УДК 537.8

Алгебра Клиффорда и система уравнений Максвелла в неоднородных анизотропных средах

И.Е. Андрушкевич*, Ю.В. Шиенок**
**Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»*
***Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»*

Исследуются уравнения Максвелла на предмет возможности их представления в виде, аналогичном виду релятивистских волновых уравнений для частиц с целым и полуцелым спином. На основе использования матриц размерности 8×8, удовлетворяющих коммутационным соотношениям алгебры Клиффорда, обосновано и предложено алгебраическое представление уравнений Максвелла в неоднородных анизотропных средах в произвольных ортогональных системах координат. Доказана, что искомая 8-компонентная функция-столбец может быть представлена в виде суммы произведений матриц-функций одной переменной (как следствия теоремы Колмогорова). Показано, что методы разделения переменных, разработанные ранее для ковариантного обобщения уравнения Дирака и основанные на использовании свойств алгебры Клиффорда матриц Дирака, применимы для построения аналитических решений уравнений Максвелла и классификации материальных сред и систем координат, допускающих разделение переменных в волновых уравнениях электродинамики.
Ключевые слова: *уравнение Максвелла, алгебра Клиффорда, разделение переменных.*

Clifford algebras and system of Maxwell's equations in the heterogeneous unsteady anisotropic environment

I.Ye. Andrushkevitch*, Yu.V. Shiyenok**
**Educational establishment «Polotsk State University»*
***Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»*

The article deals with discovering the matrix representation of Maxwell's equations in the heterogeneous unsteady anisotropic environment of arbitrary orthogonal curvilinear coordinate systems.
These algebraic representations of Maxwell's equations used both in their outward resemblance and the properties of matrices (the properties of Clifford's algebra) are similar to the covariant generalization of Dirac's equations.
Key-words: *Maxwell's equations, Clifford's algebra, separation of variables.*

С момента формулировки Максвеллом фундаментальных уравнений классической электродинамики [1] не прекращаются попытки ряда исследователей найти удобный во всех отношениях вариант их записи. Особой интенсивностью выделяются исследования, целью которых является представление системы уравнений Максвелла в виде, аналогичном релятивистским волновым уравнениям для частиц с целым и полуцелым спином.

Несмотря на всю значимость предыдущих исследований, следует отметить, что их формы представления системы уравнений Максвелла справедливы лишь в вакууме, и по этой причине не могут быть использованы для решения задач прикладной электродинамики.

В данной работе мы ставим перед собой задачу улучшения алгебраического представления уравнений Максвелла в анизотропных средах с целью его обобщения на случай произвольных ортогональных систем координат; мы также попытаемся определить перспективы применения для исследования системы уравнений Максвелла методов разделения переменных, разработанных ранее для ковариантного обобщения уравнения Дирака.

Алгебраическое представление уравнений Максвелла в декартовой системе координат в изотропных средах. Согласно [2, 3], система уравнений Максвелла в изотропных средах

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B},\ \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{j} + \mathbf{j}^{cm},$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho + \rho^{cm},\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \qquad (1)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},\ \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \qquad (2)$$

эквивалентна матричному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\{\xi^1 \partial_x + \xi^2 \partial_y + \xi^3 \partial_z + \xi^4 \mathbf{M} \partial_t + \mathbf{\Theta}\}\mathbf{\Psi} = \mathbf{PJ}, \qquad (3)$$

где

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}, \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad (4)$$

$\mathbf{\Theta}$ – матрица размерности 8×8, все элементы которой равны нулю за исключением следующих 12:

$$\begin{aligned}&\theta_{1,2}=-\sigma-\partial_t\varepsilon,\ \theta_{2,5}=-\mu^{-1}\partial_z\mu,\ \theta_{2,6}=\mu^{-1}\partial_y\mu,\\&\theta_{2,7}=\mu^{-1}\partial_x\mu,\ \theta_{3,4}=-\sigma-\partial_t\varepsilon,\ \theta_{4,3}=\sigma+\partial_t\varepsilon,\\&\theta_{5,6}=-\partial_t\mu,\ \theta_{6,5}=\partial_t\mu,\ \theta_{7,2}=\varepsilon^{-1}\partial_x\varepsilon,\ \theta_{7,3}=\varepsilon^{-1}\partial_y\varepsilon,\\&\theta_{7,4}=-\varepsilon^{-1}\partial_z\varepsilon,\ \theta_{8,7}=\partial_t\mu,\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}&\xi^1=\begin{pmatrix}\mathbf{0^4}&\gamma^1\\-\gamma^1&\mathbf{0^4}\end{pmatrix},\ \xi^2=\begin{pmatrix}\mathbf{0^4}&\gamma^2\\\gamma^2&\mathbf{0^4}\end{pmatrix},\\&\xi^3=-\begin{pmatrix}\mathbf{0^4}&\gamma^3\\\gamma^3&\mathbf{0^4}\end{pmatrix},\ \xi^4=\begin{pmatrix}\gamma^4&\mathbf{0^4}\\\mathbf{0^4}&\gamma^4\end{pmatrix}\end{aligned}\ ,\quad (6)$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{0^4}=\begin{pmatrix}\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}\\\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}\end{pmatrix},\ \gamma^1=\begin{pmatrix}\mathbf{0^2}&\boldsymbol{\alpha}^1\\-\boldsymbol{\alpha}^1&\mathbf{0^2}\end{pmatrix},\ \gamma^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^2&\mathbf{0^2}\\\mathbf{0^2}&-\boldsymbol{\alpha}^2\end{pmatrix},\\&\gamma^3=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^1&\mathbf{0^2}\\\mathbf{0^2}&\boldsymbol{\alpha}^1\end{pmatrix},\ \gamma^4=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^3&\mathbf{0^2}\\\mathbf{0^2}&\boldsymbol{\alpha}^3\end{pmatrix}\end{aligned}\ ,\quad (7)$$

