

Влияние запаздывания в неавтономном осцилляторе Дuffинга на стационарные состояния укороченного уравнения

Р.И. Коржик, С.П. Жогаль

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Исследовано влияние запаздывания на динамические режимы укороченного уравнения неавтономного осциллятора Дuffинга с внешним гармоническим воздействием. Выведено укороченное уравнение и построены карты динамических режимов для различных значений параметра, характеризующего запаздывание.

Ключевые слова: осциллятор Дuffинга, стационарные состояния, влияние запаздывания, укороченное уравнение, внешнее периодическое воздействие, критерий устойчивости Рауса–Гурвица, бифуркации.

Influence of delay of the non-autonomous Duffing's oscillator on the stationary states of abridged equation

R.I. Korzhik, S.P. Zhogal

Gomel State University named after Francysk Skaryna

The effect of delay on the dynamical regimes of abridged equation of non-autonomous Duffing's oscillator with an external harmonic influence was investigated. Abridged equation was derived and the maps of dynamical regimes for different values of the parameter characterizing the delay were presented.

Key-words: Duffing's oscillator, stationary states, influence of delay, abridged equation, external periodic effect, Routh–Hurwitz stability criterion, bifurcation.

В химии, биологии, электронике и других областях естествознания широко распространены системы с предельным циклом, которые подвержены внешнему воздействию [1–3]. Целью настоящей работы является изучение одной из таких систем – осциллятора Дuffинга с внешним периодическим воздействием и запаздыванием:

$$\ddot{x}[t] + \gamma \dot{x}[t] + \omega_0^2 x[t] + \beta x^3[t - \delta] = b \sin \omega t. \quad (1)$$

Параметр b определяет безразмерную амплитуду, ω задает частоту внешнего воздействия, ω_0 определяет частоту собственных колебаний осциллятора, β является параметром нелинейности, δ – неотрицательное запаздывание.

Вывод укороченного уравнения. Решение уравнения (1) будем искать в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой $A(t)$:

$$x(t) = \operatorname{Re}(A(t)e^{i\omega t}) = \frac{1}{2} A(t)e^{i\omega t} + \frac{1}{2} A^*(t)e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

где $A^*(t)$ – комплексно сопряженное к $A(t)$.

На искомое решение наложим дополнительное условие:

$$\dot{A}e^{i\omega t} + \dot{A}^*e^{-i\omega t} = 0. \quad (3)$$

После подстановки (2) в уравнение (1) и усреднения за период $2\pi/\omega$, получим уравнение:

$$8\omega \dot{A} + 4(\omega\gamma - i(\omega^2 - \omega_0^2))A - 3i\beta A|A|^2 e^{-i\delta} + 4b = 0. \quad (4)$$

Для уменьшения количества параметров приведем уравнение к безразмерному виду. Для этого введем две новые переменные $A = Cz(\tau)$, $t = B\tau$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dCz}{dB\tau} = \frac{Cdz}{Bd\tau} = \frac{C}{B} \dot{z}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в укороченное уравнение (4) и домножая на $8/(\beta C^3)$, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{8\omega}{3\beta C^2 B} \dot{z} + \frac{4i(\omega^2 - \omega_0^2)}{3\beta C^2} z + \frac{4\omega\gamma}{3\beta C^2} z - iz|z|^2 e^{-i\delta\omega} + \frac{4b}{3\beta C^3} = 0. \quad (6)$$

Константы C и B находим из системы:

$$\begin{cases} \frac{8\omega}{3\beta C^2 B} = 1 \\ \frac{4\omega\gamma}{3\beta C^2} = 1 \end{cases}.$$

Таким образом, приходим к замене:

$$\tau = \frac{\gamma t}{2}, z = \frac{A\sqrt{3\beta}}{2\sqrt{\omega\gamma}}, \Delta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\gamma},$$

$$\varepsilon = \frac{b\sqrt{3\beta}}{2\omega\gamma\sqrt{\omega\gamma}}, \theta = \delta\omega. \quad (7)$$

