УДК 517.987.1+517.986.24

Пространство максимальных идеалов алгебры функций с разрывами экспоненциального типа и меры на нем

А.Н. Глаз
Белорусский государственный университет

При исследовании операторов взвешенного сдвига и интегральных сингулярных уравнений возникает задача изучения разрывных коэффициентов. Некоторые свойства операторов зависят от свойств алгебры, которой принадлежат коэффициенты. В частности, спектральные свойства сингулярных интегральных операторов с разрывными коэффициентами существенно отличаются от случая непрерывных коэффициентов.

Цель статьи – описание пространства максимальных идеалов алгебры функций с разрывами экспоненциального типа и меры на нем.

Материал и методы. *Материалом для исследования является алгебра функций с разрывами экспоненциального типа на отрезке.*

Результаты и их обсуждение. *В работе рассмотрены некоторые свойства функций алгебры* ***A****, порожденной функциями с разрывами экспоненциального типа на отрезке. Показано, что пространство максимальных идеалов M(****A****) алгебры* ***A*** *можно представить в виде отрезка и двух экземпляров цилиндра. Были построены элементарные окрестности на M(****A****). Описаны меры на нем и сопряженное пространство к* ***A****.*

Заключение. *Полученные результаты могут быть использованы при изучении операторов с коэффициентами из алгебры* ***A****.*

Ключевые слова: *функция с разрывами экспоненциального типа, пространство максимальных идеалов, сопряженное пространство.*

Maximal Ideal Space of Functions with Exponential Discontinuities and Measures on it

A.N. Glaz
Belarusian State University

In some applications, such as in the study of weighted shift operators and integral singular equations, there is a problem of studying discontinuous coefficients. Some properties of the operators depend on the properties of the coefficient algebra. In particular, the spectral properties of singular integral operators with discontinuous coefficients are substantially different from the case of continuous coefficients.

Aim of this article is to describe the maximal ideal space of functions with exponential discontinuities and measures on it.

Materials and methods. *The material for this study is the algebra of functions with exponential discontinuities of almost periodic type on an interval.*

Findings and discussion. *In this paper some properties of functions of the algebra* ***A*** *generated by functions with exponential discontinuities on an interval are researched. It is shown that the maximal ideal space M(****A****) of A can be represented in the form of an interval and two copies of the cylinder. Measures and the dual space of* ***A*** *are described.*

Conclusion. *The results obtained can be used in the study of operators with coefficients in algebra* ***A****.*

Key words: *function with exponential discontinuities, the maximal ideal space, the dual space.*

В ряде задач, например, при исследовании операторов взвешенного сдвига ([1]) и интегральных сингулярных уравнений ([2]), возникает задача изучения разрывных коэффициентов. Некоторые свойства операторов зависят от свойств алгебры, которой принадлежат коэффициенты. В частности, спектральные свойства сингулярных интегральных операторов с разрывными коэффициентами существенно отличаются от случая непрерывных коэффициентов ([2]).

Поскольку C^*-алгебра изоморфна алгебре непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов ([3]), то операторы с разрывными коэффициентами из алгебры **A** можно представить в виде оператора с непрерывными коэффициентами на пространстве максимальных идеалов.

Свойства линейных непрерывных операторов связаны со свойствами сопряженных к ним операторов, а для этого надо знать, как выглядит сопряженное пространство к пространству коэффициентов.

Естественно возникает задача исследовать алгебры разрывных коэффициентов, описать ее пространство максимальных идеалов и построить сопряженное пространство.

Простейший случай разрывных функций, то есть функций, имеющих разрывы первого рода, был рассмотрен ранее ([4]). В данной статье исследуется алгебра $\mathbf{A}$, порожденная функциями с разрывами почти периодического типа на отрезке. Строятся в явном виде пространство максимальных идеалов алгебры $\mathbf{A}$, меры на нем и описывается сопряженное пространство к $\mathbf{A}$.

1. Свойства функций

Будем рассматривать множество $\mathbf{A}_c$ комплекснозначных функций на $[0,1]$, обладающих конечными односторонними пределами $\lim_{t\to\tau-0}x(t):=x(\tau-0)$ и $\lim_{t\to\tau+0}x(t):=x(\tau+0)$ в каждой точке отрезка $[0,1]$. При этом возможно, что ни один из односторонних пределов в некоторой точке не совпадает со значением в этой точке.

