНОПТФХШ?

в) ЖНОФХ?

19. Постройте $\angle AOB$. Где находится точка P, обладающая свойством: $\angle AOP = \angle BOP;$

20. Отметьте точку O и постройте множество точек P, таких, что: а) $|OP| = 5$ см; б) $|OP| \leq 5$ см; в) $|OP| \geq 5$ см.

21. Из каких элементов состоят следующие множества: а) множество трехзначных чисел, составленных из цифр 1 и 3; б) множество трехзначных чисел, составленных из цифр 1, 3, 5, причем никакие две цифры не встречаются дважды; в) множество трехзначных чисел, составленных из цифр 1, 3, 5, причем любые две соседние цифры различны; г) множество трехзначных чисел, сумма цифр которых равна 5?

22. Какие из следующих множеств пусты: а) множество людей на Венере; б) множество городов Беларуси с населением более 1 млн.; в) множество европейских государств, название которых начинаются с буквы *Я*; г) множество параллелограммов с неравенствами противоположными сторонами; д) множество квадратов без центра симметрии: е) множество натуральных чисел, меньше 1; ж) множество двузначных чисел, меньших 9; з) множество натуральных чисел, меньших 2.

23. Образованы множества студентов вашей группы, чьи фамилии начинаются с буквы *А*, с буквы *Б*, …, с буквы *Я*. Какие из этих множеств пусты?

24. Докажите, что следующие множества являются пустыми:

а) $\{x \mid x \in N, x < 0\}$;б) $\{x \mid x \in N, 8 < x < 9\}$; в) $\{x \mid x \in N, x = \frac{1}{3}\}$.

25. Найдите множество корней каждого из уравнений. Какие из этих множеств пусты:

а) $4x + 5 = 4(x - 7)$, $x \in R$; б) $2x + 3 = 3$, $x \in R$;

в) $2(x-5)=3x, x \in R_+$;

г) $x^2-4=0, x \in Z$;

д) $x^2+16=0, x \in R$;

е) $(2x+7)(x-2)=0, x \in R_+$.

26. Укажите элементы следующих множеств:

а) $\{a, b, c\}$;

б) $\{a\}$;

в) $\{\{a\}\}$;

г) $\varnothing$;

д) $\{\varnothing\}$;

е) $\{\{a, b\},\{c\}\}$;

ж) $\{\{a, b, c\}, a\}$;

з) $\{\{a\}, a, \varnothing\}$.

Подмножества. Равные множества

27. Даны множества $A = \{a,b,c,d,e,f,g,k\}$, $B = \{a, e, k\}$, $C = \{b, d, g,k, t\}$, $D = \{a,e\}$, $E = \{e, f, k, g, a\}$. Укажите, какие из них являются подмножествами множества A. Являются ли D подмножеством C? Подмножеством какого множества является B?

28. Дано множество $C = \{213, 45, 324, 732, 136\}$. Составьте подмножество множества C, состоящее из чисел, которые:

а) делятся на 3;

б) делятся на 9;

в) не делятся на 4;

г) не делятся на 5;

д) не делятся на 3.

29. Образуйте все подмножества множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

30. Даны пары множеств:

а) A – множество городов Беларуси, B – множество городов России;

б) A – множество городов Беларуси, B – Витебск, Могилёв, Минск, Гродно;

в) A – множество городов Франции, B – множество городов, находящихся в Европе;

г) A = {Пушкин, Лермонтов, Некрасов, Блок, Есенин, Маяковский}, B – множество всех поэтов XIX и XX вв.;

д) A = {«стол», «дерево», «стальной», «вязать»}, B – множество всех существительных;

ж) A – множество всех существительных среднего рода, B = {«окно», «поле», «счастье», «марево»}.

Укажите, для каких пар одно из множеств является подмножеством другого.

31. В множестве I плоских четырёхугольников заданы подмножества: A – параллелограммов, B – ромбов, C – трапеций, D – прямоугольников, *E* – квадратов. Какими характеристическими свойствами можно задать эти подмножества?

32. Даны множества: *A* – всех трапеций, *B* – всех прямоугольников, *C* – всех параллелограммов,*K* – всех многоугольников. Выпишите буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая последующая буква обозначала подмножество предыдущего.

33. Пусть разные строчные буквы обозначают разные предметы. Для каких из следующих пар множеств имеет место отношения $A \subset B$ или $B \subset A$:

а) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d\}$;

б) $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$;

в) $A = \varnothing$, $B = \varnothing$;

г) $A = \varnothing$,$B = \{a, b, c\}$;

д) $A = \varnothing$, $B = \{\varnothing\}$;

е) $A = \{\{a\}, a, \varnothing\}$, $B = \{a\}$;

ж) $A = \{\{a, b\}, \{c, d\}, c, d\}$, $B = \{\{a, b\}, c\}$?

34. Какие из следующих пар множеств связаны между собой отношениями включения:

а) $A = \{x \mid x \in N, x > 2\}$, $B = \{y \mid y \in N, y > 2\}$;

б) $A = \{x \mid x \in R, x > 0\}$, $B = \{y \mid y \in N, y > 0\}$;

в) $A = \{x \mid x \in N, x^2 > 4\}$, $B = \{x \mid x \in N, x^2 > 5\}$;

г) *A* – множество многоугольников с периметром 4, *B* – множество квадратов с площадью 1?

35. Верно ли, что:

а) $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

б) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

в) $\{1, 3\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

г) $\{1, 3\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?

36. Равны ли следующие множества:

а) $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{6, 4, 2\}$;

б) $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{I, II, III\}$;

в) $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ и $B = \{2, 3, 1\}$;

г) $A = \{\sqrt{256}, \sqrt{81}, \sqrt{16}, \sqrt{1}\}$ и $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$?

37. Даны множества: *A* – множество натуральных чисел; *B* – множество чётных натуральных чисел; *C* – множество нечетных чисел; *D* – множество чисел, кратных 2 и 3 одновременно; *E* – множество чисел, десятичная запись которых оканчивается нулём; *F* – множество чисел, кратных 6; *K* –

множество чисел, кратных 3; M – множество чисел, кратных 2 и 5 одновременно. Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами других данных множеств. Есть ли среди данных множеств равные?

38. Среди следующих пар множеств найдите пары равных множеств:

а) $X = \{3, 5, 7, 9\}$, Y – множество нечётных чисел, больше 2 и меньше 10;

б) $X = \{4, 6, 8\}$, Y – множество чётных чисел, больших 1 и меньших 9;

в) X – множество плоских четырёхугольников, Y – множество плоских фигур, ограниченных замкнутой ломанной из четырёх отрезков;

г) X – множество двузначных чисел, кратных 9, Y – множество двухзначных чисел, сумма цифр которых кратно 9;

д) X – множество сумм двух нечётных натуральных чисел, Y – множество чётных натуральных чисел;

е) X – множество точек плоскости, равноудалённых от точек M и K, Y – множество точек прямой, проходящей через середину отрезка MK и перпендикулярной этому отрезку;

ж) X – множество точек, лежащих на окружности с центром O и радиусом 5, Y – множество точек, расстояние которых от точки O равно 5;

з) X – множество точек, лежащих внутри окружности с центром O и радиусом 5, Y – множество точек, расстояние которых от точки O больше, чем 5.

Пересечение множеств

39. Найдите попарные пересечения следующих множеств: $M = \{36, 29, 15, 68, 27\}$; $P = \{4, 15, 27, 47, 36, 90\}$; $Q = \{90, 4, 47\}$. Найдите $M \cap P \cap Q$.

40. Известно, что A – множество всех натуральных делителей числа 18, B – множество всех натуральных делителей числа 24. Назовите элементы множества $A \cap B$ и проиллюстрируйте решение этой задачи при помощи диаграммы Эйлера-Венна.

41. P – множество двузначных натуральных чисел, S – множество всех нечётных чисел. Какие числа входят в множество $K = P \cap S$? Верно ли, что: а) $21 \in K$; б) $32 \in K$; в) $7 \notin K$; г) $17 \notin K$?

42. Найдите пересечение множеств различных букв, входящих в слово «математика», и множеств различных букв, входящих в слово «грамматика».

43. Перечислит и запишите натуральные числа, принадлежащие пересечению $A \cap B$, если множеству A принадлежат действительные числа, большие, чем –3,7, но меньшие 10, а множеству B – действительные числа, большие 0, но меньшие 12,3.

44. Найдите пересечение числового отрезка [1; 5] с числовым отрезком [3; 7].

45. Изобразите с помощью диаграммы Эйлера-Венна следующие случаи: а) множества A и B совпадают; б) множества A и B не пересекаются; в) множества A – собственное подмножество множества B; г) множество B – собственное подмножество множества A.Какой случай пропущен? Постройте соответствующие диаграммы Эйлера-Венна.

46. M – множество спортсменов в некоторой школе, P – множество мальчиков в этой школе. Изобразите эти множества при помощи диаграммы Эйлера-Венна. Укажите характеристическое свойство элементов множества $M \cap P$.

47. В множестве четырёхугольников на плоскости выделены следующие подмножества: A – четырёхугольники, диагонали которых взаимно перпендикулярны; B – четырёхугольники, длины диагоналей которых равны; C – четырёхугольники, диагонали которых в точке пересечения делятся пополам. Какие фигуры принадлежат множествам: а) $A \cap C$; б) $B \cap C$; в) $A \cap B$; г) $A \cap B \cap C$?

48. Начертите три пересекающихся круга. Внутреннюю часть одного круга обозначьте A, второго – B, третьего – C. Покажите следующие множества: $A \cap B$, $(A \cap B) \cap C$, $B \cap C$, $A \cap (B \cap C)$.Проверьте, что $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

49. Проверьте это же равенство для множеств $A = \{1, 2, 3, 4\}$,$B = \{3, 4, 5, 6\}$,$C = \{2, 4, 6\}$.

50. Три множества P, N и Qизображены тремя треугольниками, имеющими общие части (рис. 1). Отметьте штриховкой области, изображающие следующие множества (для каждого случая сделайте отдельный чертёж): а) $N \cap Q$; б) $P \cap N$; в) $P \cap Q$; г) $N \cap P \cap Q$; д) $(P \cap N) \cap (N \cap Q)$. Как короче записать д)?

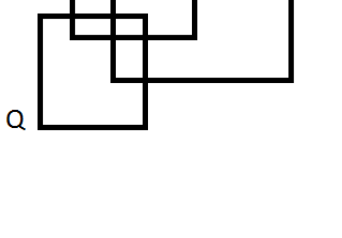

Рис. 1.

51. Из 100 учащихся, изучающих английский и немецкий языки, 85 изучают английский, 45 – немецкий. Сколько человек изучают оба языка?

52. В классе 30 человек, занимающихся на факультативных занятиях по физике и математике. Известно, что 10 человек изучают оба предмета, а математикой занимаются 25 человек. Сколько человек изучает только физику?

Объединение и вычитание множеств

53. Даны множества $P = \{а, б, в, г, д, е\}$ и $E = \{а, ж, з, е, к\}$. Найдите объединение этих множеств.

54. C – множество букв в Вашем имени, D – множество гласных букв русского алфавита. Найдите множества $C \cup D$ и $D \cup C$ и сравните их. Для множеств C и D постройте диаграммы Эйлера – Венна.

55. Множество М есть объединение множества двузначных натуральных чисел и множества натуральных чисел от 1 до 7. Принадлежат ли множеству М числа: 14, 99, 100, 5, 7, 10? Запишите ответ с помощью символа $\in$ или $\notin$.

56. $A = \{n | n \in N,\ n < 5\}$, $B = \{n | n \in N,\ n > 7\}$. Найдите объединение этих множеств. Верно ли, что а) $4 \in A \cup B$; б) $-3 \in A \cup B$; в) $6 \in A \cup B$?

57. Из каких чисел состоит объединение: а) множества натуральных чисел N и множества целых неотрицательных чисел N_0 ; б) множества целых неотрицательных чисел и множества целых отрицательных чисел?

58. Какие геометрические фигуры принадлежат объединению: а) множества параллелограммов с множеством прямоугольников; б) множества равносторонних, множества равнобедренных и множества разносторонних треугольников?

59. Найдите $A \cup B$, если:

а) $A = \{x | x = 8k,\ k \in Z\}$, $B = \{x | x = 8l - 4,\ l \in Z\}$;

б) $A = \{x | x = 6k - 1,\ k \in Z\}$, $B = \{x | x = 6l + 4,\ l \in Z\}$;

в) $A = \{x | x = 3k + 1,\ k \in Z\}$, $B = \{x | x = 3l + 2,\ l \in Z\}$.

60. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Перечислите элементы, входящие в множества: а) $A \cup B \cup D$; б) $A \cap B \cap C \cap D$; в) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$; г) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$.

61. Множество M состоит из студентов данной группы, знающих английский язык, множество P – из студентов, знающих ненемецкий язык, множество Q – из студентов, знающих французский язык. Опишите множества: а) $(M \cup P) \cap Q$; б) $M \cup (P \cap Q)$; в) $(M \cap P) \cup Q$.

62. Сосчитайте, сколько элементов в следующих множествах: $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 40\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 37\}$; $C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, g, h\}$.

