



О холловых подгруппах конечных групп

Го Веньбин*, О.В. Нетбай**, А.Н. Скиба***

*Университет науки и технологии Китая

**Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского

***Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

В статье найдены новые критерии существования и сопряженности холловых подгрупп конечных групп. В частности, обобщены теоремы Шура–Цассенхауза, Холла и С.А. Чунихина о холловских подгруппах конечных групп.

Ключевые слова: *X-перестановочная подгруппа, π -отделимая группа, π -разрешимая группа, холлова π -подгруппа.*

On Hall subgroups of Finite groups

Guo Wenbin*, O.V. Netbai**, A.N. Skiba***

*Department of Mathematics, University of Science and Technology of China

**Petrovskii Bryansk State University, Department of Mathematics and Physics,

***Chair of Informatics and Applied Mathematics Skorina Gomel State University

The new criteria of existence and conjugacy of Hall subgroups of finite groups are given. In particular, the Schur–Zassenhaus theorem, Hall theorem and S.A. Čunihin theorem on Hall subgroups of finite groups are generalized.

Key words: *X-permutable subgroup, π -separated group, π -soluble group, Hall π -subgroup.*

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны, G обозначает конечную группу и π – непустое подмножество множества простых чисел. Подгруппа H называется перестановочной с подгруппой B , если $HB = BH$.

Подгруппа H называется X -перестановочной с подгруппой B , если $HB^x = B^xH$ для некоторого $x \in X$, где X – подгруппа группы G . Остальная используемая в статье терминология стандартна и при необходимости мы отсылаем читателя к [1, 2].

Известная теорема Шура–Цассенхауза утверждает: если в G имеется нормальная холлова π -подгруппа A , то G является $E_{\pi'}$ -группой (т.е. в G имеется холлова π' -группа). Кроме того, если A или G/A разрешима, то A является $C_{\pi'}$ -подгруппой (т.е. любые две холловы π' -подгруппы в G сопряжены).

В 1928 Холл [3] доказал: конечная разрешимая группа G имеет холлову π -подгруппу и любые две холловы π -подгруппы сопряжены в G .

Напомним, что группа G называется π -отделимой, если G имеет нормальный ряд

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_{t-1} \leq G_t = G, \quad (*)$$

где каждый индекс $|G_i : G_{i-1}|$ является либо π -числом, либо π' -числом. Группа G называется π -разрешимой, если каждый индекс $|G_i : G_{i-1}|$ ряда (*) является степенью либо простого π -числа, либо π' -числа.

Развивая теорему Шура–Цассенхауза и теорему Холла, в 1949 г. С.А. Чунихин доказал следующий классический результат.

Теорема (С.А. Чунихин [4]). *Если G π -отделима, то G является E_{π} -группой и $E_{\pi'}$ -группой. Кроме того, если G π -разрешима, то G является C_{π} -группой и $C_{\pi'}$ -группой.*

Известно, что теорема Шура–Цассенхауза, теорема Холла и теорема С.А. Чунихина являются фундаментальными в теории групп. В связи с этим естественным является возникновение следующих двух проблем:

Проблема I. Можно ли ослабить условие нормальности для холловой подгруппы A группы G таким образом, чтобы заключение теоремы Шура–Цассенхауза выполнялось?

Проблема II. Можем ли мы заменить условие нормальности для членов ряда (*) на более слабое условие, например, условие перестано-

вочности членов ряда (*) с некоторой системой подгрупп группы G .

Некоторые результаты по решению проблемы I получены в [5–7]. Нами доказана следующая более общая теорема.

Теорема 1. Пусть A – холлова π -подгруппа группы G , X – некоторая нормальная π -отделимая подгруппа группы G . Пусть $G = AT$ для некоторой подгруппы T группы G . Если A является X -перестановочной с каждой силовской подгруппой из T и одна из групп A или T разрешима, то в T содержится дополнение подгруппы A в G и любые два дополнения подгруппы A в G сопряжены.

Заметим, что известная теорема Фейта–Томпсона о группах нечетного порядка не используется при доказательстве теоремы 1. Используя теорему Фейта–Томпсона, можно получить следующую более сильную версию теоремы 1.