Будем рассматривать функции $\omega_\alpha^\pm:[0,1]\to\mathbb{C}$

$$\omega_\alpha^\pm(t)=\begin{cases}e^{\pm\frac{i}{t-\alpha}}, & t\neq\alpha,\\ 0, & t=\alpha.\end{cases}\qquad(1)$$

Пусть $\mathbf{A}_0$ – множество всех конечных линейных комбинаций конечных произведений функций $x\in\mathbf{A}_c$ и $\omega_\alpha^\pm$, $\mathbf{A}$ – замыкание $\mathbf{A}_0$ в пространстве ограниченных комплекснозначных функций, то есть по норме

$$||x||=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|.$$

Очевидно, что $\mathbf{A}$ – коммутативная C*-алгебра со стандартными поточечными операциями сложения и умножения и инволюцией, заданной комплексным сопряжением $x^*(t)=\overline{x}(t)$. Более того, $\mathbf{A}$ – наименьшая из алгебр, содержащих множество $\mathbf{A}_c$ и функции $\omega_\alpha^\pm$.

Элементы алгебры $\mathbf{A}$ будем называть *функциями с разрывами экспоненциального типа*.

Рассмотрим некоторые свойства функций из исследуемого пространства.

Теорема 1. *Если $x\in\mathbf{A}$, то существуют пределы*

$$\lim_{k\to-\infty}x\left(\frac{1}{2\pi k+\lambda}+\tau\right):=x(\tau-0,\lambda),\quad \tau\in(0,1],\lambda\in\mathbb{R},\qquad(2)$$

$$\lim_{k\to+\infty}x\left(\frac{1}{2\pi k+\lambda}+\tau\right):=x(\tau+0,\lambda),\quad \tau\in[0,1),\lambda\in\mathbb{R},\qquad(3)$$

и для произвольных $\tau\in(0,1]$ или $\tau\in[0,1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ и $m\in\mathbb{Z}$ верно равенство

$$x(\tau\pm0,\lambda)=x(\tau\pm0,\lambda+2\pi m).\qquad(4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала существование предела (2) и равенство (4) со знаком «+». Зафиксируем $\lambda\in\mathbb{R}$, $\tau\in(0,1]$. Если $x_0\in\mathbf{A}_c$, то существуют пределы $x(\tau-0,\lambda+2\pi m)$, $m\in\mathbb{Z}$, и выполнено

$$x_0(\tau-0,\lambda)=x_0(\tau-0,\lambda+2\pi m)=x_0(\tau-0).$$

Для функций (1)

$$\omega_\tau^\pm(\tau-0,\lambda)=\omega_\tau^\pm(\tau-0,\lambda+2\pi m)=e^{\pm i\lambda},$$

$$\omega_\alpha^\pm(\tau-0,\lambda)=\omega_\alpha^\pm(\tau-0,\lambda+2\pi m)=\omega_\alpha^\pm(\tau),\quad \alpha\neq\tau.$$

Следовательно, для произвольной функции из $\mathbf{A}_0$ предел (2) существует и выполнено равенство (4) для знака «–», как конечной линейной комбинации конечных произведений функций, обладающих такими свойствами. Аналогично доказывается, что для произвольной функции из $\mathbf{A}_0$ существует предел (3) и выполнено равенство (4) для знака «+» для всех $\tau\in[0,1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ и $m\in\mathbb{Z}$.

Покажем теперь, что для функции $x\in\mathbf{A}$ предел (2) существует.

Поскольку $x\in\mathbf{A}$, то существует равномерно сходящаяся к ней последовательность функций $x_n\in\mathbf{A}_0$. Так как x_n является последовательностью Коши в $\mathbf{A}$, то для произвольного $\varepsilon>0$ существует $n_0=n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, такое, что для всех $n\geq n_0$ верно

$$\sup_{t\in[0,1]}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

Возьмем $t_k=\frac{1}{2\pi k+\lambda}+\tau$ и рассмотрим предел при $k\to-\infty$ вместо sup, получим

$$\lim_{k\to-\infty}\left|x_n\left(\frac{1}{2\pi k+\lambda}+\tau\right)-x_m\left(\frac{1}{2\pi k+\lambda}+\tau\right)\right|=$$
$$=|x_n(\tau-0,\lambda)-x_m(\tau-0,\lambda)|<\varepsilon.$$

Это значит, последовательность $(x_n(\tau-0,\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ является последовательностью Коши в $\mathbb{C}$, а следовательно, существует предел этой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}x_n(\tau-0,\lambda)=A_{\{\tau-,\lambda\}}.$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Поскольку $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ в $\mathbf{A}$ и $\lim_{n\to\infty}x_n(\tau-0,\lambda)=A_{\{\tau-,\lambda\}}$ в $\mathbb{C}$, то существует номер $N=N(\varepsilon)$, такой, что выполнено

$$|x(t)-x_N(t)|<\varepsilon/3,\qquad \forall t\in[0,1],$$
$$|x_N(\tau-0,\lambda)-A_{\{\tau-,\lambda\}}|<\varepsilon/3.$$