$$\mathbf{0^2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}^3=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad (8)$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}=\mathrm{diag}\left(\varepsilon\mu^{-1},\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\mu,\mu,\mu,\mu\varepsilon^{-1}\right),\\&\mathbf{J}=(1,1,1,1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\\&\mathbf{P}=\mathrm{diag}\left(0,0,0,0,0,0,\rho\varepsilon^{-1},0\right),\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Psi}=\left(-\mathrm{E}_0,\mathrm{E}_\mathrm{X},\mathrm{E}_\mathrm{Y},-\mathrm{E}_\mathrm{Z},-\mathrm{H}_\mathrm{Z},\mathrm{H}_\mathrm{Y},\mathrm{H}_\mathrm{X},-\mathrm{H}_0\right)^{\mathrm{T}},\\&\mathrm{E}_0=\mathrm{H}_0=\mathrm{const}.\end{aligned}\quad (10)$$

Заметим, что $\boldsymbol{\alpha}^1,\boldsymbol{\alpha}^2,\boldsymbol{\alpha}^3$ однозначно определяются известными матрицами Паули $\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_3}$ [4]

$$\boldsymbol{\alpha}^1=\boldsymbol{\sigma_1},\ \boldsymbol{\alpha}^2=-\boldsymbol{\sigma_3},\ \boldsymbol{\alpha}^3=-i\boldsymbol{\sigma_2};\quad (11)$$

явный вид матриц ξ^1,ξ^2,ξ^3,ξ^4 не существенен; необходимо, чтобы выполнялись антикоммутационные соотношения

$$\xi^i\xi^j+\xi^j\xi^i=2g^{i,j}\mathbf{I},\ \mathbf{I}=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,1,1,1)$$

$$g^{ij}=\begin{cases}\delta_{i,j},\ i=1,2,3,6;\\-\delta_{i,j},\ i=4,5;\end{cases}\ \delta_{i,j}=\begin{cases}1, i=j;\\0, i\neq j.\end{cases}\quad (12)$$

В представлении (6) матрицы ξ^5,ξ^6 будут иметь явный вид

$$\xi^5=\begin{pmatrix}\mathbf{0^2}&-\boldsymbol{\alpha}^2&\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}\\\boldsymbol{\alpha}^2&\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}\\\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}&-\boldsymbol{\alpha}^2\\\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}&\boldsymbol{\alpha}^2&\mathbf{0^2}\end{pmatrix},\quad \xi^6=\begin{pmatrix}\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}&-\boldsymbol{\alpha}^2\\\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}&-\boldsymbol{\alpha}^2&\mathbf{0^2}\\\mathbf{0^2}&-\boldsymbol{\alpha}^2&\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}\\-\boldsymbol{\alpha}^2&\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}&\mathbf{0^2}\end{pmatrix}.\quad (13)$$

Алгебраическое представление уравнений Максвелла в декартовой системе координат в анизотропных средах. В анизотропных средах материальные уравнения (2) приобретают вид

$$\begin{pmatrix}D_x\\D_y\\D_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&\varepsilon_{13}\\\varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}&\varepsilon_{23}\\\varepsilon_{31}&\varepsilon_{32}&\varepsilon_{33}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_{11}&\mu_{12}&\mu_{13}\\\mu_{21}&\mu_{22}&\mu_{23}\\\mu_{31}&\mu_{32}&\mu_{33}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}J_x\\J_y\\J_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}&\sigma_{23}\\\sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}\end{pmatrix}.\quad (14)$$

В этом случае простой проверкой можно убедиться в справедливости следующей теоремы:

Теорема 1. *В анизотропных средах в декартовой системе координат уравнения Максвелла (1), (14) эквивалентны матрично-дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\begin{aligned}&\Big\{\xi^1\big(\mathbf{R}_x\partial_x+\partial_x(\mathbf{R}_x)\big)+\xi^2\big(\mathbf{R}_y\partial_y+\partial_y(\mathbf{R}_y)\big)+\\&+\xi^3\big(\mathbf{R}_z\partial_z+\partial_z(\mathbf{R}_z)\big)+\\&+\xi^4\big(\mathbf{R}_t\partial_t+\partial_t(\mathbf{R}_t)\big)+\xi^4\mathbf{R}_\sigma\Big\}\boldsymbol{\Psi}=\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{J},\end{aligned}\quad (15)$$

где $\tilde{\mathbf{P}}=\mathrm{diag}(0,0,0,0,0,0,\rho,0)$,

$$\mathbf{R}_x=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}&\mathbf{0^4}\\\mathbf{0^4}&\boldsymbol{\mu}_{xx}\end{pmatrix},\mathbf{R}_y=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{yy}&\mathbf{0^4}\\\mathbf{0^4}&\boldsymbol{\mu}_{yy}\end{pmatrix},\mathbf{R}_z=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}&\mathbf{0^4}\\\mathbf{0^4}&\boldsymbol{\mu}_{zz}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{tt}&\mathbf{0^4}\\\mathbf{0^4}&\boldsymbol{\mu}_{tt}\end{pmatrix},\mathbf{R}_\sigma=\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}&\mathbf{0^4}\\\mathbf{0^4}&\mathbf{0^4}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&-\varepsilon_{13}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\mu}_{xx}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\mu_{13}&\mu_{12}&\mu_{11}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{yy}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&\varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}&-\varepsilon_{23}\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\mu}_{yy}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-\mu_{23}&\mu_{22}&\mu_{21}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-\varepsilon_{31}&-\varepsilon_{32}&\varepsilon_{33}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\mu}_{zz}=\begin{pmatrix}\mu_{33}&-\mu_{32}&-\mu_{31}&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{tt}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&-\varepsilon_{13}\\0&\varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}&-\varepsilon_{23}\\0&-\varepsilon_{31}&-\varepsilon_{32}&\varepsilon_{33}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\mu}_{tt}=\begin{pmatrix}\mu_{33}&-\mu_{32}&-\mu_{31}&0\\-\mu_{23}&\mu_{22}&\mu_{21}&0\\-\mu_{13}&\mu_{12}&\mu_{11}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\sigma_{11}&\sigma_{12}&-\sigma_{13}\\0&\sigma_{21}&\sigma_{22}&-\sigma_{23}\\0&-\sigma_{31}&-\sigma_{32}&\sigma_{33}\end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Алгебраическое представление уравнений Максвелла в произвольной ортогональной системе координат в анизотропных средах. Пусть между прямоугольными координатами x, y, z и ортогональными криволинейными координатами u, v, w устанавливается взаимно однозначное соответствие

$$x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w), \qquad (17)$$

$$u = u(x,y,z), v = v(x,y,z), w = w(x,y,z). \qquad (18)$$

Для коэффициентов Ламе e_u, e_v, e_w в этом случае получаем

$$\begin{aligned} e_u &= \sqrt{(\partial_u x)^2 + (\partial_u y)^2 + (\partial_u z)^2},\\ e_v &= \sqrt{(\partial_v x)^2 + (\partial_v y)^2 + (\partial_v z)^2},\\ e_w &= \sqrt{(\partial_w x)^2 + (\partial_w y)^2 + (\partial_w z)^2}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Компоненты произвольного вектора $\mathbf{A}$ и тензоры диэлектрической, магнитной проницаемости и проводимости будут преобразовываться по закону

$$\begin{pmatrix}A_u\\A_v\\A_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial_u x}{e_u}&\dfrac{\partial_u y}{e_u}&\dfrac{\partial_u z}{e_u}\\\dfrac{\partial_v x}{e_v}&\dfrac{\partial_v y}{e_v}&\dfrac{\partial_v z}{e_v}\\\dfrac{\partial_w x}{e_w}&\dfrac{\partial_w y}{e_w}&\dfrac{\partial_w z}{e_w}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}=\mathbf{K}\times\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{uu}&\varepsilon_{uv}&\varepsilon_{uw}\\\varepsilon_{vu}&\varepsilon_{vv}&\varepsilon_{vw}\\\varepsilon_{wu}&\varepsilon_{wv}&\varepsilon_{ww}\end{pmatrix}=\mathbf{K}\times\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&\varepsilon_{13}\\\varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}&\varepsilon_{23}\\\varepsilon_{31}&\varepsilon_{32}&\varepsilon_{33}\end{pmatrix}\times\mathbf{K}^{-1},$$