63. Пусть $A = \{2, 3, 4, 5, 7, 10\}$; $B = \{3, 5, 7, 9\}$; $C = \{4, 9, 11\}$. Сколько элементов в следующих множествах: а) $A \cup (B \cup C)$; б) $(C \cup B) \cup A$; в) $A \cap (B \cup C)$; г) $A \cup (B \cap C)$; д) $A \cap (B \cap C)$.

64. Какое из двух множеств является подмножеством другого: а) P и $P \cap Q$; б) P и $P \cup Q$?

65. Из 100 школьников 40 играют в футбол, а 50 в волейбол. Что можно сказать о числе школьников, играющих в обе игры? О числе школьников, играющих хотя бы в одну из этих игр?

66. Из 80 школьников 40 играют в футбол, а 50 в волейбол. Что можно сказать о числе школьников, играющих в обе игры? О числе школьников, играющих хотя бы в одну из этих игр?

67. Множество A состоит из целых чисел от –5 до 10. Множество B состоит из натуральных чисел от 3 до 15. Перечислите элементы множеств: $A \backslash B$ и $B \backslash A$. Какие элементы входят в множество $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$?

68. P – множество двузначных натуральных чисел, Q – множество всех четных натуральных чисел. Изобразите множества P и Qс помощью диаграмм Эйлера-Венна. Какие числа принадлежат множеству $P \backslash Q$, множеству $Q \backslash P$?

69. Найдите дополнение в множестве всех треугольников к множеству: а) всех равносторонних треугольников; б) всех равнобедренных треугольников; в) всех прямоугольных треугольников.

Задачи на все операции над множествами

70. Даны следующие пары множеств:

а) $A = \{а, б, в, г, д, е\}$, $B = \{а, в, д, ж\}$;

б) $A = \{а, б, в\}$, $B = \{а, б, в, г, д\}$;

в) $A = \{г, д, е\}$, $B = \{а, б, в\}$;

г) $A = \{е, д, г\}$, $B = \{г, д, е\}$;

д) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2\}$;

е) $A = \{8, 10, 12, \ldots\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$;

ж) $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $B = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$;

з) $A = \{x|\ x = 2n,\ n \in N,\ n \leq 30\}$, $B = \{x|\ x = 3n,\ n \in N,\ n \leq 20\}$;

и) A – множество нечетных натуральных чисел, B – множество простых чисел, больших чем 2;

к) A – множество четных натуральных чисел, B – множество простых чисел, больших чем 2;

л) $A = \{x|x = \frac{n}{n+1}, n \in N, n \leq 20\}$, $B = \{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots; \frac{20}{21}\}$;

м) A– множество квадратов, B – множество прямоугольников;

н)A– множество параллелограммов, B – множество прямоугольников;

о)A – множество равнобедренных треугольников, B – множество равносторонних треугольников.

1) Найдите для каждой пары подходящее универсальное множество;

2)выберите пары множеств, которые связаны одним из соотношений: =, $\subset, \supset$;

3) найдите пересечение каждой пары множеств;

4) найдите разность первого и второго множеств в каждой паре;

5) найдите объединение каждой пары множеств;

6) изобразите каждую пару множеств при помощи диаграмм Эйлера – Венна;

7) для каждой пары найдите дополнение к первому множеству в объединении обоих множеств.

71. A – множество различных букв в слове «универмаг», B – множество различных букв в слове «лекторий». Назовите элементы, принадлежащие множествам: а)$A \cup B$; б)$A \cap B$; в)$A \setminus B$; г)$B \setminus A$.

72. Пусть U – универсальное множество всех треугольников, A – множество равнобедренных треугольников, B – множество равносторонних треугольников, C – множество прямоугольных треугольников. Укажите характеристическое свойство элементов следующих множеств: а)$A \cap B \cap C$; б) $A \cap B' \cap C$; в)$A' \cap B \cap C$; г)$A \cap B \cap C'$; д)$A' \cap B' \cap C$; е)$A' \cap B' \cup C'$.

73. Изобразите при помощи диаграмм Эйлера – Венна следующие множества: а)$A \cap B'$; б)$A' \cap B$; в)$(A \cap B^{'}) \cup (A' \cap B)$; г)$(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; д) $(A \cup B)/C$.

74. Упростите следующие выражения: а) $A \cap (A \cup B)$; б)$(P \cap Q) \cap (Q' \cap P)$.

75. K – множество компьютерных спортсменов в классе, S – множество нормальных спортсменов в классе, Q – множество отличников в классе. Опишите словами и изобразите при помощи диаграмм Эйлера – Венна следующие множества: а)$K \cap S$; б)$S \cap Q'$; в)$K' \cap S'$; г)$K' \cup S$; д)$K \cap S \cap Q'$; е)$(K' \cap S) \cup Q$; ж)$(K' \cup S) \cap Q$.

76. Из 100 студентов английский язык изучают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 5, все три языка – 3 студента. Сколько студентов не изучает ни одного языка? Сколько студентов изучают только один язык?

77. Выбрано некоторое множество натуральных чисел. Известно, что среди них имеется 100 чисел, кратных двум; 115 чисел, кратных трем; 120 чисел, кратных пяти; 45 чисел, кратных шести; 38 чисел, кратных десяти; 50 чисел, кратных пятнадцати; 20 чисел, кратных тринадцати. Составьте диаграмму Эйлера – Венна и определите, сколько элементов в заданном множестве.

78. Докажите, что для любых множеств верны следующие соотношения:

а) $A \cap B \subset A \cup B$;
б)$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$;
в)$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$;
г)$(A \setminus B) \cap B = \emptyset$;
д) $A \setminus B = A \,/\, A \cap B$;
е)$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
ж) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
з)$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;
и) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
к) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$
л) $(A \setminus B) \cup C \supset (A \cup C) \setminus B$.

79. Пусть A, B и C – подмножества универсального множества U. Докажите, что:а) $A \setminus B = A \cap B'$; б) $(A \setminus B)' = A' \cup (A \cap B)$; в)$A' \cup (B \cup C') = (A \cap B)' \cap (A \cap C)'$.

80. Докажите, что:

а)$A \vartriangle B = B \vartriangle A$;
д)$(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$;
б)$(A \vartriangle B) \vartriangle B = A$;
е)$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
в)$A \vartriangle \emptyset = A$;
ж)$A \cup B = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \cap B)$;
г) $A \vartriangle A = \emptyset$;
з)$(B \setminus A) \vartriangle (C \setminus A) = (A \cup B) \vartriangle (A \cup C)$.

81. Для следующих пар множеств найдите множества: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \vartriangle B$:

а) $A = \{a, b, c\}, B = \{c, d\}$;
б) $A = \{\{a, b\}, c\}, B = \{c, d\}$;
в)$\{x | x \in N, x < 3\}, B = \{x | x \in N, x \geq 3\}$;
г)$\{x | x \in Z, x < 1\}, B = \{x | x \in N, x < 1\}$;
д)$\{x | x \in Z, x < 1\}, B = \{x | x \in Z, x < 2\}$.

82. Для каждого из нижеследующих случаев изобразите все совместные с ним диаграммы Эйлера – Венна для множеств A, B и C. В каких случаях получается единственная диаграмма?

а) $A \subset B, A \neq B$ и $B \subset C, B \neq C$;
б) $A \subset B, A \neq B$ и $B \cap C = \emptyset$;
в) $A \subset B, A \neq B$ и $B \cap C, B \neq \emptyset$;
г) $A \subset B, A \neq B$ и $B \setminus C \neq \emptyset$;
д) $A \cap B \neq \emptyset$ и $B \subset C, B \neq C$;
е) $A \cap B = \emptyset$ и $B \cap C = \emptyset$;
ж) $A \cap B = \emptyset$ и $B \cap C \neq \emptyset$;
з) $A \cap B = \emptyset$ и $B \setminus C \neq \emptyset$;
и) $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ и $B \cap C = \emptyset$;
к) $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ и $B \cap C \neq \emptyset$;
л) $A \cap B \neq \emptyset$ и $B \cap C \neq \emptyset$;
м) $A \cap B \neq \emptyset$ и $B \setminus C \neq \emptyset$;
н) $A \setminus B \neq \emptyset$ и $B \subset C, B \neq C$;
о) $A \setminus B \neq \emptyset$ и $B \cap C = \emptyset$;
п) $A \setminus B \neq \emptyset$ и $B \cap C \neq \emptyset$;
р) $A \setminus B \neq \emptyset$ и $B \setminus C \neq \emptyset$.

Декартово произведение множеств

83. Сколько букв в слове «параллелограмм»? Сколько различных букв? Запишите множество букв слова «параллелограмм». Запишите кортеж букв, входящих в это слово. Какова длина этого кортежа? Какие из его компонентов одинаковы?

84. Сколько цифр в записи числа 178 877? Сколько различных цифр в записи этого числа? Какова длина кортежа <1, 7, 8, 8, 7, 7>? Укажите вторую и четвертую компоненты этого кортежа.

85. Запишите множество букв, входящих в слово «лоб». Образуйте всевозможные кортежи длины 3 из букв, входящих в это слово, такие, что ни одна буква не встречается в них дважды.

86. Дано множество $\{5,2,3\}$. Запишите все двузначные числа, в которые входят эти цифры.

87. Запишите все трехзначные числа, в которые входят цифры 2, 3, 4. Цифры в записи могут повторяться.

88. Запишите множества всех дробей, числителем каждой из которых является число из множества A=$\{7, 8\}$, а знаменателем - число из множества B = $\{3,4,5\}$. Сколько получилось таких дробей?

89. Даны множества P=$\{1, 2, 3\}$ и K=$\{m, n\}$. Найдите все элементы декартовых произведений $P \times K$ и $K \times P$.

90. Запишите все двузначные числа, в которых число десятков принадлежит множеству $\{5, 6,2\}$, а число единиц – множеству $\{0, 1, 6\}$.

91. Составьте множества $A \times B$ и $B \times A$, если: а)$A = \{0, 1, 2\},\ B = \{1, 2, 3\}$; б)$A = \{1\},\ B = \{1, 2, 3, 4{,}5\}$; в) $A = \varnothing,\ B = \{1, 2, 3, 4\}$.

92. Запишите множества $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$, если $A = \{0, 1\}$, $B = \{1\},\ C = \{2, 3\}$.

93. Дано множество $A = \{a,\ b,\ c\}$. Составьте декартово произведение $A \times A$. Сколько элементов содержит это множество?

94. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составьте все двузначные числа. Сколько двузначных чисел можно составить с помощью этих цифр? Сколько среди них таких, которые: а) начинаются цифрой 2; б) содержат одинаковые цифры; в) оканчиваются цифрой 5?

95. Составьте все открытые и закрытые слоги из букв, входящих в множества $A \times B$ и$B \times A$? Отличаются ли они числом элементов?

96. Изобразите геометрически декартово произведение: а) окружности и прямой; б)круга и отрезка; в) треугольника и отрезка; г) отрезка и луча; д)отрезка и прямой.

97. Проиллюстрируйте смысл следующих равенств с помощью операций над конечными множествами:

а) $3 + 8 = 8 + 3$;

б)$7 \times 5 = 5 \times 7$;

в)$8 \times (2 + 3) = 8 \times 2 + 8 \times 3$;

г)$(2 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 5)$;

д)$12 \times 1 = 1 \times 12 = 12$

е)$7 + 0 = 0 + 7 = 7$;

ж)$(8 - 3) + 7 = (8 + 7) - 3$.

98. На рисунке 2 в прямоугольной системе координат изображены точки A, B, C, D, E, K, F. Назовите и запишите пары чисел, которые являются координатами этих точек.

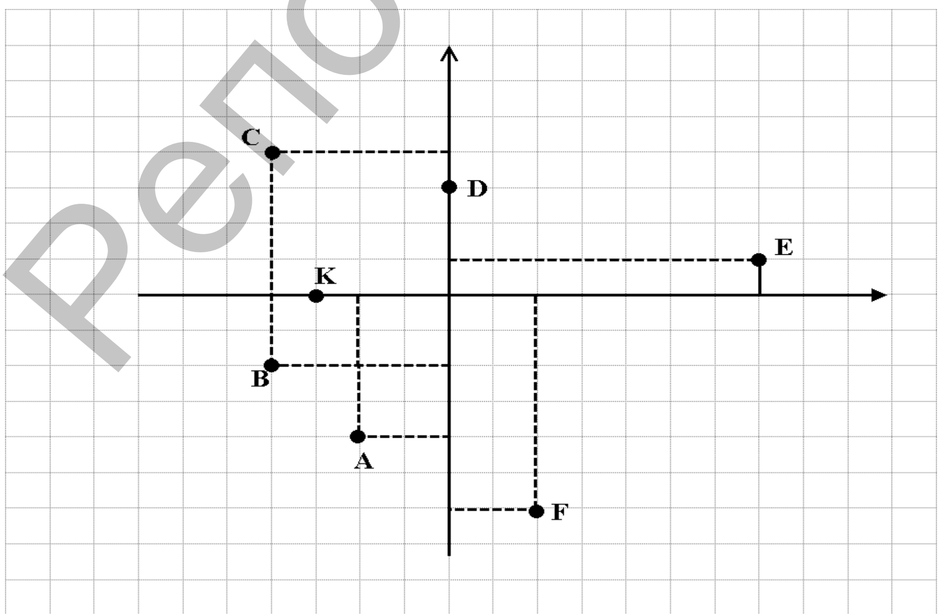

Рис. 2.