Переписав уравнение в новых переменных, получаем уравнение с тремя параметрами:

$$\dot{z} - iz|z|^2 e^{-i\theta} + i\Delta z + z + \varepsilon = 0. \quad (8)$$

Функцию $z(\tau)$ можно записать в виде $Re^{i\varphi}$, где R и φ – некоторые функции переменной τ . Тогда из уравнения (8), разделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\dot{R} = R^3 \sin \theta - R - \varepsilon \cos \varphi, \quad (9)$$

$$\dot{\varphi} = R^2 \cos \theta + (\varepsilon/R) \sin \varphi - \Delta.$$

Построение линий бифуркации. Пусть (R_0, φ_0) – особая точка системы (9). Тогда уравнения (9) в стационарном виде примут вид ($\dot{R} = \dot{\varphi} = 0$):

$$R_0^3 \sin \theta - R = \varepsilon \cos \varphi_0, \quad (10)$$

$$\Delta R_0 - R_0^3 \cos \theta = \varepsilon \sin \varphi_0.$$

Возводя обе части в квадрат, складывая и делая замену $\xi_0 = R_0^2$, получим:

$$\xi_0^3 - 2(\sin \theta + \Delta \cos \theta)\xi_0^2 + (\Delta^2 + 1)\xi_0 = \varepsilon^2. \quad (11)$$

Решения уравнения (11) относительно ξ_0 будут давать стационарные состояния.

Для изучения поведения системы вблизи стационарных состояний будем искать решение системы в виде:

$$R(\tau) = R_0 + \tilde{R}(\tau), \quad (12)$$

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + \tilde{\varphi}(\tau).$$

После подстановки (12) в систему (10) и разложения в ряд Тейлора в окрестности особой точки, получим (пренебрегая членами второго и высших порядков):

$$\dot{\tilde{R}}(\tau) = (3R_0^2 \sin \theta - 1)\tilde{R} + (\Delta R_0 - R_0^3 \cos \theta)\tilde{\varphi}, \quad (13)$$

$$\dot{\tilde{\varphi}}(\tau) = (3R_0 \cos \theta - \frac{1}{R_0})\tilde{R} + (R_0^2 \sin \theta - 1)\tilde{\varphi}.$$

Характеристическое уравнение для системы (13) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 3R_0^2 \sin \theta - 1 - \lambda & \Delta R_0 - R_0^3 \cos \theta \\ 3R_0 \cos \theta - \frac{1}{R_0} & R_0^2 \sin \theta - 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) после преобразования можно записать в следующем виде:

$$\lambda^2 - S\lambda + J = 0, \quad (15)$$

где

$$S = 4\xi_0 \sin \theta - 2, \quad (16)$$

$$J = 3\xi_0^2 - 4(\sin \theta + \Delta \cos \theta)\xi_0 + \delta^2 + 1.$$

Применяя критерий Рауса–Гурвица, получаем следующее условие устойчивости:

$$0 < J, \quad (17)$$

$$0 > S.$$

Для построения линий бифуркации приравняем S и J к нулю и решим полученные уравнения относительно ξ_0 .

Решение уравнения $J = 0$ будет следующим:

$$\xi_{1,2} = \frac{2 \sin \theta + 2 \Delta \cos \theta \pm \sqrt{(1 + 4 \sin^2 \theta) \Delta^2 + 8 \Delta \sin \theta \cos \theta + 1 + 4 \cos^2 \theta}}{3}. \quad (18)$$

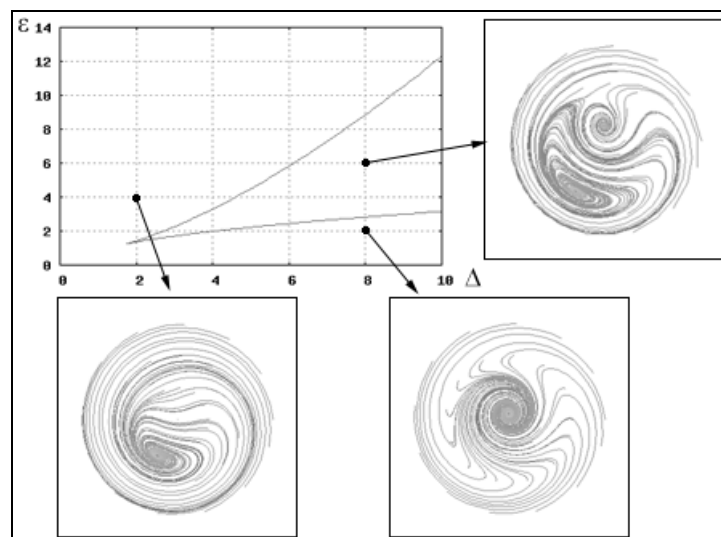


Рис. 1. Линии бифуркации и фазовые портреты при $\theta = 0$.