$$\begin{pmatrix}\mu_{uu}&\mu_{uv}&\mu_{uw}\\\mu_{vu}&\mu_{vv}&\mu_{vw}\\\mu_{wu}&\mu_{wv}&\mu_{ww}\end{pmatrix}=\mathbf{K}\times\begin{pmatrix}\mu_{11}&\mu_{12}&\mu_{13}\\\mu_{21}&\mu_{22}&\mu_{23}\\\mu_{31}&\mu_{32}&\mu_{33}\end{pmatrix}\times\mathbf{K}^{-1},$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_{uu}&\sigma_{uv}&\sigma_{uw}\\\sigma_{vu}&\sigma_{vv}&\sigma_{vw}\\\sigma_{wu}&\sigma_{wv}&\sigma_{ww}\end{pmatrix}=\mathbf{K}\times\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}&\sigma_{23}\\\sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}\end{pmatrix}\times\mathbf{K}^{-1}. \qquad (20)$$

Справедлива следующая теорема (доказательство осуществляется простой проверкой):

Теорема 2. *В анизотропных средах в произвольной ортогональной системе координат уравнения Максвелла (1), (14) эквивалентны матрично-дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\begin{aligned}&\left\{\xi^1(\mathbf{R}_u\partial_u+\partial_u(\mathbf{R}_u))+\xi^2(\mathbf{R}_v\partial_v+\partial_v(\mathbf{R}_v))+\xi^3(\mathbf{R}_w\partial_w+\partial_w(\mathbf{R}_w))+\right.\\&\left.+\xi^4\left(\tilde{\mathbf{R}}_t\partial_t+\partial_t\left(\tilde{\mathbf{R}}_t\right)\right)+\xi^4\tilde{\mathbf{R}}_\sigma\right\}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}=\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}\mathbf{J},\end{aligned} \qquad (21)$$

где $\tilde{\tilde{\mathbf{P}}} = \operatorname{diag}(0,0,0,0,0,0,e_u e_v e_w \rho,0)$,

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}} = (-E_0, E_u, E_v, -E_w, -H_w, H_v, H_u, -H_0)^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{R}_u=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{uu}&\mathbf{0}^4\\\mathbf{0}^4&\boldsymbol{\mu}_{uu}\end{pmatrix},\mathbf{R}_v=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{vv}&\mathbf{0}^4\\\mathbf{0}^4&\boldsymbol{\mu}_{vv}\end{pmatrix},\mathbf{R}_w=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{ww}&\mathbf{0}^4\\\mathbf{0}^4&\boldsymbol{\mu}_{ww}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_t=\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{tt}&\mathbf{0}^4\\\mathbf{0}^4&\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{tt}\end{pmatrix},\tilde{\mathbf{R}}_\sigma=\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}&\mathbf{0}^4\\\mathbf{0}^4&\mathbf{0}^4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{uu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&e_ve_w\varepsilon_{uu}&e_ve_w\varepsilon_{uv}&-e_ve_w\varepsilon_{uw}\\0&0&h_v&0\\0&0&0&h_w\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mu}_{uu}=\begin{pmatrix}e_w&0&0&0\\0&e_v&0&0\\-e_ve_w\mu_{uw}&e_ve_w\mu_{uv}&e_ve_w\mu_{uu}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vv}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&e_u&0&0\\0&e_ue_w\varepsilon_{vu}&e_ue_w\varepsilon_{vv}&-e_ue_w\varepsilon_{vw}\\0&0&0&e_w\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mu}_{vv}=\begin{pmatrix}e_w&0&0&0\\-e_ue_w\mu_{vw}&e_ue_w\mu_{vv}&e_ue_w\mu_{vu}&0\\0&0&e_u&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ww}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&e_u&0&0\\0&0&e_v&0\\0&-e_ue_v\varepsilon_{wu}&-e_ue_v\varepsilon_{wv}&e_ue_v\varepsilon_{ww}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mu}_{ww}=\begin{pmatrix}e_ue_v\mu_{ww}&-e_ue_v\mu_{wv}&-e_ue_v\mu_{wu}&0\\0&e_v&0&0\\0&0&e_u&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{tt}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&e_ve_w\varepsilon_{uu}&e_ve_w\varepsilon_{uv}&-e_ve_w\varepsilon_{uw}\\0&e_ue_w\varepsilon_{vu}&e_ue_w\varepsilon_{vv}&-e_ue_w\varepsilon_{vw}\\0&-e_ue_v\varepsilon_{wu}&-e_ue_v\varepsilon_{wv}&e_ue_v\varepsilon_{ww}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{tt}=\begin{pmatrix}e_ue_v\mu_{ww}&-e_ue_v\mu_{wv}&-e_ue_v\mu_{wu}&0\\-e_ue_w\mu_{vw}&e_ue_w\mu_{vv}&e_ue_w\mu_{vu}&0\\-e_ve_w\mu_{uw}&e_ve_w\mu_{uv}&e_ve_w\mu_{uu}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&e_ve_w\sigma_{uu}&e_ve_w\sigma_{uv}&-e_ve_w\sigma_{uw}\\0&e_ue_w\sigma_{vu}&e_ue_w\sigma_{vv}&-e_ue_w\sigma_{vw}\\0&-e_ue_v\sigma_{wu}&-e_ue_v\sigma_{wv}&e_ue_v\sigma_{ww}\end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Аналогия между ковариантным обобщением уравнения Дирака и алгебраическим представлением системы уравнений Максвелла. Ковариантное обобщение уравнения Дирака описывает поведение элементарных частиц с полуцелым спином в присутствии гравитационных полей и в пространстве с метрикой