Так как $x_N\in\mathbf{A}_0$, то, как показано выше, предел (2) существует, то есть существует номер $K(\varepsilon,N(\varepsilon))=K(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, такой, что $\forall k\leq -K(\varepsilon)$ выполнено

$$\left|x_N\left(\frac{1}{2\pi k+\lambda}+\tau\right)-x_N(\tau-0,\lambda)\right|<\varepsilon/3.$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon>0$ существует $K(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, такой, что $\forall k\leq -K(\varepsilon)$ выполнено

$$\left|x\left(\frac{1}{2\pi k+\lambda}+\tau\right)-A_{\{\tau-,\lambda\}}\right|\leq$$
$$\leq\left|\begin{matrix}x\left(\frac{1}{2\pi k+\lambda}+\tau\right)-\\ -x_N\left(\frac{1}{2\pi k+\lambda}+\tau\right)\end{matrix}\right|+$$
$$+\left|x_N\left(\frac{1}{2\pi k+\lambda}+\tau\right)-x_N(\tau-0,\lambda)\right|+$$
$$+|x_N(\tau-0,\lambda)-A_{\{\tau-,\lambda\}}|<\varepsilon.$$

Другими словами, $\forall x \in \mathbf{A}$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\tau \in (0,1]$ существует предел $x(\tau - 0, \lambda)$ и равен $A_{\{\tau-,\lambda\}}$.

Аналогично доказывается существование предела (3) и равенство (4) со знаком «+».

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $x \in \boldsymbol{A}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \tau_1 \in (0,1], \tau_2 \in [0,1)$. *Тогда*

1) для произвольного $\varepsilon > 0$ *существуют* $\delta_1(\varepsilon) > 0$ *и* $K_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *такие, что для всех* λ, *удовлетворяющих условию* $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1(\varepsilon)$, *и для всех* $k \leq -K_1(\varepsilon)$ *выполнены неравенства:*

$$|x(\tau_1 - 0, \lambda) - x(\tau_1 - 0, \lambda_0)| < \varepsilon,$$

$$\left| x\left(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1\right) - x(\tau_1 x(\tau_1 - 0, \lambda_0)\right| < \varepsilon;$$

2) для произвольного $\varepsilon > 0$ *существуют* $\delta_2(\varepsilon) > 0$ *и* $K_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *такие, что для всех* λ, *удовлетворяющих условию* $|\lambda - \lambda_0| < \delta_2$, *и для всех* $k \geq K_2$ *выполнены неравенства:*

$$|x(\tau_2 - 0, \lambda) - x(\tau_2 - 0, \lambda_0)| < \varepsilon,$$

$$\left| x(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_2) - x(\tau_2 - 0, \lambda_0)\right| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что верно утверждение 1) теоремы.

Поскольку для $x_0 \in \mathbf{A}_c$ выполнено

$$\left| x_0\left(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1\right) - x_0(\tau_1 - 0, \lambda_0)\right| =$$

$$= \left| \begin{matrix} x_0\left(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1\right) \\ -x_0(\tau_1 - 0) \end{matrix} \right| \xrightarrow[k \to -\infty]{} 0, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

для функций $\omega_{\tau_1}^{\pm}$ выполнено

$$\left| \omega_{\tau_1}^{\pm}\left(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1\right) - \omega_{\tau_1}^{\pm}(\tau_1 - 0, \lambda_0)\right| =$$

$$= |e^{\pm i\lambda} - e^{\pm i\lambda_0}| \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} 0, \forall k \in \mathbb{Z},$$

а для функции $\omega_{\alpha}^{\pm}$ при $\alpha \neq \tau_1$

$$\left| \omega_{\alpha}^{\pm}(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1) - \omega_{\alpha}^{\pm}(\tau_1 - 0, \lambda_0)\right| =$$

$$= \left| \exp\left(\pm \frac{1}{\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1 - \alpha} \right) - \exp(\pm \frac{1}{\tau_1 - \alpha}) \right|$$

$$\xrightarrow[k \to -\infty]{} 0, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

то для произвольной функции из $\mathbf{A}_0$ утверждение 1) теоремы верно.