Теорема 2. Пусть A – холлова π -подгруппа группы G , X – некоторая нормальная π -отделимая подгруппа группы G . Пусть $G = AT$ для некоторой подгруппы T группы G . Если A является X -перестановочной с каждой силовской подгруппой из T , то в T содержится дополнение подгруппы A в G и любые два дополнения подгруппы A в G сопряжены.

Напомним, что подгруппа H группы G называется добавлением к подгруппе A в G , если $AH = G$. Пусть

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{t-1} \leq H_t = G \quad (**)$$

– некоторый ряд подгрупп группы G . Говорят, что ряд подгрупп

$$1 = T_t \leq T_{t-1} \leq \dots \leq T_1 \leq T_0 = G$$

является добавлением к ряду (**) в G , если T_i являются добавлениями к H_i в G для всех $i = 0, 1, \dots, t$.

Следующая наша теорема дает положительный ответ на проблему II.

Теорема 3. Пусть X – некоторая нормальная π -отделимая подгруппа группы G . Предположим, что в G имеется ряд подгрупп

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{t-1} \leq H_t = G$$

и добавление

$$1 = T_t \leq T_{t-1} \leq \dots \leq T_1 \leq T_0 = G$$

к этому ряду в G такое, что H_i является X -перестановочной со всеми силовскими под-

группами из T_i для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Если каждый индекс $|H_{i+1} : H_i|$ является либо π -числом, либо π' -числом, то G является E_π -группой и $E_{\pi'}$ -группой. Кроме того, если каждый π -индекс $|H_{i+1} : H_i|$ является степенью простого числа, то в G имеется разрешимая холлова π -подгруппа.

Следствие 1. Предположим, что в G имеется ряд подгрупп

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{t-1} \leq H_t = G$$

и добавление

$$1 = T_t \leq T_{t-1} \leq \dots \leq T_1 \leq T_0 = G$$

к этому ряду в G такое, что H_i перестановочна со всеми силовскими подгруппами из T_i для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Если каждый индекс $|H_{i+1} : H_i|$ ($i = 0, 1, \dots, t-1$) является степенью простого числа, то G является E_π -группой для любого множества простых чисел π .

Следствие 2. Предположим, что в G имеется ряд подгрупп

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{t-1} \leq H_t = G$$

и добавление

$$1 = T_t \leq T_{t-1} \leq \dots \leq T_1 \leq T_0 = G$$

к этому ряду в G такое, что H_i перестановочна со всеми силовскими подгруппами из T_i для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Если каждый индекс $|H_{i+1} : H_i|$ есть степень простого числа, то G разрешима.

Теорема 4. Пусть X – некоторая нормальная π -отделимая подгруппа группы G . Предположим, что в G имеется ряд подгрупп

$$1 = H_0 < H_1 \leq \dots \leq H_{t-1} \leq H_t = G$$

и подгруппа T такая, что $G = H_1 T$ и H_i является X -перестановочной со всеми подгруппами из T для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Если каждый индекс $|H_{i+1} : H_i|$ является либо π -числом, либо π' -числом, то G является E_π -группой и $E_{\pi'}$ -группой. Кроме того, если каждый π -индекс $|H_{i+1} : H_i|$ является степенью простого числа, то G является C_π -группой и $C_{\pi'}$ -группой.

Нами также была получена более сильная версия теоремы 3.

Теорема 5. Пусть X – некоторая нормальная π -отделимая подгруппа группы G . Пред-

положим, что в G имеется ряд подгрупп

$$1 = H_0 < H_1 \leq \dots \leq H_{t-1} \leq H_t = G$$

и подгруппа T такая, что $G = H_1 T$ и H_i является X -перестановочной со всеми силовскими подгруппами из T для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Если каждый индекс $|H_{i+1} : H_i|$ является либо π -числом, либо π' -числом, то G является C_π -группой и $C_{\pi'}$ -группой.

Следующий пример показывает, что при выполнении условий теорем 1, 2 или 3 группа G необязательно π -отделима.