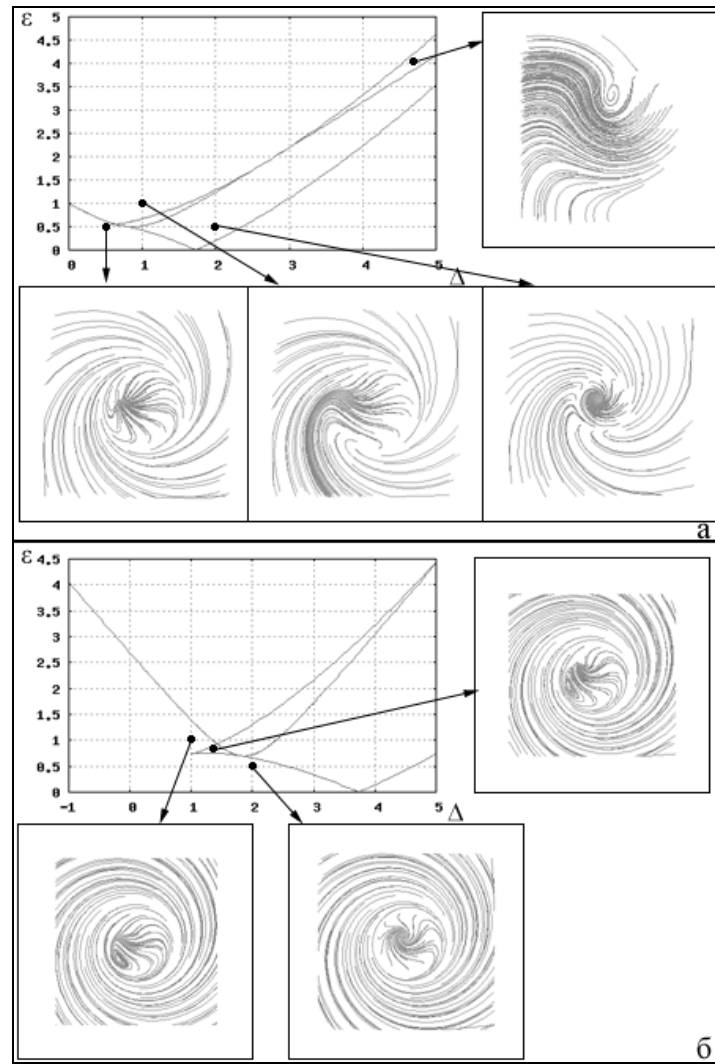


Рис. 2. Линии бифуркации и фазовые портреты при $\theta = \pi/6$ (а) и при $\theta = \pi/12$ (б).

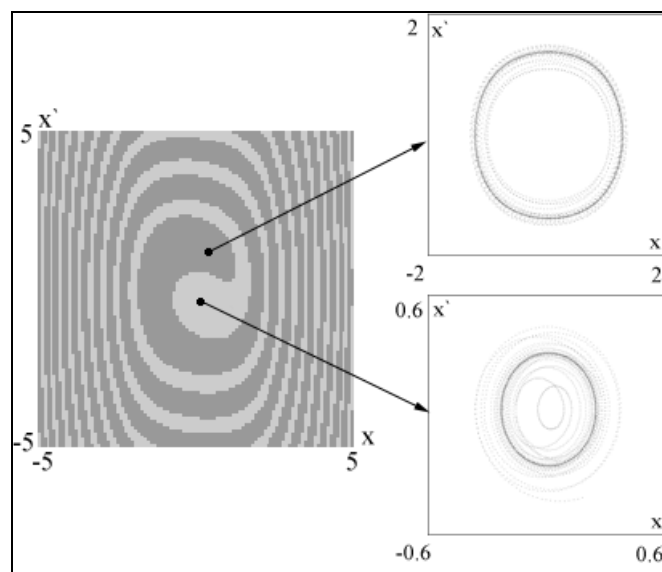


Рис. 3. Бассейны притяжения для уравнения (1).