Пусть последовательность функций $x_n \in \mathbf{A}_0$ сходится к $x \in \mathbf{A}$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:$$

$$\forall n \geq N \ \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - x_n(t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда

$$\lim_{k \to -\infty} \left| x_0(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau) - x_N(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau) \right| =$$

$$= |x_0(\tau_1 - 0, \lambda) - x_N(\tau_1 - 0, \lambda)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как $x_N \in \mathbf{A}_0$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon, N)$ и $K_1(\varepsilon) = K_1(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}$, такие, что для всех λ, удовлетворяющих условию $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1(\varepsilon)$, и для всех $k \leq -K_1(\varepsilon)$ выполнено

$$\left| x_N(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1) - x_N(\tau_1 - 0, \lambda_0)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда

$$\left| x_0(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1) - x_0(\tau_1 - 0, \lambda_0)\right| \leq$$

$$\leq \left| \begin{matrix} x_0\left(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1\right) - \\ -x_N(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1) \end{matrix} \right| +$$

$$+ \left| x_N\left(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1\right) - x_N(\tau_2 - 0, \lambda_0)\right| +$$

$$+ |x_N(\tau_1 - 0, \lambda_0) - x_0(\tau_1 - 0, \lambda_0)| < \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Получили второе неравенство в утверждении 1) теоремы. Если же теперь в неравенстве

$$\left| x_0(\frac{1}{2\pi k + \lambda} + \tau_1) - x_0(\tau_1 - 0, \lambda_0)\right| < \frac{3\varepsilon}{4}$$

перейти к пределу при $k \to -\infty$, то получим $|x_0(\tau_1 - 0, \lambda) - x_0(\tau_1 - 0, \lambda_0)| < \varepsilon$.

Таким образом, получено первое утверждение теоремы. Второе доказывается аналогично. Теорема доказана.

2. Пространство максимальных идеалов алгебры A

Поскольку **A** является коммутативной **C***-алгеброй, то по теореме Гельфанда–Наймарка (3) алгебра **A** изоморфна алгебре всех непрерывных комплексных функций на пространстве $M(\mathbf{A})$ его максимальных идеалов. Опишем пространство $M(\mathbf{A})$.

Теорема 3. *Максимальными идеалами алгебры* ***A*** *являются множества вида*

$$M_{\{\tau-,\lambda\}} = \{x \in \mathbf{A} : x(\tau - 0, \lambda) = 0\},$$
$$\lambda \in [0,2\pi), \tau \in (0,1], \quad (5)$$

$$M_{\{\tau+,\lambda\}} = \{x \in \mathbf{A} : x(\tau + 0, \lambda) = 0\},$$
$$\lambda \in [0,2\pi), \tau \in [0,1), \quad (6)$$

$$M_{\{\tau\}} = \{x \in \mathbf{A} : x(\tau) = 0\}, \tau \in [0,1], \quad (7)$$

где $x(\tau \pm 0, \lambda)$ *– пределы (2), (3), и только они.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что все множества (5)–(7) попарно различны и не вкладываются друг в друга. Действительно, функция

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, & t = \tau_0, \\ 0, & t \neq \tau_0, \end{cases}$$

лежит в $M_{\{\tau_0\}}$, но не принадлежит ни $M_{\{\tau\}}, \tau \neq \tau_0$, ни $M_{\{\tau+,\lambda\}}$, ни $M_{\{\tau+,\lambda\}}$; функция

$$x_-(t) =$$
$$= \begin{cases} 1 - \exp\left(i\left(\frac{1}{(t-\tau_0)} - \lambda_0\right)\right) - t + \tau_0, & t < \tau_0, \\ 1, & t \geq \tau_0, \end{cases}$$

принадлежит только множеству $M_{\{\tau_0-,\lambda_0\}}$, а функция

$$x_+(t) =$$
$$= \begin{cases} 1, & t \leq \tau_0, \\ 1 - \exp\left(i(\frac{1}{(t-\tau_0)} - \lambda_0)\right) - t + \tau_0, & t > \tau_0, \end{cases}$$

– только множеству $M_{\{\tau_0+,\lambda_0\}}$.

По определению можно проверить, что множества (5)–(7) являются идеалами.