99. Постройте в прямоугольной системе координат точки, координаты которых есть пары чисел: $< 2{,}2 >, < 3,-7 >, < -1\frac{1}{2}, 3 >, < -2,-4 >, < 5{,}0 >, < 0{,}0 >$. Назовите координаты точек, симметричных данным относительно: а) оси OX; б) оси OY; в) начала координат.

100. Найдите декартово произведение множеств: $D = \{x \mid x \in N, 3 < x \leq 7\}$ и $K = \{y \mid y \in N,\ 4 \leq y < 9\}$.Изобразите его элементы точками в прямоугольной системе координат.

101. Изобразите в прямоугольной системе координат множество $X \times X$, если $X = \{x \mid x \in R, -1 \leq x \leq 6\}$. Принадлежат ли этому множеству пары: $< 2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} >, < 0{,}0 >, < 5{,}5 >$?

102. Найдите декартовы произведения множеств и изобразите их элементы на координатной плоскости:

а)$A = \{x \mid x \in R, x > 0\}, B = \{y \mid y \in R, y < 0\}$;

б)$A = \{x \mid x \in R, x = 0\}, B = \{y \mid y \in R, y > 0\}$;

в)$A = \{x \mid x \in R, x = 2\}, B = \{y \mid y \in R\}$;

г)$A = \{x \mid x \in R, 1 \leq x < 2\}, B = \{y \mid y \in R, 0 \leq y \leq 1\}$;

д)$A = \{x \mid x \in R, -1 \leq x < 1\}, B = \{y \mid y \in R, 0 < y < 1\}$;

е)$A = N, B = N$;

ж)$A = Z, B = Z$;

ж) $A = R, B = R$.

103. Изобразите в прямоугольной системе координат множество $P \times B$, если:

а)$P = \{x \mid x \in N, x = 2\}, B = \{y \mid y \in R, -2 \leq y \leq 3\}$;

б)$P = \{x \mid x \in N, -2 \leq x \leq 3\}, B = \{y \mid y \in N, y = 2\}$;

в)$P = \{x \mid x \in N, x \leq 2\}, B = \{y \mid y \in R, -2 \leq y \leq 3\}$;

г) $P = \{x \mid x \in N, -2 \leq x \leq 3\}, B = \{y \mid y \in N, y \leq 2\}$.

КОМБИНАТОРИКА

104. Сколькими способами можно обить 6 различных стульев, если имеется 12 сортов обивочного материала?

105. Сколькими способами можно рассадить 12 гостей на 12 различных стульях?

106. В отделении 12 солдат. Сколькими способами можно составить наряд из трёх человек?

107. Из 8 членов месткома надо избрать председателя, его заместителя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

108. Из города A в город B ведут 6 дорог, из города B в город C – 4 дороги и из города C в город D – 8 дорог. Сколько можно выбрать маршрутов, ведущих из города A в город D через города B и C?

109. Во взводе 5 сержантов и 50 солдат. Сколькими способами можно составить наряд из одного сержанта и трёх солдат?

110. В классе 42 свободных места. Сколькими способами можно посадить на них 8 учеников?

111. В комнате имеется 6 лампочек. Сколькими различными способами можно осветить комнату?

112. Имеется 5 сортов конвертов без марок и 4 сорта марок одного и того же достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

113. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и чёрный? Два белых квадрата?

114. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

115. Из состава участников конференции, на которой присутствуют 18 человек, надо избрать делегацию, состоящую из 4 человек. Сколькими способами это можно сделать?

116. В доме отдыха каждый день давали на десерт либо яблоко, либо апельсин, либо мандарин. В течение 24 дней было выдано 9 яблок, 7 мандаринов и 8 апельсинов. Сколько различных вариантов могло быть?

117. Сколькими способами можно составить трёхцветный флаг (три горизонтальные полосы одинаковой ширины), если имеется материал 6 разных цветов?

118. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами им могут быть поставлены отметки, если известно, что ни один из студентов не получит неудовлетворительной оценки?

119. Сколько чисел, меньших, чем миллион, можно записать с помощью цифр 9, 8, 7?

120. Сколько четырёхзначных чисел можно записать, не пользуясь цифрой 8?

121. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую цифру можно использовать несколько раз?

122. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую цифру можно использовать только один раз?

123. Сколько нечётных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую цифру можно использовать несколько раз?

124. Сколько разных комбинаций ответов можно дать на 8 вопросов, если на каждый вопрос отвечают «да» или «нет»?

125. Сколько чисел, больших 100, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, если в одном числе каждая цифра используется не более одного раза?

126. Сколько чётных чисел, меньших 500, можно составить с помощью цифр 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы ни в одном числе не было повторяющихся цифр?

127. Сколькими способами можно 6 девочек разбить на две команды по три девочки в каждой команде?

128. Сколькими способами можно образовать из группы в 12 мужчин и 8 женщин комиссию, так чтобы она состояла из 3 мужчин и 4 женщин?

129. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «кукушка»?

130. Сколькими способами можно составить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

131. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 чёрных шашек на 32 чёрных полях?

132. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с пятью полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

133. Сколько слов, состоящих из 5 букв, можно образовать из 32 букв алфавита?

134. Сколько слов, состоящих из 5 букв, можно образовать из 32 букв алфавита при условии, что ни одна из букв не повторяется в слове дважды?

135. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы 4 буквы «е» шли подряд?

136. Двое ребят собрали 10 ромашек, 13 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами они могут разделить между собой эти цветы?

137. Сколькими способами можно разделить 15 яблок между тремя мальчиками?

138. Сколькими способами можно разделить 15 яблок и 20 апельсинов между тремя мальчиками?

139. Сколькими способами можно переставить буквы слова «обороноспособность»?

140. Сколько имеется различных шестизначных чисел, у которых 3 цифры чётные, а 3 нечётные?

141. На плоскости расположена 21 точка, причём никакие четыре из них не лежат на одной окружности. Сколько окружностей можно провести таким образом, чтобы каждая из них содержала по три из этих точек?

142. Найти сумму четырёхзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках цифр 1, 2, 3, 4.

143. Даны два множества слов: A = {«желтый», «белое», «черная»}; B = {«лист», «ночь», «платье», «шаль», «безмолвие»}. Запишите множество C пар, в которых первая компонента – слово из A, а вторая – согласованное с ним слово из B (например, <«желтый», «лист»>).

144. Пусть X – множество столов в аудитории и Y – множество студентов. Через xRy обозначим соответствие « за столом xсидит студент y». Что обозначают множества $R(a)$ и $R^{-1}(b)$? В каком случае $R(a)$ пусто?

СООТВЕТСТВИЯ

145. Пусть M – множество всех дней недели и K множество чисел {1, 2, …, 31}. Пусть kRmозначает, что в день декабря этого года с номером kбыл день недели m. Постройте график этого соответствия.

146. Даны множества X= {2, 4, 6} иY= {3, 5, 7}. Соответствие RмеждуXи Y таково: «число xбольше числа y», $x \in X$, $y \in Y$. Постройте граф этого соответствия. Постройте графы противоположного и обратного соответствий.

147. На рисунке 3 изображен граф соответствия между множествами Cи D. а) Каковы область отправления и область прибытия этого соответствия? б) Запишите множество пар, принадлежащих графику данного соответствия? в) Изобразите граф противоположного соответствия. г) Изобразите граф обратного соответствия.

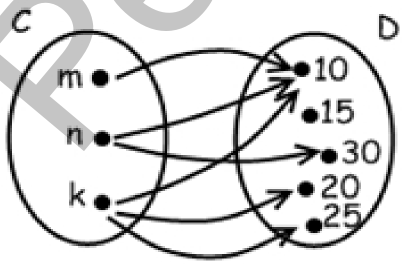

Рис. 3.

b \ a	135	264	270	657	0
3					
4					
9					
5					
0					

Рис. 4.

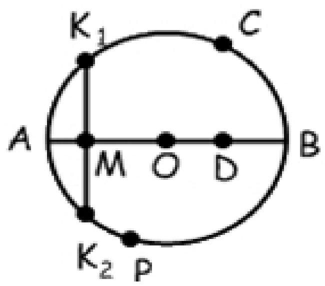

Рис. 5.

148. Дан рисунок 4. Заштрихуйте клетки, стоящие на пересечении таких столбцов aи строк b, что число a кратно числу b. Что представляет собой множество заштрихованных клеток?

149. Каждой точке Mдиаметра $[AB]$ окружности (рисунок5) поставим в соответствие те точки окружности, которые лежат на перпендикуляре, восстановленном в этой точке (например, $M \to K_1$, $M \to K_2$). а) Отметьте точки окружности, соответствующие точке D. б) Отметьте точки диаметра, которым соответствует точка P, точка C. в) Каковы область отправления и область прибытия данного соответствия?

150. Даны два множества $A = \{-1, -2, -3, 1, 2, 3, 0\}$, N – множество всех натуральных чисел. Поставим в соответствие каждому числу $a \in A$его квадрат. Выпишите все пары, принадлежащие графику соответствия. Постройте его граф.

151. Даны множества: $X = \{x | x \in Z, -3 \leq x < 0\}$, $Y = Z$. Каждому значению $x \in X$поставим в соответствие такое значение $y \in Y$, которое на 3 больше этого x. Перечислите элементы, принадлежащие графику соответствия, и изобразите его в прямоугольной системе координат.

152. Соответствия между множествами $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $D = \{5, 6, 7\}$ таково, что его график состоит из пар, в которых первая компонента взята из множества C, а вторая – из Dи больше первой компоненты. Постройте график этого соответствия в прямоугольной системе координат. Постройте график противоположного соответствия.

153. График соответствия Rмежду множествами $X = \{x | x \in Z, 0 \leq x \leq 4\}$ и $Y = \{y | y \in Z, 0 \leq y \leq 5\}$ состоит из пар $\langle x, y \rangle$ таких, что $x \in X$, $y \in Y$ и $x < y$. Постройте график соответствия R.

154. Для нижеследующих соответствий сформулируйте противоположные, обратные и противоположные обратным : а) точка a лежит на прямой b; б) число a является корнем уравнения b; в) прямая a пересекает окружность b; г) прямая a пересекает прямую b; д) число a больше числа b; е) элемент a принадлежит множеству M; ж) прямая a перпендикулярна прямой b; з) число a является делителем числа b; и) $|a| = b$; к) $a \leq b$; л) человек a выше человека b; м) слово a согласовано со словом b в роде, числе и падеже; н) город a находится в стране b; о) длина отрезка a равна числу b; п) река a впадает в море b.

155. Пусть X = {«мама», «папа», «рама», «яма»}, а $Y = \{а, м, р, п, я\}$. Составьте декартово произведение $X \times Y$этих множеств. Отметьте в нем пары, связанные соответствием xRy: «в слово x входит буква y». Задайте это соответствие при помощи графа. Найдите образ слова «папа». Найдите полный прообраз буквы «м». Есть ли в множестве Yбуква, прообраз которой состоит из всего множества X? Есть ли буква с пустым прообразом?

156. Изобразите на координатной плоскости декартово произведение множеств: $X=\{1, 2, 3\}$ и $Y = \{-1, 0, 1\}$. Для каких точек выполняется соответствие $x= y + 3$?

157. График соответствия Rсостоит из пар: <2, 1>, <0, 0>, <4, 2>, <–2, –1>, <–4, –2>. Найдите область определения и множество значений этого соответствия. Какой формулой задается это соответствие?

158. Найдите область определения и множество значений соответствия $a\leq b$, если aи b – натуральные числа и $2 \leq a<10$, $4 \leq b< 12$.

Для множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{-1, -2, -3\}$ заданы следующие соответствия:

а) $a > b$, в) $a = -b$,

б) $a < b$, г) $a = b + 3$, $a \in A$, $b \in B$.

Для каждого из них укажите область определения, множество значений, постройте граф и график.

ОТНОШЕНИЯ

159. В множестве $A = \{3,5,7,9,11\}$ задано отношение $x > y$. Выпишите все пары элементов, находящихся в этом отношении. Как называется множество всех таких пар?

160. Постройте граф отношения $x = y + 2$ между элементами множества $\{-3,-1,1,2,3,4\}$. Принадлежат ли пары $(-1, -3)$,$(4, 2)$ графику этого отношения?

161. В множестве$Y = \{y \mid y\in Z, -13 \leq y \leq -2\}$ задано отношениеR: «$x = 2y$». Какие из следующих записей верны:

а) $(-6, -3) \in R$; б) $(-3, -6) \in R$;

в) $(-4, -2) \in R$; г) $(-6, -3) \in R$.

162. В множестве $M = \{-8, -6, -4, -2, 0, 2 ,4\}$ задано отношение R–«число x кратно числу y». Запишите множество пар (x, y) таких, что xRy. Принадлежит ли этому множеству пара $(-4, -4)$? Обозначим через $R(x)$ образ элемента x при отношении R. Найдите $R(2)$,$R(-8)$, $R(0)$. Найдите $R^{-1}(4)$,$R^{-1}(-6)$,$R^{-1}(0)$. Что означает отношение $x\bar{R}y$? Найдите $\bar{R}(-4)$, $\bar{R}^{-1}(-2)$.