$$ds^2 = a_1\cdot\left(dx^1\right)^2 + a_2\cdot\left(dx^2\right)^2 + a_3\cdot\left(dx^3\right)^2 - a_4\cdot\left(dx^4\right)^2, \quad (23)$$

где a_μ – произвольные положительно определенные функции переменных x^1, x^2, x^3, x^4, при использовании диагональной калибровки тетрады

$$h^{\mu}{}_{i} = \mathrm{diag}\left(a_1^{-\frac{1}{2}}, a_2^{-\frac{1}{2}}, a_3^{-\frac{1}{2}}, a_4^{-\frac{1}{2}}\right), \quad (24)$$

имеет вид [5]

$$\begin{aligned}&\left\{\gamma^1\left(a_1^{-\frac{1}{2}}\partial_{x^1} - 4^{-1}a_1^{-\frac{3}{2}}\partial_{x^1}\left(a_1\right)\right)+\right.\\ &+\gamma^2\left(a_2^{-\frac{1}{2}}\partial_{x^2} - 4^{-1}a_2^{-\frac{3}{2}}\partial_{x^2}\left(a_2\right)\right)+ \qquad (25)\\ &+\gamma^3\left(a_3^{-\frac{1}{2}}\partial_{x^3} - 4^{-1}a_3^{-\frac{3}{2}}\partial_{x^3}\left(a_3\right)\right)+\\ &\left.+\gamma^4\left(a_4^{-\frac{1}{2}}\partial_{x^4} - 4^{-1}a_4^{-\frac{3}{2}}\partial_{x^4}\left(a_4\right)\right)+m_0\right\}\left(a_1a_2a_3a_4\right)^{\frac{1}{4}}\mathbf{\Phi} = 0.\end{aligned}$$

В (25) $\mathbf{\Phi} = \left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4,\right)^{\mathrm{T}}$ – биспинор Дирака, $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$ – матрицы Дирака (размерность 4×4), удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2\,\mathrm{diag}(1,1,1,-1). \quad (26)$$

Уравнение (25) достаточно хорошо исследовано на предмет разделения переменных; на примере этого уравнения разработаны и общепризнанны такие методы, как метод коммутирующих операторов [5] и алгебраический метод разделения переменных [6, 7]. Успех этих методов в конечном итоге обеспечивается свойствами (26) матриц $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$ (они удовлетворяют требованиям алгебры Клиффорда).

Вернемся теперь к матрично-дифференциальным уравнениям (3), (15), (21): для фигурирующих в них матриц Максвелла справедливы антикоммутационные соотношения (12), аналогичные (26); и матрицы Дирака, и матрицы Максвелла удовлетворяют алгебре Клиффорда. Данный факт позволяет сделать заключение: метод коммутирующих операторов, равно как и алгебраический метод, разработанные ранее применительно к уравнению Дирака, применимы для решения задачи разделения переменных в алгебраическом представлении системы уравнений Максвелла (3), (15), (21).

Относительно метода коммутирующих операторов и алгебраического метода разделения переменных следует отметить тот факт, что оба они являются распространением классического метода Фурье разделения переменных на случай матрично-дифференциального уравнения (25). Напомним также, что классический метод Фурье исходит из предположения о существовании частных решений, представимых в виде произведения функций одной переменной; все известные попытки обобщения метода Фурье так или иначе связаны с предположением о существовании решений в виде суммы произведений функций одной переменной. По этой причине представляет интерес вопрос о возможности представления решений уравнений Максвелла в виде суммы произведений матриц-функций одной переменной.