Подставив (18) в уравнение (11), мы получим линии в плоскости параметров (при фиксированном параметре θ), при пересечении которых J будет менять знак на противоположный. Аналогично можно получить линию для уравнения $S=0$. В отсутствие запаздывания это уравнение не будет иметь решений.

На рис. 1 приведены линии бифуркации, соответствующие уравнению $J=0$. Как видно из данного рисунка, внутри области, которая ограничена кривыми, наблюдаются два устойчивых стационарных состояния и одно седло. Вне области – одно стационарное состояние, которое является устойчивым.

При пересечении параметрами кривых, полученных из выражений (11) и (18), будет изменяться и количество стационарных состояний. Это видно и по фазовым портретам, которые приведены на рис. 1.

При $\theta \neq 0$ возникает еще одна линия бифуркации, которая получается из уравнения $S=0$. При пересечении линии, которую даст решение этого уравнения, устойчивость стационарного состояния будет изменяться только тогда, когда выполняется первое из условий (17). Для того, чтобы определить точное условие, когда изменение устойчивости происходить не будет, подставим решение уравнения $S=0$ в неравенство $J < 0$. После подстановки и решения относительно Δ получим следующее условие:

$$\frac{2 \cos \theta - 1}{2 \sin \theta} < \Delta < \frac{2 \cos \theta + 1}{2 \sin \theta}. \quad (19)$$

Неравенство (19) записано в предположении, что $0 < \theta < \pi/2$.

На рис. 2 показаны линии бифуркации и фазовые портреты для различных областей. На нем видно, что при наличии запаздывания на всех фазовых портретах присутствуют кривые, которые устремляются в бесконечность. Также на одном из фазовых портретов виден неустойчивый предельный цикл.

В системе без запаздывания был режим работы, в котором наблюдались два устойчивых стационарных состояния. Этот режим есть и

в системе с запаздыванием. На рис. 2а область, соответствующая этому режиму, слишком мала. На рис. 2б приведена карта динамических режимов при $\theta = \pi/12$, где эта область видна более отчетливо.

Взаимосвязь укороченного уравнения и исходного. Возвращаясь к системе (9) без запаздывания, изучим более детально область с двумя устойчивыми состояниями. Наличие такой области говорит о том, что в зависимости от начальных условий система будет приходить в одно из этих двух состояний. Это демонстрируется и на соответствующем фазовом портрете. Похожим образом будет вести себя и первоначальная система (1). Только на фазовой плоскости будут не устойчивые фокусы, а предельные циклы. Для демонстрации этого факта были построены фазовые кривые для различных начальных значений, а также бассейны притяжения.

На рис. 3 приведены бассейны притяжения и фазовые кривые для системы (1) со следующими параметрами:

$$\omega_0 = 1, \omega = 1.2, \gamma = 0.05, b = 0.1, \beta = 0.5. \quad (20)$$

Для системы (9) параметры Δ, ε примут значения, соответствующие области с двумя устойчивыми состояниями.

Относительно связи карты динамических режимов системы (9) с первоначальной системой (1) при наличии запаздывания говорить несколько сложнее, так как для решения (1) необходимы значения $x[t_n]$, где $t_n \in [t_0 - \delta; t_0]$. И эта связь требует дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов, А.П. Нелинейные колебания / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. – Москва: Физматлит, 2002. – 292 с.
2. Ланда, П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы / П.С. Ланда. – Москва: Наука, 1980. – 360 с.
3. Пиковский, А. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / А. Пиковский, М. Розенблум, Ю. Куртс. – Москва: Техносфера, 2003. – 496 с.
4. Кузнецов, С.П. Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн / С.П. Кузнецов. – 2-е изд. – Москва: Физматлит, 2006. – 356 с.

Поступила в редакцию 6.09.2010

Адрес для корреспонденции: 246028, г. Гомель, ул. Ландышева, д. 4, кв. 3; тел. моб. +375-29-235-92-38 – Коржик Р.И.