163. Отношение Rв множестве $A = \{a,\ b,\ c\}$ задано графиком $R = \{(a,\ b),\ (b,\ c)\}$. Постройте граф этого отношения. Найдите $R(a)$,$R(b)$,$R(c)$,$R^{-1}(a)$,$R^{-1}(b)$,$R^{-1}(c)$.Каковы область определения и множество значений этого отношения? Ответьте на те же вопросы для отношения с графиком $R = \{(a,\ a),\ (a,\ b),\ (a,\ c)\}$.

164. Запишите слова, входящие в предложение «Если бьет дрянной драчун слабого мальчишку, я такого не хочу даже вставить в книжку», и от каждого слова проведите стрелку к согласованному с ним слову. В том же множестве слов проведите стрелку от каждого слова к управляемому им слову. Графы каких отношений вы построили?

165. Дано множество $A = \{4,\ 2,\ 6,\ 3,\ 5,\ -3,\ -8,\ -6,\ 0\}$. Укажите подмножества декартова произведения $A \times A$, соответствующие отношениям: а) «a меньше b»; б) «a делится на b»; в) «число a противоположно числу b»; г) «число a вдвое больше числаb»; д) «число a на 2 меньше числаb».

166. Для символов, являющихся знаками отношений, укажите множества, в которых обычно рассматриваются эти отношения (например, || - отношение параллельности в множестве прямых, или соответственно параллельности между прямыми и плоскостями).

167. Множество M членов семьи Смирновых состоит из отца Ивана Михайловича, матери Елены Андреевны и четырех детей: Миши, Тани, Васи и Оли. Между членами семьи существую отношения родства, которые можно выразить словами: «быть мужем», «быть братом», «быть сестрой» и.т.д.

а) Назовите все пары элементов множества M, между которыми существуют отношение «быть дочерью». Обозначьте элементы множества точками и постойте граф этого отношения.

б) Постройте графы отношений «быть братом», «быть матерью».

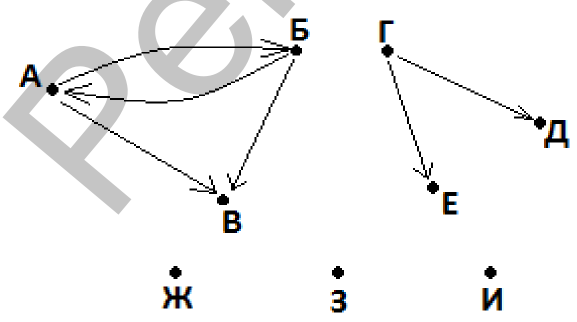

Рис. 6.

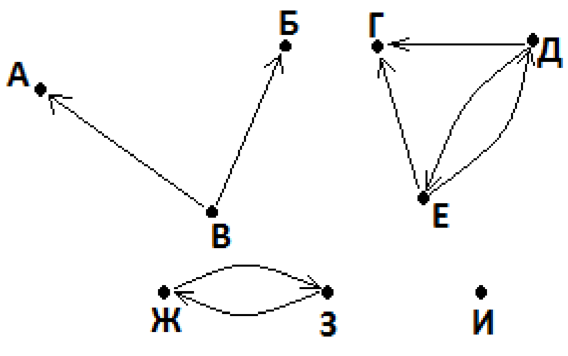

Рис. 7.

168. На рисунке 6 изображен граф отношения «*a* брат *b*» в множестве детей нашего двора (дети обозначены точками А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И). Кто из них является мальчиком? Кто девочкой? О ком нельзя по этому графу ничего сказать?

169. На рисунке 7для множества задачи 172 дан граф отношения «*a*сестра*b*». Можно ли теперь сказать о *Ж* и *З* мальчики они или девочки?

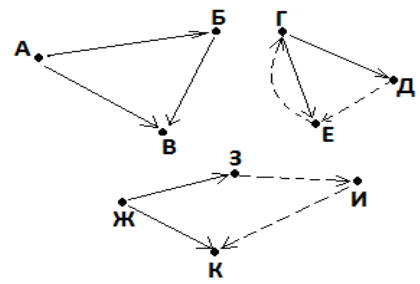

Рис. 8.

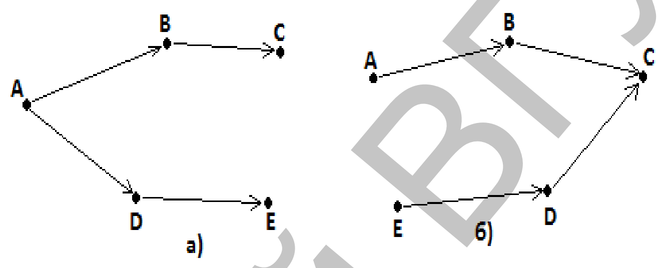

Рис. 9.

170. На рисунке 8 сплошными стрелками изображен граф отношения «*a* брат *b*», а пунктирными – граф отношения «*a* сестра *b*». Некоторые стрелки пропущены. Восстановите их.

171. На рисунке 9 изображен граф двух отношений: «*a* отец *b*»,«*a* дед *b*». Какой граф соответствует второму отношению?

172. Постройте граф отношения «легче, чем», между элементами множества *A* = {кролик, заяц, собака, поросенок}, если известно, что заяц тяжелее собаки, кролик легче поросенка, а собака тяжелее поросенка. Кто из животных самый легкий и кто самый тяжелый?

173. Класс выставил на соревнования по плаванью команду мальчиков. В нее входили: Витя, Коля, Андрей и Саша. Коля проплыл дистанцию быстрее Андрея, но медленнее Саши. Андрей проплыл дистанцию быстрее Андрея, но медленнее Саша. Андрей затратил на ту же дистанцию времени больше, чем Витя, который плавал медленнее Коли. Как распределились места на соревнованиях?

174. Толя, Володя и Саша живут на одной и той же улице, но в разных домах. На этой же улице находится школа, в которой они учатся. Володя живет от школы не ближе Толи, Саша – не дальше Толи. Ребята любят ходить в школу вместе. Кто из ребят должен выходить из дома раньше всех, кто – несколько позднее и, наконец, кто из них встречает двух остальных.

175. Мы наблюдаем за вертолетом, орлом, дирижаблем, самолетом. Орел находится выше вертолета, вертолет – ниже самолета, но выше дирижабля, а орел – ниже самолета. В каком порядке расположить по высоте вертолет, орел, дирижабль и самолет?

176. В этом году на вашей улице построили пять домов: № 10, 11, 12, 13, 14. Один из них пятиэтажный, другой шестиэтажный, третий семиэтажный, четвертый восьмиэтажный, пятый девятиэтажный. Сколько этажей в домах № 10, 11, 12, 13, 14? Известно, что в доме № 14 больше этажей, чем в доме № 10; в доме № 11 больше, чем в доме № 13, и меньше, чем в доме № 10; в доме № 14 этажей меньше, чем в доме № 12.

177. Ребята Саша, Женя, Коля и Миша отправились в поход. У каждого из них был рюкзак. У Саши рюкзак был легче, чем у Коли, но тяжелее, чем у Жени. У Миши рюкзак был легче, чем у Коли, но тяжелее, чем у Саши. Ребята идут друг за другом. В каком порядке идут ребята?

178. Из лагеря вышли 5 туристов: Вася, Галя, Толя, лена, Миша. Толя идет впереди Миши, Лена – впереди Васи, но позади Миши, Галя – впереди Толи. Кто идет первым и кто последним?

179. Дано пять чисел. Известно, что первое больше пятого, второе меньше третьего, пятое больше третьего, а четверное меньше пятого. Какое из чисел больше: первое ил четвертое? Пятое или второе? Можно ли утверждать, что второе число меньше четвертого?

180. В нашем лесу каждый занимается своим делом и этому делу обучает других: одни плетут корзины, другие ловят рыбу. Ремеслу мы научились друг у друга. Кот учился у Выдры, Еж – у Зайца, Лиса – у Волка, Мышь – у Ежа. Бобер учил Волка и Выдру, Заяц – Белку, а Барсук – Зайца. Бобер был учеником Медведя, а Еж – учителем Дятла. Лучше всех плел корзины Еж. Чем занимаются Заяц, Дятел, Волк и Лиса? Кто из зверей нашего леса раньше всех научился ловить рыбу и кто плести корзины?

181. В множестве дробей задано отношение «дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны». Какими свойствами оно обладает?

182. В множестве людей рассмотрим отношения: а) «человек х похож на человека у»; б) «х и у живут на одной улице»; в) «х отец у».Определите свойства названных отношений.

183. В множестве М студентов педагогического факультета задано отношение R– «учиться на одном курсе». Докажите, что R – отношение эквивалентности. На какие классы разобьется множество М этим отношением?

184. Какие из следующих отношений являются отношениями эквивалентности:

а) «быть равноудаленным от Москвы» (в множестве городов); б) «принадлежать одному и тому же виду» (для живых существ); в) «иметь общую границу» (в множестве государств).

185. На множестве А натуральных чисел от 1 до 100 рассматривают отношение R – «а имеет ту же честность, что и b». Является ли это отношение эквивалентностью? Какие из чисел множества А удовлетворяют условию 9Rb? aR4? 8Rb? aR5? На какие классы эквивалентности распадается множество А по данному отношению?

186. Разбейте все натуральные числа от 1 до 20 на классы так, чтобы в один класс попали числа, имеющие один и тот же остаток при делении на 5. Сколько получилось классов? По каждому отношению?

187. Множество целых чисел разбито на подмножества четных и нечетных чисел. По какому отношению эквивалентно сделано это разбиение?

188. По каким признакам классифицируют: а) книги в библиотеке; б) учащихся в отчете классного руководителя?

189. В множестве учащихся класса выделены подмножества отличников, пионеров и мальчиков. Можно ли сказать, что множество учащихся разбито на эти три множества?

190. На плоскости проведена прямая L. Можно ли сказать, что множество всех прямых плоскости разбивается на три класса: параллельные L, перпендикулярные L и пересекающие L?

191. Можно ли разбить множество треугольников на равнобедренные, разносторонние и равносторонние?

192. На плоскости проведена окружность. Можно ли разбить множество всех окружностей на два класса: касающихся данной окружности и пересекающихся с ней, Какой класс окружностей достаточно добавить для завершения классификации?

193. Дано множество М = $\{-3,-2, -1, 0 , 1, 2, 3\}$. Постройте граф отношения Т = «$x \leq y$» между элементами данного множества и покажите, что Т – отношение нестрогого порядка. Изобразите график отношения Т в прямоугольной системе координат.

Дано множество В = $\{0,2,4,6,8\}$, на котором задано отношение «х является делителем у». Определите свойства этого отношения, постройте его граф и график.

194. В множестве К окружностей плоскости задано отношение «окружность а лежит внутри окружности b». Какими свойствами обладает это отношение? Задает ли оно порядок на множестве К? Является ли этот порядок линейным?

195. Множество А стоит из капитана Иванова, старших лейтенантов Остапчука и Григорьева, лейтенантов Осипенко, Васильева и Шатилова, прапорщиков Семенова, Лебедева и Кравчука. Изобразите при помощи графа отношение R – «а старше по званию, чем b» в этом множестве. Является ли R каким-либо отношением порядка?

196. Выясните, какими свойствами обладают следующие отношения, назовите среди них отношения, назовите среди них отношения эквивалентности и отношения порядка: а) «а равно b» (в множестве треугольников); б) «а равно b» (в множестве окружностей на плоскости); в) «а равно b» (в множестве рациональных чисел); г) «а меньше или равно b» (в множестве целых чисел); д) «а не больше, чем b» (в множестве целых чисел); е) «а кратно b» (в множестве натуральных чисел(; з) «а является собственным подмножеством b» (в множестве геометрических фигур); и) «а является дополнением b до прямоугольника» (в множестве геометрических фигур); к) «а следует за b» (в множестве натуральных чисел.

197. Какие из следующих отношений между людьми рефлексивны, какие симметричны и какие транзитивны: а) «а сестра b»; б) «а начальник b»; в) «а друг b»; г) «а имеет тот же цвет глаз, что и b»; д) «а на 4 см выше, чем b»; е) «а родился в том же году, что и b». Назовите среди этих отношений отношения эквивалентности и отношения порядка.

198. На множестве А = {3,4,8,5} задано некоторое отношение эквивалентностиR, график которого имеет вид:R = {<3.3>, <3,4>, <4,3>, <4,4>, <5,5>, <5,8>, <8,5>, <8,8>}.Постройте граф отношения R.

199. Пусть R – отношение в множестве X. Какими свойствами обладает это отношение, если: а) X = {a,b}, R = {<a,a>, <b,b>, <a,b>}; б) X = {a, b, c, d}, R = {<a,a>, <b,b>, <c,c>, <d,d>, <a,b>, <b,a>}; в) X {a, b, c, d}, R = {<a,b>, <b,a>, <a,c>, <c,a>, <d,c>, <c,d>}.

200. Отношение между элементами множества всех целых чисел выражено уравнением y = x + 4. Постройте в прямоугольной системе координат график этого отношения, если оно определено на множестве А = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}.

201. Представьте отношение x+y=6, x+y<6, x+y>6 в множестве А = {0, 1, 2, ..., 10} с помощью графиков в прямоугольной системе координат.