Представление решений уравнений Максвелла в виде суммы произведений матриц-функций одной переменной. Теорема А.Н. Колмогорова «о представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных» [8] утверждает следующее:

Для каждого $n\in N$ *существует* $n(2n+1)$ *функций* $h_{ij}(x_i)$ $(i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,2n+1)$, *таких, что все функции* $h_{ij}(x_i)$ *непрерывны на интервале* $0<x_i\le 1$; *для любой функции* $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, *непрерывной на* $0<x_1,x_2,\ldots,x_n\le 1$, *существуют* $2n+1$ *функций* $g_j(u)$, $u=x_l, l=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,2n+1$, *каждая из которых непрерывна на* R, *причем*

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{2n+1}\left(g_j(u)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(h_{ij}(x_i)\right)\right). \quad (27)$$

Эта теорема означает, что каждую непрерывную функцию $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ действительных переменных, $0\le x_1,x_2,\ldots,x_n\le 1$, можно представить в виде суммы (внешняя сумма формулы (27)) $2n+1$ суперпозиций непрерывных функций $g_j(u)$ одного переменного и суммы (внутренняя сумма формулы (27)) n непрерывных функций одного переменного $h_{ij}(x_i)$.

Следует отметить тот факт, что функции $h_{ij}(x_i)$ являются универсальными (они не зависят от вида функции F); функции $g_j(u)$, напротив, однозначно определяются видом функции F.

К сожалению, нахождение явного вида функций g_j, h_{ij} для данной функции F представляет собой математическую проблему, для которой пока не найдено общего строгого решения.

Представление функции многих переменных (27), предложенное Колмогоровым, является не единственным. В частности, в работах Д.А. Шпрехера [9, 10] показано, что внешние функции g_j можно заменить одной единственной, а совокупность функций во внутренней сумме представима в виде сжатий и сдвигов одной единственной функции, т.е. (27) можно представить в виде

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \left(g(u) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda^i h(x_i + \nu j) \right) + j \right) \right), \quad (28)$$

где λ и ν – положительные параметры.

Позднее Р. Досс [11], развивая идеи Колмогорова, показал, что, наряду с (28), имеет место и следующее представление:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \left(g(u) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} h_{ij}(x_i) \right) \right). \quad (29)$$

Применим приведенные результаты к искомым функциям уравнений (3), (15), (21). Все они представляют собой матрицы-столбцы вида

$$\boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8)^{\mathbf{T}}, \quad (30)$$

где $\psi_i = \psi_i(x, y, z, t)$.

Применяя (29) к каждой из компонент (30), после ряда преобразований приходим к доказательству следующих теорем [12]:

Теорема 3. *Для любой* $\boldsymbol{\Psi}^{\mathbf{T}}(x, y, z, t) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8)$, *элементами которой являются непрерывные на* $0 < x, y, z, t \le 1$ *функции* $\psi_i = \psi_i(x, y, z, t)$, *справедливо представление*

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\mathbf{G_x A_x} + \mathbf{G_y A_y} + \mathbf{G_z A_z} + \mathbf{G_t A_t} \right) \mathbf{h_x h_y h_z h_t} \tilde{\mathbf{J}}, \quad (31)$$

где

$$\mathbf{G_x} = \mathbf{G_x}(x) = \mathrm{diag}\big(g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x), g_5(x), g_6(x), g_7(x), g_8(x)\big),$$

$$\mathbf{G_y} = \mathbf{G_y}(y) = \mathrm{diag}\big(g_1(y), g_2(y), g_3(y), g_4(y), g_5(y), g_6(y), g_7(y), g_8(y)\big),$$

$$\mathbf{G_z} = \mathbf{G_z}(z) = \mathrm{diag}\big(g_1(z), g_2(z), g_3(z), g_4(z), g_5(z), g_6(z), g_7(z), g_8(z)\big),$$

$$\mathbf{G_t} = \mathbf{G_t}(t) = \mathrm{diag}\big(g_1(t), g_2(t), g_3(t), g_4(t), g_5(t), g_6(t), g_7(t), g_8(t)\big),$$

$$\mathbf{h_x}(x) = \mathrm{diag}\big(h_{x,1}(x), h_{x,2}(x), h_{x,3}(x), h_{x,4}(x), h_{x,5}(x), h_{x,6}(x), h_{x,7}(x), h_{x,8}(x), h_{x,9}(x)\big),$$

$$\mathbf{h_y}(y) = \mathrm{diag}\big(h_{y,1}(y), h_{y,2}(y), h_{y,3}(y), h_{y,4}(y), h_{y,5}(y), h_{y,6}(y), h_{y,7}(y), h_{y,8}(y), h_{y,9}(y)\big),$$

$$\mathbf{h_z}(z) = \mathrm{diag}\big(h_{z,1}(z), h_{z,2}(z), h_{z,3}(z), h_{z,4}(z), h_{z,5}(z), h_{z,6}(z), h_{z,7}(z), h_{z,8}(z), h_{z,9}(z)\big),$$