Пример 1. Пусть $G = A_5 \times C_7$, где C_7 – группа порядка 7 и A_5 – знакопеременная группа степени 5. Пусть C_5 – силовская 5-подгруппа из A_5 . Рассмотрим ряд подгрупп

$$1 = H_0 < H_1 < H_2 < H_3 = G, \quad (***)$$

где $H_1 = A_4$ и $H_2 = A_5$. Тогда ряд $1 = T_3 < T_2 < T_1 < T_0 = G$, где $T_2 = C_7$ и $T_1 = C_5 \times C_7$, – добавление к ряду (***) в G . Очевидно также, что H_i перестановочна со всеми подгруппами из T_i для всех i . Пусть $\pi = \{5, 7\}$. Тогда каждый индекс ряда (***) является либо π -числом, либо π' -числом. Однако G не π -отделима.

Теорема 6. Пусть G – группа, $\emptyset \neq X \subseteq P$ и $X = F(G)$. Предположим, что в G имеется ряд подгрупп

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{t-1} \leq H_t = G \quad (*)$$

и добавление $1 = T_t \leq T_{t-1} \leq \dots \leq T_1 \leq T_0 = G$ к ряду (*) в G такое, что H_i является X -перестановочной со всеми силовскими подгруппами и всеми максимальными подгруппами любой силовской подгруппы из T_i для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Предположим также, что для каждого i индекс $|H_{i+1} : H_i|$ является либо степенью простого числа p_i^α , где $p \in \pi$, либо π' -числом. Если для любых двух π -индексов $|H_{i+1} : H_i|$ и $|H_{j+1} : H_j|$, где $i < j$, имеем $p_i \geq p_j$, то в G имеется дисперсивная по Оре холлова π -подгруппа.

Теорема 7. Предположим, что в G имеется ряд подгрупп

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{t-1} \leq H_t = G \quad (*)$$

и добавление $1 = T_t \leq T_{t-1} \leq \dots \leq T_1 \leq T_0 = G$ к ряду (*) в G такое, что H_i перестановочна со всеми подгруппами из T_i для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Предположим также, что для всех $i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ индекс $|H_{i+1} : H_i|$ – простое число, принадлежащее либо множеству π , либо множеству π' . Тогда в G имеется сверхразрешимая холлова π -подгруппа.

Нами получена также следующая новая характеристика π -отделимых групп.

Теорема 8. Для данной группы G следующие условия эквивалентны:

- (1) G является π -отделимой группой;
- (2) $G = AB$, где A – холлова π -подгруппа группы G и B – холлова π -подгруппа группы G такие, что A является G -перестановочной с каждой силовской подгруппой из B и B является G -перестановочной с каждой силовской подгруппой из A .
- (3) В G имеются холлова π -подгруппа A , холлова π' -подгруппа B и нормальная π -отделимая подгруппа X такие, что для некоторых простых чисел p, q подгруппа A является X -перестановочной со всеми силовскими подгруппами из B порядка p и B является X -перестановочной со всеми силовскими подгруппами из A порядка q .

ЛИТЕРАТУРА

1. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин // Наука и техника. – Минск, 1964.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // Наука. – Москва, 1978.
3. Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1928. – P. 98–105.
4. Чунихин, С.А. О теоремах типа Силова / С.А. Чунихин // Доклады академии наук СССР. – 1949. – С. 65–68.
5. Wenbin Guo. X-semipermutable subgroups of finite groups / Wenbin Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – P. 31–41.
6. Wenbin Guo. Schur–Zassenhaus Theorem for X-permutable subgroups / Wenbin Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Algebra Colloquium. – 2008(2). – P. 185–192.
7. Wenbin Guo. Criteria of Existence of Hall Subgroups in Non-soluble Finite Groups / Wenbin Guo, A.N. Skiba // Acta Mathematica Sinica. – 2009(25). – № 6. – P. 911–919.

Поступила в редакцию 7.09.2010

Адрес для корреспонденции: 241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14, Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, кафедра информатики и прикладной математики, netbay_ov@mail.ru – Нетбай О.В.