202. Постройте в прямоугольной системе координат график отношения R, которому принадлежат точки A(x,y) с целыми координатами, такие, что:

а) $0 \le x \le 10, -2 \le y \le 3$;
б)$x = 2, -5 < y < 4$;
в)$x = 2y, -4 \le y \le 4$;
г*)$x \le y, 0 \le y \le 6, x \ge 0$;
д*)$x + y = 4,\ x \ge 0, y \ge 0$;
е*)$x + y < 6, x \ge 0, y \ge 0$.

ОТОБРАЖЕНИЯ

203. Даны два множества: *X*={Париж, Москва, Варшава, Ташкент, Краков, Рига} и *Y*={СССР, Франция, Польша, Англия}. Соответствие между ними: «Город *x*находится в стране *y*» (*x*Y*X*, *y*Y*У)*. Постройте граф этого соответствия. Будет ли это соответствие отображением? Каким? Является ли отображение соответствие, при котором каждой стране сопоставляются находящиеся в ней города?

204. *X* – множество учащихся в классе, *У* – множество парт в класс. Каждому учащемуся класса соответствует парта, за которой он сидит. Является ли это соответствие отображением? Каков образ элемента *x*Y*X*? Коков полный прообраз элемента *y*Y*У*?

205. Между множеством имен *X* = {Андрей, Борис, Михаил, Алексей, Константин, Василий, Кира, Валентина, Семен, Мария, Софья, Ольга, Тимур, Трофим, Юрий} и множеством *У* букв русского алфавита установлено соответствие, при котором каждому имени сопоставляется его первая буква. Будет ли это соответствие отображением *X* на *У*? Найдите образ множества *X*. Найдите полные прообразы букв *А, Б, К, Л.* Найдите полный прообраз множества гласных букв. Пересекается ли он с полным прообразом множества согласных букв?

206. Множество *А* состоит из костей домино, а множество *В* – из четырех игроков. Каждой кости домино поставлен в соответствие игрок, держащий эту кость. Является ли это соответствие отображением *А* на *В*? Что является полным прообразом игрока?

207. Множество *X* состоит из всех квадратов на плоскости, а множество *У* – из всех окружностей на той же плоскости. Поставим в соответствие каждому квадрату вписанному в него окружность. Является ли это соответствие отображением *X* на *У*? Что является полным прообразом данной окружности? Является ли это отображение обратимым?

208. Множество *А* состоит из номеров в институтском гардеробе, а множество *В* – из пальто, висящих в этом гардеробе. Каждому пальто соответствует номер того крючка, на котором оно висит. Будет ли это соответствие отображением A на B? При каком условии отображение $A \to B$ будет обратимым? Может ли оно быть взаимно-однозначным соответствием между A и B?

209. C – множество дней недели, по которым проводятся занятия в школе, D – множество учебных предметов, изучаемых в III классе. Каждому дню недели соответствуют те предметы, которые включены на этот день в расписание. Можно ли считать это соответствие, при котором каждому предмету сопоставляются дни недели, в которые изучают этот предмет?

210. Каждому зрителю в зале кинотеатра поставим в соответствие кресло, на котором он сидит. Всегда ли определено это отображение? В каком случае это отображение будет обратимым?

211. Можно ли задать отображение следующим образом: множество X состоит из отрезков, а множество $У$ – из треугольников; каждому отрезку ставится в соответствие треугольник, для которого этот отрезок является средней линией? Почему?

212. C – множество дней недели, по которым проводятся занятия в школе, D – множество учебных предметов, изучаемых в III классе. Каждому дню недели соответствуют те предметы, которые включены на этот день в расписание. Можно ли считать это соответствие, при котором каждому предмету сопоставляются дни недели, в которые изучают этот предмет?

213. Каждому зрителю в зале кинотеатра поставим в соответствие кресло, на котором он сидит. Всегда ли определено это отображение? В каком случае это отображение будет обратимым?

214. Можно ли задать отображение следующим образом: множество X состоит из отрезков, а множество $У$ – из треугольников; каждому отрезку ставится в соответствие треугольник, для которого этот отрезок является средней линией? Почему?

215. Соответствие f между множеством X – всех треугольников плоскости и множеством Y – всех действительных чисел таково: «треугольник х имеет площадь, равную у». Покажите, что f – отображение. Укажите множество его значений и определите вид.

216. Даны множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{a, в\}$. Запишите элементы множества $A \times B$ и $B \times A$ и установите между ними взаимно-однозначное соответствие. С каким свойством произведения натуральных чисел связана возможность такого соответствия?

217. Между множеством A = {0, 5, - 7, 13} и множеством B = {x, y, z} установлены различные соответствия, графики которых таковы:

а) {(0, x), (5, x), (–7, y), (13, z)};

б) {(0, y), (–7, x), (–7, y), (13, z), (5, x)};

в) {(0, z), (0, x), (0, y), (5, z), (–7, y), (13, z)}.

Какие из этих соответствий являются отображениями?

218. X = {а, в, д, ж}, Y= {б, г, е, з}. Задано отображение f:$X\rightarrow Y$ такое, что каждой букве из множества X соответствует буква из множества Y, которая идет за ней в алфавите. Постройте граф этого отображения. Запишите подмножество декартова произведения$X \times Y$, являющегося графиком отображения f.

219. Даны множества X = {1, 2, 3, 4, 5, 6} и Y= Z. Соответствие fмежду множествами X и Yтаково: f: $x \rightarrow y = 2x$. Докажите, что f– отображение XвY, и постройте его график в прямоугольной системе координат. Запишите множество значений этого отображения.

220. Известно, что X = Y= Z. Между ними имеет место соответствие f :$x \rightarrow y = 3x^2$. Докажите, что f– отображение, определите его вид. Каким будет его вид в прямоугольной системе координат?

221. Верно ли, что соответствие f :$x \rightarrow y = –5x +2$между множествами X и Y, где X = Y= Z, есть отображение множества всех целых чисел на себя? Постройте несколько точек, принадлежащих графику соответствия f.

222. Соответствие f между множествами X и Y, где X = Y= Z, таково: $x \rightarrow y = 2x^2 + 3$. Покажите, что – f отображение. Сформулируйте характеристическое свойство элементов, принадлежащих множеству значений отображения f.Постройте в прямоугольной системе координат график f .

223. Изобразите в прямоугольной системе координат графики следующих отношений в множестве Z целых чисел. Для каждого отношения выясните, является ли оно отображением Z в Z, отображением Z на Z, обратимо ли оно, можно ли назвать его взаимно-однозначным соответствием между Z и Z:

а) x + y = 3;

б) x – y = 5;

в) x + y = 4, x>0;

г) x = y, –4 ≤ x ≤ 6;

д) x^2 = y, –4 ≤ x ≤ 6;

е) x>y;

ж) y≤x + 2;

з) y = x + 2;

и) y<x + 2;

к) y>x + 2;

л) y = 4;

м) x = –3.

ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ПРЕДИКАТЫ (ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ)

224. Укажите высказывания и установите, истинны они или ложны; укажите предикаты и найдите, при каких значениях переменной они истинны; найдите выражения, не являющиеся высказываниями: а) не каждый человек имеет родителей; б) все люди смертны; в) некоторые люди имеют четыре ноги; г) для всех чисел x и y имеем $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$; д) $x^2 - y^2 = (x - y)(x+y)$; е) $2x + y = 3$ и $4x + 2y = 5$; ж) $6x - 5 > 4x$; з) $x^2 - y^2$; и) Пойдете ли Вы в кино? к) Стоп!

225. Запишите следующие предложения с помощью математических знаков. Укажите среди них высказывания. Выясните, какие из них истинны, а какие ложны: а) сумма чисел 2 и 7 равна 9; б) произведение чисел 2 и 7; в) разность чисел x и 2 равна 10; г) число –5 больше числа –7; д) разность чисел –7 и 12 равна 5; е) число x больше $\frac{1}{2}$.

226. Возьмите точку M и найдите какие-нибудь точки A, B, C, D, для которых $|MA| = |MB| = |MC| = 3$, $|MD| = 2$ (расстояния даны в *см)*. Проведите окружность с центром M и $r = 3$ и обозначьте ее буквой m. Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны: а) $A \in m$; б) $B \notin m$; в) $C \in m$; г) $D \in m$?

227. В каких из следующих высказываний союз «или» является разделительным: а) в любом треугольнике ABC угол A или угол B острый; б) если параллелограмм имеет ось симметрии, то он является прямоугольником или ромбом; в) если ни один угол треугольника не является прямым, то треугольник остроугольный или тупоугольный; г) если натуральное число делится на 5, то последняя цифра его десятичной записи равна 0 или 5?

228. Проверьте, истинны ли следующие высказывания: а) все треугольники подобны между собой; б) некоторые равнобедренные треугольники являются прямоугольными; в) все равнобедренные треугольники прямоугольны; г) все равносторонние треугольники равнобедренны; д) все равнобедренные треугольники равносторонни; е) некоторые равнобедренные треугольники равносторонни; ж) все четные числа делятся на 8; з) все числа, делящиеся на 8, четны; и) некоторые четные числа делятся на 8; к) все четные числа делятся на 3; л) некоторые четные числа делятся на 3; м) все числа, делящиеся на 3, четны; н) некоторые числа, делящиеся на 3, четны; о) в прямоугольниках диагонали равны; п) все четырехугольники с равными диагоналями являются прямоугольниками; р) некоторые четырехугольники с равными сторонами являются прямоугольниками; с) все равные треугольники равновелики; т) все равновеликие треугольники равны; у) некоторые равновеликие треугольники равны.

229. Среди следующих высказываний укажите, элементарные и составные высказывания (в составных высказываниях выделите элементарные): а) число 17 не делится на 5; б) число 13 простое и не делится на 2; в) 12^2 четное число или нечетное; г) всякий равнобедренный треугольник прямоугольный и равносторонний; д) $\sqrt{4}= 2$; е) $\sqrt{4} = 2$ или $\sqrt{4} = -2$; ж) если число 4^2 делится на 2 то оно четное; з) если $6*\frac{2}{3} = 5$, то$17 - 3\frac{1}{4} = 5$.

230. Сформулируйте высказывания, которые являются отрицаниями данных высказываний. Для каждого из данных и полученных высказываний укажите, истинно само высказывание или его отрицание: а) я вчера решил заданную на дом задачу; б) все слова могут быть разделены на слоги; в) один в поле не воин; г) число 27 делится на 7; д) 3 плюс 6 равно 9; е) 253 — четное число; ж) число 2 рационально; з) 3 = 3; и) при всех значениях x имеем $x - 2 = 5$; к) для любого значения x имеем $x^2 = 4$; л) не существует четных простых чисел.

231. Рассмотрите следующие два высказывания: а) существуют четные простые числа; б) существуют нечетные простые числа. Определите их истинность. Является ли высказывание б) отрицанием высказывания а)? Составьте отрицания к обоим высказываниям.

232. Для каждого из следующих высказываний составьте отрицание, а затем двойное отрицание. Убедитесь, что двойное отрицание совпадает по смыслу с исходным высказыванием: а) «15 кратно 3»; б) «4 = 5».

233. Какие из следующих высказываний ложны: а) не существует параллелограмма со взаимно перпендикулярными диагоналями; б) все параллелограммы не имеют осей симметрии; в) существуют параллелограммы, не имеющие осей симметрии; г) диагонали любого ромба не равны; д) существуют ромбы с неравными диагоналями;

е) все четные числа не делятся на 4; ж) существуют четные числа, не делящиеся на 4; з) существуют четные числа, делящиеся на 4.

234. В чем различие следующих высказываний: а) на лекции присутствовали все студенты нашего курса; б) на лекции присутствовали некоторые студенты нашего курса; в) на лекции присутствовали все студенты нашего курса и только они; г) все присутствовавшие на лекции учатся на нашем курсе; д) на лекции не присутствовал ни один студент нашего курса; е) каждый студент нашего курса присутствовал на лекций. Изобразите смысл каждого из высказываний диаграммой Эйлера–Венна. Есть ли среди этих высказываний равнозначные?

235. Приведите примеры истинных высказываний, содержащих слова: «все», «некоторые», «каждый», «не все», «ни один», «любой», «существует», «не существует», «те и только те», «только некоторые», «всякий».

236. Высказывание «все ромбы суть параллелограммы» сформулируйте; а) с помощью слова «каждый»; б) в форме «если…, то ...».

237. Высказывание «не все ромбы суть квадраты» сформулируйте: а) с помощью слова «существует»; б) с помощью слова «некоторый».

238. Образуйте отрицание каждого из следующих высказываний, укажите, истинно само высказывание или его отрицание: а) число 5 отрицательно; б) $2 \leq 3$; в) $7 \geq 6$; г) при всех значениях x верно неравенство $x - 2 \leq 5$; д) $5 * 3 = 35$.

239. Сформулируйте отрицания следующих высказываний: а) все три числа $A,\ B$ и C натуральные; б) некоторые из чисел $A,\ B\ и\ C$ натуральные; в) ни одно из чисел $A,\ B\ и\ C$ не является натуральным; г) некоторые из чисел A, B и C не являются натуральными; д) по крайней мере одно из чисел $A,\ B,\ C$ является натуральным. Есть ли среди этих пяти высказываний совпадающие?

240. Среди следующих высказываний найдите взаимно отрицающие друг друга: а) все студенты нашей группы были на лекции; б) некоторые студенты нашей группы были на лекции; в) все студенты нашей группы не были на лекции; г) некоторые студенты нашей группы не были на лекции.