$$\mathbf{h_t}(t) = \mathrm{diag}\big(h_{t,1}(t), h_{t,2}(t), h_{t,3}(t), h_{t,4}(t), h_{t,5}(t), h_{t,6}(t), h_{t,7}(t), h_{t,8}(t), h_{t,9}(t)\big),$$

$$\mathbf{A_x} = \left\| \alpha^x{}_{i,j} \right\|, \mathbf{A_y} = \left\| \alpha^y{}_{i,j} \right\|, \mathbf{A_z} = \left\| \alpha^z{}_{i,j} \right\|, \mathbf{A_t} = \left\| \alpha^t{}_{i,j} \right\|, i = 1...8,\ j = 1...9,$$

$$\alpha^x{}_{i,j}, \alpha^y{}_{i,j}, \alpha^z{}_{i,j}, \alpha^t{}_{i,j} = 0, 1;\ \alpha^x{}_{i,j} + \alpha^y{}_{i,j} + \alpha^z{}_{i,j} + \alpha^t{}_{i,j} = 1,$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^{\mathbf{T}}. \quad (32)$$

Теорема 4. *Для любой* $\Psi^{\mathbf{T}}(x_1, x_2) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8)$, *элементами которой являются непрерывные на* $0 < x_1, x_2 < 1$ *функции* $\psi_i(x_1, x_2)$, $i = \overline{1,8}$, *справедливо представление*

$$\Psi(x_1, x_2) = \left(\mathbf{G_{x_1} A_{x_1}} + \mathbf{G_{x_2} A_{x_2}} \right) \mathbf{h_{x_1} h_{x_2} J}, \quad (33)$$

где

$$\mathbf{J^T} = (1, 1, 1, 1, 1),$$

$$\mathbf{G_{x_1}} = \mathrm{diag}\big(g_1(x_1), g_2(x_1), g_3(x_1), g_4(x_1), g_5(x_1), g_6(x_1), g_7(x_1), g_8(x_1)\big),$$

$$\mathbf{G_{x_2}} = \mathrm{diag}\big(g_1(x_2), g_2(x_2), g_3(x_2), g_4(x_2), g_5(x_2), g_6(x_2), g_7(x_2), g_8(x_2)\big), \quad (34)$$

$$\mathbf{h_{x_1}} = \mathrm{diag}\big(h_{x_1,1}(x_1), h_{x_1,2}(x_1), h_{x_1,3}(x_1), h_{x_1,4}(x_1), h_{x_1,5}(x_1)\big),$$

$$\mathbf{h_{x_2}} = \mathrm{diag}\big(h_{x_2,1}(x_2), h_{x_2,2}(x_2), h_{x_2,3}(x_2), h_{x_2,4}(x_2), h_{x_2,5}(x_2)\big), \quad (35)$$

$$\mathbf{A_{x_1}} = \left\| \alpha^{x_1}{}_{i,j} \right\|, \mathbf{A_{x_2}} = \left\| \alpha^{x_2}{}_{i,j} \right\|, i = 1...8,\ j = 1...5;$$

$$\alpha^{x_1}{}_{i,j}, \alpha^{x_2}{}_{i,j} = 0, 1;\ \alpha^{x_1}{}_{i,j} + \alpha^{x_2}{}_{i,j} = 1. \quad (36)$$

Метод коммутирующих операторов и алгебраический метод разделения переменных в системе уравнений Максвелла. Суть метода коммутирующих операторов в ковариантном обобщении уравнения Дирака (25) заключается в следующем [5]:

– на основе использования свойств матриц $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$ строится невырожденное линейное преобразование, приводящее представление оператора уравнения (25) к виду суммы двух коммутирующих операторов, каждый из которых действует по соответствующим переменным:

$$\hat{\mathbf{L}}\,\Phi(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \hat{\mathbf{K}}_1 + \hat{\mathbf{K}}_{2,3,4} \right\} \Phi = 0, \quad (37)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_1 \hat{\mathbf{K}}_{2,3,4} - \hat{\mathbf{K}}_{2,3,4} \hat{\mathbf{K}}_1 = 0;$$

– зависимости волновой функции $\mathbf{\Phi}(x^1, x^2, x^3, x^4)$ от переменной x^1 и переменных x^2, x^3, x^4 определяются посредством решения задач на собственные значения и собственные функции операторов $\hat{\mathbf{K}}_1$ и $\hat{\mathbf{K}}_{2,3,4}$ соответственно

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{K}}_1 \Phi_1\left(x^1\right)=k_1\Phi_1\left(x^1\right),\\ \hat{\mathbf{K}}_{2,3,4}\Phi_2\left(x^2,x^3,x^4\right)=-k_1\Phi_2\left(x^2,x^3,x^4\right)\end{gathered}. \qquad (38)$$

При использовании алгебраического метода разделения переменных предполагается [6, 7]:

– решение уравнения (25) может быть представлено в виде

$$\mathbf{\Phi}\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_{14}\end{pmatrix}=\mathbf{f}\left(x^1\right)\times\mathbf{g}\left(x^2,x^3,x^4\right)\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad (39)$$

где $\mathbf{f}\left(x^1\right)$, $\mathbf{g}\left(x^2,x^3,x^4\right)$ – коммутирующие (антикоммутирующие) матрицы-функции размерности 4×4, т.е.

$$\mathbf{f}\times\mathbf{g}-\mathbf{g}\times\mathbf{f}=0 \ \left(\mathbf{f}\times\mathbf{g}+\mathbf{g}\times\mathbf{f}=0\right); \qquad (40)$$

– существует невырожденное линейное преобразование, приводящее уравнение (25) к виду

$$\hat{\mathbf{D}}_1\mathbf{f}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\hat{\mathbf{D}}_{2,3,4}\mathbf{g}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}. \qquad (41)$$

Очевидно, что метод коммутирующих операторов по сути своей является частным случаем алгебраического метода разделения переменных. Однако этот факт не умоляет его значимости: в квантовой механике он напрямую связан с постулатом о физическом операторе.

Возвращаясь теперь к формам записи уравнений Максвелла (3), (15), (21), заметим, что теоремы 3 и 4 решают проблему представления их решения в виде, аналогичном (39). Что же касается вопроса о коммутировании (антикоммутировании) соответствующих матриц, то он однозначно разрешается конкретным видом материальных уравнений (2).

Конкретные результаты применения алгебраического метода разделения переменных в уравнениях Максвелла и классификацию сред, допускающих разделения переменных, в данной работе, ввиду ограниченности ее объема, мы привести не можем.

Заключение. Таким образом, в данной работе нами найдены матричные представления уравнений Максвелла в неоднородных нестационарных анизотропных средах в произвольных ортогональных криволинейных системах координат. Полученные алгебраические представления уравнений Максвелла как по внешнему виду, так и по свойствам используемых матриц (свойства алгебры Клиффорда) аналогичны ковариантному обобщению уравнения Дирака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максвелл, Дж. К. Избраные сочинения по теории электромагнитного поля / пер. З.А. Цейтлина. – Москва: ГИТТЛ, 1952. – 688 с.

2. Андрушкевич, И.Е. Алгебраический метод разделения переменных в системе уравнений Максвелла / И.Е. Андрушкевич // в сб.: Тезисы докладов Международной алгебраической конференции «Классы групп и алгебр», 5–7 октября 2005 г., Гомель. – Гомель, 2005. – С. 32–33.

3. Андрушкевич, И.Е. О матричной формулировке уравнений Максвелла в неоднородных изотропных средах / И.Е. Андрушкевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 1. – С. 60–66.

4. Давыдов, А.С. Квантовая механика / А.С. Давыдов. – М.: Наука, 1973. – 704 с.

5. Андрушкевич, И.Е. О критериях разделимости переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях / И.Е. Андрушкевич, Г.В. Шишкин // ТМФ. – 1987. – № 2. – С. 289–302.

6. Андрушкевич, И.Е. Об алгебраическом методе разделения переменных в уравнении Дирака / И.Е. Андрушкевич // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6(27). – С. 158–164.

7. Андрушкевич, И.Е. О развитии алгебраического метода разделения переменных / И.Е. Андрушкевич // Вестник Могилевского государственного университета им. А.А. Кулешова. – 2008. – № 1(29). – С. 137–146.

8. Колмогоров, А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 114, № 5. – С. 953–956.

9. Sprecher, D.A. On the structure of continuous functions of several variables / D.A. Sprecher // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. 115. – P. 340–355.

10. Sprecher, D.A. A survey of solved and unsolved problems on superpositions of functions / D.A. Sprecher // J. Approxim. Theory. – 1972. – Vol. 6, № 2. – P. 123–134.

11. Doss, R. Representations of continous functions of several variables / R. Doss // Amer. J. Math. – 1976. – Vol. 98, № 2. – P. 375–383.

12. Андрушкевич, И.Е. О представлении решений системы уравнений Максвелла в виде суммы произведений матриц-функций одной переменной / И.Е. Андрушкевич, Ю.В. Шиенок // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. – 2010. – № 3. – С. 83–92.

Поступила в редакцию 2.06.2010

Адрес для корреспонденции: e-mail: racursj@yandex.ru – Андрушкевич И.Е.