241. Сформулируйте отрицания следующих высказываний: а) четырехугольник $ABCD$ не является ни прямоугольником, ни ромбом; б) ABC – прямоугольный равнобедренный треугольник; в) число 12 делится на 2 и на 3.

242. Обозначим через A высказывание «сегодня жарко», через B – «сегодня идет дождь», через C – «сегодня сыро», через D – высказывание «я пойду гулять», через E – высказывание «я пойду в кино». Запишите формулами составные высказывания: а) сегодня жарко и не идет дождь; б) сегодня жарко или сыро; в) если сегодня идет дождь, то сыро; г) если сегодня не идет дождь, то не сыро; д) если сегодня не идет дождь, то я пойду гулять; е) если сегодня идет дождь или сыро, я не пойду в кино.

243. В следующих составных высказываниях выделите составляющие их элементарные высказывания, запишите составные высказывания при помощи формул и укажите, какие из них истинны: а) 15 кратно 3 и 12 кратно 3;б) 2 < 3< 5;в) 4 * 2 = 8 и 27 / 7 = 4;г) 15 – простое число и 15 не делится на 7; д) $\sqrt{16}$ = 4 или $\sqrt{16}$=–4;е) число 157 простое или составное?

244. Среди следующих предложений выделите предикаты и дли каждого из них укажите множество истинности:

а) $x + 5 = 1$;

б) при $x = 2$ выполняется равенство $x^2 - 1 = 0$;

в) существует такое число x, что $x^2 - 2x + 1 = 0$;

г) $x^2 - 2x + 1 = 0$;

д) $x + 2 < 3x - 4$;

е) $(x + 2) - (3x - 4)$;

ж) однозначное натуральное число x кратно 3.

245. Даны предикаты $A(x) -$ "x^2-4=0";$B(x) -$ "$3x - 2 \leq 17$". Найдите множество истинности этих предикатов, если их. множество определения есть: а) множество всех действительных чисел; б) множество всех Натуральных чисел.

246. На множестве $K = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ заданы два предиката: $P(x)$ – « x – простое число», $Q(x)$ – « x – нечётное число». Составьте их таблицы истинности. Эквивалентны ли предикаты $P(x)$ и$Q(x)$ на множестве K?Совпадают ли на множестве $L = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$?

247. Даны множество $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и предикат $E(x, y)$ – «$x + y$, принадлежащий множеству C». Укажите все пары $\langle a, b\rangle$ элементов множества C, для которых высказывание $E(a, b)$ истинно.

248. Даны множество $P = \{1, 2, \dots, 10\}$ и предикат $F(x, y)$ – «число x является делителем числа y». Укажите все пары $\langle a, b\rangle$ элементов множества P, для которых $F(a, b)$ – истинное высказывание. Имеются ли такие пары $\langle a, b\rangle$для которых одно из высказываний $F(a, b)$, $F(b, a)$ истинно, а другое ложно? Имеются ли такие пары $\langle a, b\rangle$, для которых оба высказывания $F(a, b)$, $F(b, a)$истинны?

249. Для каждого из следующих предикатов сформулируйте его отрицание: $A(x)$ – «человек x блондин» (в множестве людей); $B(y)$ – «студент y получил по математике на экзамене оценку 5»(в множестве студентов института); $C(x, y)$ – «прямая x параллельна прямой y» (в множестве прямых); $D(x, y, z)$ – «y лежит между x и y» (в множестве точек прямой); $E(x)$ – « x>3 », $x \in N$; $F(x)$– "$x+2 = 3$" , $x \in$ R.

250. Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны: а) для всех чисел x и y верно равенство $x = 2y$; б) для всякого числа x существует такое число y, что $x = 2y$; в) для всякого числа y существует такое число x, что $x = 2y$; г) существует такое число x, что для всех y верно равенство $x = 2y$; д) существует число y такое, что для всех чисел x верно равенство $x = 2y$; е) существуют такие числа x и y, что $x = 2y$ (здесь x и y – действительные числа)? Какие из этих утверждений истинны, если x и y – натуральные числа?

251. Эквивалентны ли следующие предикаты:

а) $|x| < |y|$ и $x^2 > y^2$;

б) $x^3 - y^3 = 0$ и $x - y = 0$;

в) $x^2 - y^2 = 0$ и $x - y = 0$;

г) $x^3 - y^3 \neq 0$ и $x - y \neq 0$;

д) $x^2 - y^2 \neq 0$ и $x - y \neq 0$;

е) $x = y$ и $|x| = |y|$?

252. Даны высказывания: A – «сегодня ясно», B– «сегодня идёт дождь», C– «сегодня идёт снег», D–«вчера было пасмурно», E–«я пойду в гости».Сформулируйте словестно следующие высказывания:

а) $A \to D$;

б) $B \vee C$;

в) $(B \vee C) \vee (\bar{B} \vee \bar{C})$;

г) $A \wedge \bar{B}$;

д) $A \to (\bar{B} \wedge \bar{C})$;

е) $D \wedge (A \vee B)$;

ж) $B \wedge \bar{A} \to E$.

253. Сформулируйте словестное высказывания:

а) $\bar{A} \vee B => C, \bar{C} => A \wedge \bar{B}$, где – «лето жаркое», – «лето дождливое», – «я поеду на юг»;

б) $A \wedge B \rightarrow C, \bar{A} \vee \bar{B} \rightarrow \bar{C}$, где A– «фигура – ромб», B– «фигура прямоугольник», C– «фигура – параллелограмм»;

в) $\bar{A} \vee B \rightarrow \bar{C}, C \rightarrow A \vee \bar{B}$, где A– «сегодня светит солнце», B– «сегодня сыро», C– «я поеду за город»;

г) $A \vee B \rightarrow \bar{C}, C \rightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$, где A – «я ем», B – «я работаю», C – «я сплю»;

д) $A \wedge B \rightarrow C, \bar{A} \vee \bar{B} \rightarrow \bar{C}$, где A – «число чётно», B– «число кратно 7», C – «число кратно 14».

254. На множестве $M = \{1,\ 2, \dots, 20\}$ заданы предикаты: $A(x)$ – «x не делится на 5»; $B(x)$ – «x – чётное число»; $C(x)$ – «x – число простое»; $D(x)$ – «число x – кратно 3». Найдите множества истинности следующих предикатов:

а) $A(x) \wedge B(x)$;
б) $B(x) \wedge C(x)$;
в) $C(x) \wedge D(x)$;
г) $B(x) \wedge D(x)$;
д) $\overline{B(x)} \wedge D(x)$;
е) $A(x) \wedge \overline{D(x)}$;
ж) $\overline{B(x)} \wedge \overline{D(x)}$;
з) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$;
и) $A(x) \vee B(x)$;
к) $B(x) \vee C(x)$;
л) $C(x) \vee D(x)$;
м) $B(x) \vee D(x)$;
н) $\overline{B(x)} \vee D(x)$;
о) $B(x) \vee \overline{D(x)}$;
п) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$;
р) $C(x) \rightarrow A(x)$;
с) $D(x) \rightarrow \overline{C(x)}$;
т) $A(x) \rightarrow B(x)$;
у) $(A(x) \wedge C(x)) \rightarrow \overline{D(x)}$;
ф) $(A(x) \wedge D(x)) \rightarrow \overline{C(x)}$.

255. Даны предикаты в множестве X четырёхугольников: $A(x)$ – «фигура x – параллелограмм»; $B(x)$ – «фигура x– равнобочная трапеция»; $C(x)$ – «фигура x –ромб»; $D(x)$ – «фигура x – имеет ось симметрии», $E(x)$ – «фигура x – имеет центр симметрии». Укажите, какие из следующих высказываний истинны, какие ложны:

а) $(\forall x)(A(x) \rightarrow E(x))$;
б) $(\exists x)\left(\overline{D(x)} \rightarrow E(x)\right)$;
в) $(\forall x)(D(x) \rightarrow C(x))$;
г) $(\exists x)\left(B(x) \rightarrow \overline{D(x)}\right)$;
д) $(\forall x)\left(\overline{E(x)} \rightarrow A(x)\right)$;
е) $(\forall x)\left(C(x) \rightarrow A(x)\right)$;
ж) $(\forall x)\left(\overline{C(x)} \rightarrow \overline{A(x)}\right)$;
з) $(\exists x)\left(C(x) \rightarrow A(x)\right)$.

256. Даны утверждения: $A(n)$– «число n делится на 3», $B(n)$– «число n делится на 2», $C(n)$– «число n делится на 4», $D(n)$– «число n делится на 6», $E(n)$– «число n делится на 12».

257. Укажите, какие из следующих утверждений истинны, какие ложны:

а) $(\forall n)\big(A(n) \wedge B(n) \Rightarrow E(n)\big)$;

б) $(\forall n)\big(B(n) \wedge D(n) \Rightarrow E(n)\big)$;

в) $(\exists n)\big(C(n) \wedge D(n) \Rightarrow E(n)\big)$;

г) $(\forall n)\big(E(n) \Rightarrow B(n) \wedge D(n)\big)$;

д) $(\forall n)\left(\overline{E(n)} \Rightarrow B(n) \wedge D(n)\right)$;

е) $(\exists n)\big(B(n) \wedge C(n) \Rightarrow \overline{D(n)}\big)$;

ж) $(\forall n)(\bar{A}\ (n) \Rightarrow \bar{E}\ (n))$.

258. Определение истинности или ложность следующих составных высказываний: а) любое натуральное число делится на 2 и на 3 не делится на 6; б) в любом прямоугольнике противоположные стороны равны и на диагонали взаимно перпендикулярны; в) в любом ромбе все стороны равны или диагонали не взаимно перпендикулярны; г) если $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ выполняется для всех x, то $2 \cdot 2 = 5$; д) в любом равностороннем треугольнике высота перпендикулярна основанию и совпадает с медианой.

259. Запишите с помощью кванторов следующие высказывания: а) для всякого треугольника существует описанная окружность; б) всякий параллелограмм имеет центр симметрии; в) если $x>y$, то разность x и y положительна; г) не существует наибольшего действительного числа; д) не существует наименьшего положительного числа; е) существует число, сумма которого с любым числом *a* равна *a*; ж) для любого числа *a* есть противоположное ему число; з) для любого отличного от нуля числа *a* есть обратное ему число.

260. Докажите, что следующие высказывания истинны при любых предположениях об истинности A и B(такие высказывания называют *логическими тождествами* или *тавтологиями*):

а) $\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{A}$;

б) $\mathrm{A} \vee \mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{A}$;

в) $\overline{\overline{\mathrm{A}}} \Leftrightarrow \mathrm{A}$;

к*) $\overline{\mathrm{A} \vee B} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{A}} \wedge \bar{B}$;

л*) $(\mathrm{A} \Rightarrow B) \Leftrightarrow \overline{\mathrm{A}} \vee \bar{B}$;

м*) $\overline{\mathrm{A} \Rightarrow B} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{A}} \wedge \bar{B}$;

г) $\text{А} \vee \overline{\text{А}}$;

д) $\overline{\text{А} \wedge \overline{\text{А}}}$;

е) $(\overline{\text{А}} \Rightarrow \text{А}) \Rightarrow \text{А}$;

ж) $\text{А} \wedge B \Leftrightarrow B \wedge \text{А}$;

з) $\text{А} \vee B \Leftrightarrow B \vee \text{А}$;

и*) $\overline{\text{А} \wedge B} \Leftrightarrow \overline{\text{А}} \vee \bar{B}$;

н*) $(\text{А} \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \overline{\text{А}})$;

о*) $\overline{\text{А}} \Leftrightarrow (\text{А} \Rightarrow B)$;

п*) $((\text{А} \Rightarrow B) \Rightarrow \text{А}) \Leftrightarrow \text{А}$;

р*) $(\text{А} \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow \text{А})$;

с*) $(\text{А} \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow \text{А})$.

261. Запишите символически следующие утверждения: а) каждое натуральное число при делении на 2 дает остаток 0 или 1; б) нет действительного числа, квадрат которого был меньше 0; в*) для любых двух действительных чисел есть третье действительное число, лежащие между ними; г*) не существует наибольшего действительного числа; д*) существует число *x*, не являющееся квадратом рационального числа.

262. Запишите с помощью предикатов $x = y$,$x>y$ и $x<y$, знаков арифметической операций, знаков логических операций и кванторов следующие утверждения: а) *x*– четное число; б) *x* – сумма квадратов двух натуральных чисел; в) *x* – простое число; г) *x* – составное число; д) *x* при делении на 4 дает остаток 0 или 2.

263. Какие из следующих высказываний истинны, если $x \in R$:

а) $(\exists n)(x^2 + 1 = 5)$

б) $(\forall n)\ (x^2 + 1 = 5)$

в) $(\exists n)(x^2 + 5 = 1)$

г) $(\forall n)\ (x^2 + 5 = 1)$

264. Пусть $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ соответственно обозначают следующие одноименные предикаты: «треугольник *x* равносторонний», «треугольник *x* равнобедренный», «треугольник *x*прямоугольный». Запишите словами высказывания, записанные в символическом виде:

а) $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$;

б) $(\exists x)\big(P(x) \wedge R(x)\big)$;

в) $(\exists x)\big(Q(x) \wedge R(x)\big)$;

г) $\overline{(\forall x)\ P(x)}$;

д) $(\exists x)\ R(x)$,

и установите истинности значения каждого из них.

265. Пусть $M\ (x,\ y)$ – двухместный предикат «*x* – мать *y*». Прочитайте следующие высказывания и укажите, какие из них истинны (*x* пробегает множество всех женщин , *y* – множество всех людей):

а)$(\forall x)(\exists y)M\ (x,y)$;

б) $(\forall y)(\exists x)M\ (x,y)$;

в) $(\exists x)(\exists y)M\ (x,y)$;

ж) $(\forall x)(\exists y)\overline{M\ (x,y)}$;

з)$(\forall y)(\exists x)\overline{M\ (x,y)}$;

и)$(\exists x)(\forall y)\overline{M\ (x,y)}$;

г)$(\exists x)(\forall y)M\ (x, y)$; к)$(\exists x)(\exists y)\overline{M\ (x, y);}$
д)$(\exists y)(\forall x)M\ (x, y)$; л)$(\forall x)(\forall y)\overline{M\ (x, y);}$
е)$(\forall x)(\forall y)M\ (x, y)$; м)$(\exists y)(\forall x)\overline{M\ (x, y)}$.

266. Пусть $x \in X$, $y \in X$, где X – множество всех людей и на X заданы предикаты, которые имеют следующие значения: *М*(*x*) – «*x* есть мужчина»; *Ж* (*x*) – «*x* есть женщина» *С* (*x*,*y*) – «*x* старше *y*»; *Р* (*x*,*y*) – «*x* есть ребенок *y*»; *Б*(*x*,*y*) – «*x* стоит в браке с *y*»; *П* (*x*) – «*x* живет в Санкт-Петербург».Представьте в символической форме следующие высказывания: а) каждый человек имеет мать; б) каждый человек моложе своего отца; в) существует человек, состоящий в браке; г) в Санкт-Петербурге есть замужняя женщина; д) все дети человека *x* состоят в браке; е) существует человек, все дети которого состоят в браке; ж) все дети человека *x* живут в Санкт-Петербурге.

267. Какие из следующих высказываний истинны, если *x*, *y*∈*R:*
а) $x + y = y + x$; г) $)(\forall x)(\forall y)x + y = 5$;
б) $(\forall x)(\exists y)\ x + y = 5$; д)$(\exists x)(\exists y)\ x + y = 5$;
в)$(\exists y)(\forall x)\ x + y = 5$; е)$(\exists x)(\exists y)(x > y > 0) \wedge (x + y = 0)$.

268. Пусть *P*(*a*, *b*), *Q*(*a*, *α*), *R*(*a*, *α*) соответственно обозначают следующие двухместные предикаты: «прямая *a* параллельна прямой *b*», «прямая *a* лежит в плоскости α», «прямая *a* параллельна плоскости α».Запишите словами следующие высказывания, записанные в символическом виде:
а)$(\forall a)(\exists \alpha)Q(a, \alpha)$;
б)$(\forall a)(\forall b)(\forall \alpha)(Q(a,\alpha) \wedge P(a,b)) \Rightarrow Q(b,\alpha)$;
в)$(\forall x)(\forall y)\ (\overline{R(a,\alpha)} \Rightarrow \overline{Q(a,\alpha)})$.

269. Пусть *P*(*a*, *b*), *Q*(*a*, *α*), *R*(*a*, *α*) соответственно обозначают следующие двухместные предикаты: «прямая *a* параллельна прямой *b*», «прямая *a* лежит в плоскости α», «прямая *a* параллельна плоскости α».Пользуясь этими предикатами, запишите в символическом виде следующие высказывания: а) чтобы прямая *a* была параллельна плоскости *α*, необходимо и достаточно, чтобы прямая *a* была параллельна прямой *b*, лежащей в плоскости *α*; б) существуют прямые, параллельные плоскости *α* и не лежащие в плоскости *α*; в) если прямая *a* параллельна плоскости *α*и прямая *b* параллельна плоскости *α*, то прямые *a* и *b* параллельны.Истинны ли эти высказывания?

270. Пусть $\Pi(n)$ обозначает одноместный предикат «n есть четное число», а $(n \vdots m)$ обозначает двухместный предикат «n делится на m без остатка». Запишите словами высказывания, записанные в символическом виде:

а) $(\forall n)\big((n \vdots 2) \Rightarrow \Pi\,(n)\big)$; в)$(\exists n)(\forall m)\ (n \vdots m)$;

б) $(\exists n)\big(\Pi(n) \wedge\ (n \vdots 3)\big)$; г)$(\exists m)(\forall n)\ (n \vdots m)$.

271. Пусть $N(x)$,$Z(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ соответственно обозначают следующие одноместные предикаты: «x есть натуральное число», «x есть целое число», «x есть рациональное число», «x есть действительное число».Запишите словами высказывания, записанные в символическом виде:

а) $(\forall x)(N(x) \Rightarrow R(x))$;

б)$(\forall x)(R(x) \wedge\ \bar{Z}(x) \Rightarrow \bar{N}(x))$;

в) $(\exists x)(Q(x) \wedge\ \overline{N(x)})$.

272. Пусть $n \vdots m$ обозначает двухместный предикат «n делится на m без остатка». С помощью этого предиката запишите в символическом виде следующие суждения: а) для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3; б) если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6; в) существуют целые числа, делящиеся на 2 и на 3; г) неверно, что существует единственное число, делящиеся на 71; д) если целое число делится на 23, то оно делится на 11.

273. В следующих высказываниях выделите преамбулу, условие и заключение, составьте обратные, противоположные, обратные противоположным высказывания, а также отрицания высказываний. Выясните, какие из этих высказываний истинны: а) пусть a, b, c – стороны треугольника, лежащие соответственно против углов *A, B, C*. Если $A = B$, то $a = b$ б) если точка *M* равноудалена от концов отрезка *AB*, то она лежит на перпендикуляре, восставленном к середине отрезка; в) если углы *A* и *B* вертикальны, то они равны; г) если сумма цифр числа делится на 9, то число делится на 9; д) любой квадрат *x* является правильным многоугольником; е) если $x + 4 = 10$, то $x = 6$; ж) всякая лошадь – млекопитающее животное; з) для того чтобы $2a$ было целым числом, необходимо, чтобы a было целым числом.

274. В следующих теоремах выделите условие и заключение и сформулируйте их в виде: «если ..., то ...»: а) во всяком треугольнике против равных углов лежат равные стороны; б) отрезок прямой, соединяющий какие-нибудь две точки, короче всякой ломаной, соединяющей эти же точки; в) перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых есть также перпендикуляр к другой; г) сумма величин углов треугольника равна 180°; д) сумма величин смежных углов равна 180°; е) параллелограмм имеет центр симметрии; ж) равные хорды одной и той же окружности стягивают равные дуги; з) дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

275. Выразите следующие теоремы без использования союзов «если ..., то...»: а) если треугольники подобны, то их высоты относятся как сходственные стороны; б) если многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность; в) если две прямые перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны; г) если две стороны треугольника равны друг другу, то биссектриса угла между ними перпендикулярна третьей стороне и делит ее пополам; д) если стороны параллелограмма равны, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

276. Сформулируйте для каждой из этих теорем обратную, противоположную и обратную противоположной. Установите, какие из этих теорем истинны.

277. Верна ли следующая теорема: если произведение двух целых чисел делится на 15, то хотя бы один из сомножителей делится на 15? Верна ли обратная теорема?

278. Сформулируйте теорему, обратную следующей: для того чтобы две прямые пересекались, достаточно, чтобы они лежали в одной плоскости. Какое из этих двух утверждений истинно?

279. Сформулируйте теорему, обратную следующей: для того чтобы две прямые пересекались, необходимо, чтобы они лежали в одной плоскости. Какое из этих двух утверждений истинно?

280. Для каждой из следующих теорем сформулируйте обратную, противоположную и обратную противоположной теоремы. Выясните, какие из этих теорем истинны; а) если многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность; б) если сумма цифр какого-нибудь числа делится на 9, то это число делится на 3.

281. Равносильны ли теоремы: а) через любые три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести окружность, и притом только одну; б) через три точки, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружность; в) любые три точки окружности не лежат на одной прямой?

282. Докажите равносильность следующих теорем: а) длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон; б) длина одной из сторон треугольника меньше суммы длин двух других, но больше их разности; в) наибольшая из длин сторон треугольника меньше суммы длин двух других сторон; г) наименьшая длина стороны треугольника больше разности длин двух других сторон.

283. Равносильны ли утверждения: а) никакие три различные точки окружности не лежат на одной прямой; б) пересечение прямой и окружности содержит не более двух точек?

284. Даны предикаты: A (Q) – «треугольник Q равнобедренный», B (Q) – «два внутренних угла треугольника Q равны между собой», C (Q) – «три внутренних угла треугольника Q равны между собой», D (Q) – «две высоты треугольника Q равны между собой», E (Q) – «три высоты треугольника Q равны между собой». а) Найдите пары предикатов, один из которых является следствием другого. Составьте из этих пар теоремы. б) Сформулируйте эти теоремы, используя термины «необходимое условие», «достаточное условие».

285. Какие из приведенных ниже предложений истинны: а) для того чтобы число делилось на 4, достаточно, чтобы две последние цифры его были восьмерками; б) для того чтобы число делилось на 4, необходимо, чтобы оно оканчивалось четной цифрой; в) для того чтобы число делилось на 4, необходимо; чтобы оно оканчивалось цифрой 8?

286. Даны следующие высказывания: а) все числа множества M кратны 15; б) некоторые из чисел множества M кратны 3; в) ни одно из чисел множества M не кратно 5; г) каждое из чисел множества M кратно 3 и 5; д) некоторые из чисел множества M не кратны 15; е) все числа множества M не кратны 15; ж) некоторые из чисел множества M кратны 15; з) некоторые числа множества M не кратны 5. Какие из этих высказываний истинны, если истинно первое высказывание? второе? ... восьмое?

287. Какие из следующих высказываний будут истинными, если ложно первое из них (соответственно второе, ..., девятое)? (Число 1 всюду исключено из рассмотрения): а) все числа множества M составные; б) некоторые из чисел множества M простые; в) ни одно число множества M не является составным; г) все числа множества M простые; д) некоторые из чисел множества M составные; е) в множестве M есть как простые, так и составные числа; ж) не все числа множества M простые; з) не все числа множества M составные; и) все числа множества M не являются простыми.

288. Какие из следующих теорем истинны, какие из них являются по отношению друг к другу обратными, противоположными: а) если каждое из слагаемых делится на 11, то и сумма делится на 11; б) если хоть одно из слагаемых не делится на 11, то и сумма не делится на 11; в) если хотя бы одно слагаемое делится на 11, то и сумма делится на 11; г) если сумма делится на 11, то и каждое слагаемое делится на 11; д) если сумма не делится на 11, то ни одно из слагаемых не делится на 11; е) если сумма не делится на 11, то хотя бы одно из слагаемых не делится на 11?

289. Пусть даны теоремы: а) если каждое слагаемое делится на данное число, то и сумма их делится на это число; б) если три стороны одного треугольника соответственно конгруэнтны трем сторонам другого, то эти треугольники конгруэнтны; в) если наклонные, проведенные из одной точки к одной и той же прямой, конгруэнтны, то конгруэнтны и их проекции; г) если число сторон многоугольника равно пяти, то сумма его внутренних углов равна 540°; д) если гражданин РБ имеет право голоса, то ему больше 16 лет; е) если натуральное число является произведением двух чисел, то оно четно; ж) если студент получает отметку «отлично», то он сдал экзамен; з) все млекопитающие теплокровны; и) некоторые млекопитающие имеют 4 конечности; к) если четырехугольник — квадрат, то хотя бы один угол его прямой; л) если температура воды на 6^{o}С выше нуля, то вода замерзает; м) если $a - b = c$, то $a = b + c$. Определите, истинны ли данные теоремы; сформулируйте обратные, противоположные и обратные противоположным высказывания. Установите истинность или ложность их.

290. Переведите на язык формул и установите истинность или ложность следующих теорем: а) если две плоскости параллельны или пересекаются, то они не имеют общей точки; б) если число целое или неположительное, то оно является натуральным; в) если треугольник не является равнобедренным, то у него или конгруэнтны углы, или не конгруэнтны стороны; г) если натуральное число делится на 2 и не делится на 6, то оно не делится на 3; д) если натуральное число делится на 5, то оно оканчивается нулем или цифрой 5; е) если натуральное число не делится на 15, то оно не оканчивается нулем и не делится на 3.

291. Равносильны ли следующие предложения: а) α есть достаточный признак β; б) β есть достаточный признак α.

292. Равносильны ли следующие предложения: а) A есть необходимый признак B, б) B есть необходимый признак A.

293. Равносильны ли следующие предложения: а) A есть необходимый признак B, б) B есть достаточный признак A.

294. A есть необходимый признак B. Сформулируйте достаточный признак для отрицания B.

295. Если A – необходимый признак B, а B – необходимый признак C, то будет ли A необходимым признаком C? Будет ли в этом случае C достаточным признаком A?

296. Если A – достаточный признак B, а B – достаточный признак C, то будет ли A достаточным признаком C? Будет ли C необходимым признаком A?

297. Если A – необходимый признак B, а B – достаточный признак C, то будет ли A необходимым признаком C? Будет ли A достаточным признаком C? Приведите примеры.

298. Если A – достаточный признак B, а B – необходимый признак C, то будет ли A достаточным признаком C? Будет ли A необходимым признаком C?

299. Если A – необходимый и достаточный признак B, то будет ли B необходимым и достаточным признаком A?

300. Пусть A – необходимый и достаточный признак B, а B – необходимый и достаточный признак C. Будет ли A необходимым и достаточным признаком C? Является ли C необходимым и достаточным признаком A?

301. Докажите, что если A – необходимый признак B, а B – необходимый признак A, то A и B являются необходимыми и достаточными признаками друг друга.

302. Докажите, что признаки конгруэнтности треугольников: а) по трем сторонам, б) по двум сторонам и углу, заключенному между ними, в) по стороне и двум прилежащим к ней углам – являются необходимыми и достаточными.

303. Каждое из следующих предложений разбейте на два так, чтобы одно выражало прямую, а другое – обратную теорему: а) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его противоположные стороны были конгруэнтны; б) для того чтобы $x^3 = y^3$, необходимо и достаточно, чтобы $x = y$; в) для того чтобы две дуги окружности были конгруэнтны, необходимо и достаточно, чтобы были конгруэнтны стягивающие их хорды; г) для того чтобы натуральное число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9; д) для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последней цифрой его десятичной записи были 0 или 5.

304. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте слова «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо», «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание: а) для того чтобы сумма двух положительных чисел была меньше 40, ..., чтобы хотя бы одно из слагаемых было меньше 20; б) для того чтобы сумма двух положительных чисел была меньше 40 … чтобы оба слагаемых были меньше 20; в) для того чтобы площадь прямоугольника равнялась 100 *см*^{2}, ..., чтобы одна его сторона была равна 5 *см*, а другая 20 *см*; г) для того чтобы сторона квадрата равнялась 8 *см*, ..., чтобы его площадь была равна 64 *см*^{2}; д) для того чтобы выпуклый четырехугольник был параллелограммом, ..., чтобы он имел центр симметрии; е) для того чтобы число делилось на 12, ..., чтобы оно делилось на 3.

305. Какие из следующих утверждений истинны: а) для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0; б) для того чтобы натуральное число делилось на 5, достаточно, но не необходимо, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0; в) для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, но не достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны; г) для того чтобы четырехугольник был ромбом, достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны; д) для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны и делились в точке пересечения пополам.

306. Вставьте вместо многоточия слова «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно»: а) для того чтобы сумма двух чисел была больше 20, … чтобы хотя бы одно слагаемое было больше 10; б) для того чтобы разность двух чисел была четной, ..., чтобы обе компоненты вычитания были четными; в) для того чтобы вычитание было выполнимо в множестве натуральных чисел, ..., чтобы уменьшаемое было больше вычитаемого; г) для того чтобы сумма двух чисел равнялась второму слагаемому, ..., чтобы первое слагаемое было равно 0; д) для того чтобы $a \cdot b = 0$, ..., чтобы $a = 0$; е) для того чтобы сумма чисел делилась на 5, …, чтобы каждое слагаемое делилось на 5; ж) для того чтобы число делилось на 24, …, чтобы оно делилось на 4 и на 3; з) для того чтобы $(a - 1)\,5 = 0$, …, чтобы $a = 1$; и) для того чтобы число делилось на 15, …, чтобы оно делилось на 5; к) для того чтобы $5a$ было равно 0, ..., чтобы $a = 0$; л) для того чтобы $2n>7$, … ,чтобы $n> 4$, где n – натуральное число; м) для того чтобы произведение $(a - 2)\,(a - 5)$ было равно 0, ..., чтобы а = 2; н) для того чтобы сумма двух чисел делилась на 2, …, чтобы каждое слагаемое было четным числом; о) для того чтобы число было кратно 10, …, чтобы оно было кратно 5.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

307. Назовите несколько элементов, принадлежащих объему понятия: а) «целое число»; б) «многоугольник»; в) «часть речи»; г) «хвойное дерево»; д) «геометрическая фигура».

308. Укажите какие-нибудь свойства, присущие всех параллелограммам. Какие из названных вами свойств принадлежат и другим фигурам?

309. Назовите фигуру со следующими свойствами: а) иметь 4 вершины; б) иметь 4 стороны; в) иметь все равные стороны; г) иметь прямой угол.

310. Перечислите несколько свойств, входящих в содержание понятия: а) «прямоугольник»; б) «ромб»; в) «биссектриса угла»; г) «треугольник».

311. Какие из следующих свойств входят в содержание понятия «трапеция», а какие – нет? а) Иметь пару равных сторон; б) иметь пару параллельных сторон; в) иметь все равные углы; г) иметь равные диагонали.

312. Назовите свойства: а) присущие и прямоугольнику и ромбу; б) присущие прямоугольнику и не присущие ромбу; в) присущие ромбу и не присущие прямоугольнику.

ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОНЯТИЯМИ

313. Изобразите отношения между объемами следующих понятий на кругах Эйлера:

а) *a*: «целое число»; *b*: «натуральное число»; *c*: «отрицательное число»;

б) *a*: «дерево»; *b*: «растение»; *c*: «кустарник»;

в) *a*: «квадрат»; *b*: «ромб с прямым углом.

314. Приведите примеры понятий, отношения между которыми могут быть изображены с помощью кругов Эйлера, приведенных на рисунке 10.

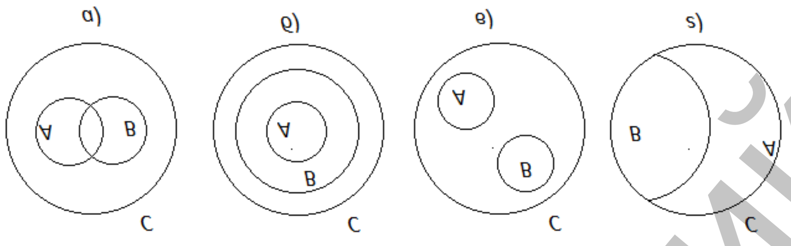

Рис. 10.

315. Для каждого из следующих понятий укажите родовое понятие: а) «хвойное дерево»; б) «кустарник»; в) «млекопитающее»; г) «квадрат»; д) «имя существительное»; е) «биссектриса угла».

316. Для каждого из следующих понятий укажите видовое понятие: а) «животное»; б) «растение»; в) «многоугольник»; г) «дерево»; д) «часть речи»; е) «параллелограмм».

317. Назовите понятие, являющееся родовым по отношению к данной группе понятий:

а) Квадрат, трапеция, ромб;

б) Круг, окружность, многоугольник, отрезок;

в) Деревья, кустарники, травы.

318. Укажите три понятия, являющиеся родовыми по отношению к понятию «прямоугольник». Какое из них является ближайшим?

319. Выясните, в каких из нижеприведенных случаев истинно высказывание «*b*есть обобщение понятия *a*»:

а) *a*: «отрезок», *b*: «прямая»; б) *a*: «луч», *b*: «прямая»; в) *a*: «птица», *b*: «животное»; г) *a*: «окружность», *b*: «круг»; д) *a*: «прямоугольник», *b*: «параллелограмм»;

320. Можно ли отождествить понятия: а) круг и окружность; б) число и цифра; в) прямая и отрезок; г) выражение и значение выражения; д) окружность и граница круга?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ ЧЕРЕЗ РОД И ВИДОВОЕ ОТЛИЧИЕ

321. Дайте определение следующих понятий:
а) «четырехугольник»; б) «прямоугольник»; в) «ромб»; г) «квадрат»; д) «равнобедренный треугольник»; е) «равносторонний треугольник»; ж) «трапеция». Выделите в каждом из определений родовое понятие и видовое отличие.

322. Выпишите из учебников русского языка для I-III классов определения имени существительного и имени прилагательного. а) В каждом из них укажите родовое понятие и видовое отличие. б) Восстановите в определениях пропущенные логические связки и выявите логическую структуру определений.

323. Дайте определение понятия «квадрат», указав в качестве родового понятия понятие: а) «прямоугольник»; б) «ромб».

324. Сформулируйте определение трапеции. Пользуясь им, сформулируйте условие, при котором: а) четырехугольник будет являться трапецией; б) четырехугольник не будет являться трапецией.

325. На основе ответов к пунктам а) – б) задания 18 объясните, какие из фигур, изображенных на рисунке 11 являются трапециями, а какие – нет.

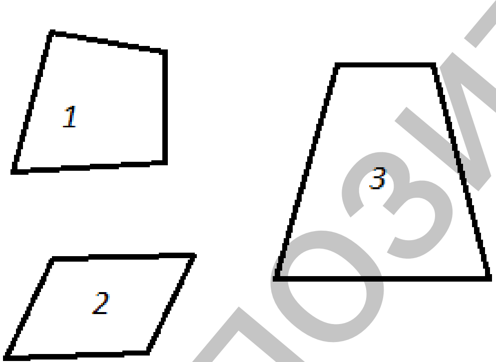

Рис. 11.

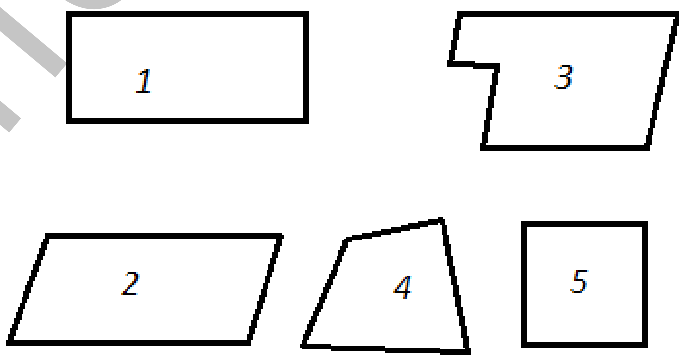

Рис. 12.

326. Пользуясь определением параллелограмма, выясните, какие из фигур на рисунке 12 являются параллелограммами, а какие – нет.

327. Перечислите 5 свойств квадрата.

328. Дайте определение квадрата и назовите те свойства, которые входят в определение. Назовите несколько свойств, которые являются следствием свойств, указанных в определении.

329. а) Назовите несколько свойств, общих для прямоугольника и квадрата.

б) Выясните, какое из высказываний истинно: «Всякое свойство прямоугольника присуще квадрату»; «Всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику».
в) В каком отношении находятся их объемы?

330. Какие из следующих понятий являются совместимыми, а какие – нет: *a*: «четное число», *b*: «нечетное число», *c*: «число, кратное 3», *d*: «однозначное число», *e*: «двузначное число»?

331. Может ли одно и то же понятие быть родовым по отношению к некоторому понятию *a* и видовым по отношению к понятию *b*?

332. Можно ли выделить подмножество прямоугольных треугольников из множества треугольников при помощи свойства «иметь прямой угол»?

333. Можно ли выделить подмножество остроугольных треугольников из множества треугольников при помощи свойства « иметь острый угол»?

334. Можно ли при помощи свойство «иметь прямой угол» выделить подмножество квадратов из множества: а) ромбов; б) параллелограммов; в) четырехугольников? Если нет, то укажите свойство, при помощи которого это можно сделать.

335. Укажите ошибки в следующих определениях:

a. Прямоугольник – это когда все углы прямые;
b. Отрезок – это прямая, ограниченная с двух сторон;
c. Луч – это прямая, ограниченная с одной стороны;
d. Простое число – это когда оно имеет только два натуральных делителя.

336. Какие из следующих обоснований правильны, а какие – нет (рис. 13):

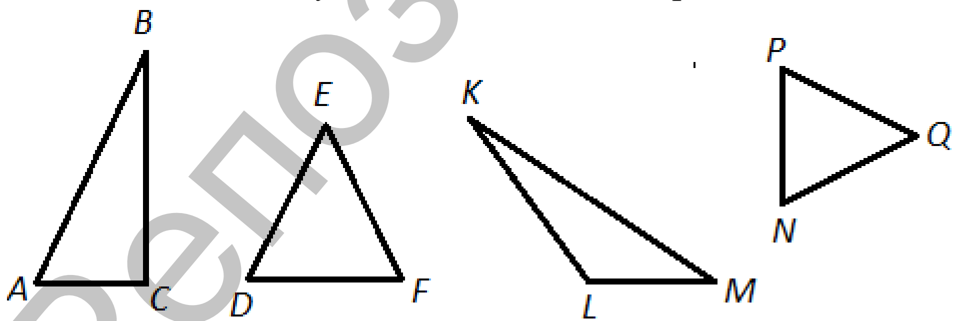

Рис. 13.

а) Треугольник ABCне равнобедренный, так как $AB \neq BC$;
б) Треугольник ABCне равнобедренный, так как $AB \neq BC$ и $BC \neq AC$;
в) Треугольник ABCне равнобедренный, так как $AB \neq BC$ и $BC \neq AC$ и $AB \neq AC$.

Дайте ответ, исходя из определения равнобедренного треугольника.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА: МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. СООТВЕТСТВИЯ. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ. ОТОБРАЖЕНИЯ. КОМБИНАТОРИКА. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Методические рекомендации

Составители:

УСТИМЕНКО Владимир Викторович

ТИТОВА Татьяна Васильевна

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Т.Е. Сафранкова*

Подписано в печать .2014. Формат $60x84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,90. Уч.-изд. л. 2,79. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». 210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.