Покажем, что идеал $M_{\{\tau-,\lambda\}}$ является максимальным. Очевидно, что он собственный, то есть не пустой и не совпадает со всем множеством функций $\mathbf{A}$. Пусть y – произвольная функция из $\mathbf{A}\backslash M_{\{\tau-,\lambda\}}$, то есть $y(\tau-0,\lambda) \neq 0$. Представим произвольную функцию $z \in \mathbf{A}$ в виде суммы $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, где

$$z_1(t) = \frac{z(\tau-0,\lambda)}{y(\tau-0,\lambda)} \cdot y(t),$$

а

$$z_2(t) = z(t) - \frac{y(t)}{y(\tau-0,\lambda)} \cdot z(\tau-0,\lambda).$$

Покажем, что $z_2 \in M_{\{\tau-,\lambda\}}$. Так как

$$z_2(\tau-0,\lambda) = \lim_{k\to-\infty} z_2(\frac{1}{2\pi k+\lambda} + \tau) =$$
$$= \lim_{k\to-\infty}\left(z\left(\frac{1}{2\pi k+\lambda} + \tau\right) - \frac{y\left(\frac{1}{2\pi k+\lambda} + \tau\right)}{y(\tau-0,\lambda)} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot\, z(\tau-0,\lambda)\right) =$$
$$= z(\tau-0,\lambda) - \frac{y(\tau-0,\lambda)}{y(\tau-0,\lambda)} \cdot z(\tau-0,\lambda) = 0,$$

то из (5) следует, что $z_2 \in M_{\{\tau-,\lambda\}}$.

Таким образом, получили, что первое слагаемое в разложении функции z кратно y, а второе принадлежит идеалу $M_{\{\tau-,\lambda\}}$. Значит, идеал, содержащий одновременно $M_{\{\tau-,\lambda\}}$ и y, совпадает со всем пространством $\mathbf{A}$. Из произвольности функции $y \in \mathbf{A}\backslash M_{\{\tau-,\lambda\}}$ следует, что идеал $M_{\{\tau-,\lambda\}}$ является максимальным.

Аналогично доказывается, что $M_{\{\tau+,\lambda\}}$ и M_τ являются максимальными идеалами.

Пусть теперь $\widetilde{M}$ – какой-нибудь максимальный идеал в $\mathbf{A}$. Покажем, что $\widetilde{M}$ совпадает с одним из идеалов (5)–(7).

Предположим, это не так. Тогда $\forall\tau \in [0,1], \lambda \in [0,2\pi)$ существуют $x_{\{\tau+,\lambda\}}$, $x_{\{\tau-,\lambda\}}, x_{\{\tau\}} \in \widetilde{M}$ такие, что

$$x_{\{\tau+,\lambda\}}(\tau+0,\lambda) \neq 0,$$
$$x_{\{\tau-,\lambda\}}(\tau-0,\lambda) \neq 0,$$
$$x_{\{\tau\}}(\tau) \neq 0. \tag{8}$$

Обозначим множество

$$V(\tau,\lambda;k,\delta) := \left(\frac{1}{2\pi k+\lambda+\delta} + \tau, \frac{1}{2\pi k+\lambda-\delta} + \tau\right). \tag{9}$$

Из (8) и теоремы 2 следует, что

$$\forall\tau \in [0,1], \forall\lambda \in [0,2\pi)\ \exists\mu_{\{\tau\pm,\lambda\}} >$$
$$> 0, \exists\delta_{\{\tau,\lambda\}} > 0, \exists K_{\{\tau\pm,\lambda\}} \in \mathbb{N}:$$
$$\left|x_{\{\tau-,\lambda\}}(t)\right| \geq \mu_{\{\tau-,\lambda\}} > 0\ \ \forall t \in V^-_{\{\tau,\lambda\}} :=$$
$$:= \textstyle\bigcup_{k=-K_{\{\tau-,\lambda\}}}^{-\infty} V\left(k, \delta_{\{\tau,\lambda;\tau,\lambda\}}\right) \tag{10}$$

и

$$\left|x_{\{\tau+,\lambda\}}(t)\right| \geq \mu_{\{\tau+,\lambda\}} > 0\ \ \forall t \in V_{\{\tau+,\lambda\}} :=$$
$$:= \textstyle\bigcup_{k=K_{\{\tau+,\lambda\}}}^{+\infty} V(k, \delta_{\{\tau,\lambda\}}; \tau, \lambda). \tag{11}$$

Если обозначим

$$W^\tau_\lambda = \{e^{is}, s \in \left(\lambda - \delta_{\{\tau,\lambda\}}, \lambda + \delta_{\{\tau,\lambda\}}\right)\} \subset$$
$$\subset \mathbb{C}, \lambda \in [0,2\pi), \tau \in [0,1],$$

то получим, что для каждого фиксированного $\tau \in [0,1]$ система $\{W^\tau_\lambda\}_{\lambda\in[0,2\pi)}$ является открытым покрытием единичной окружности комплексной плоскости. Следовательно, существует конечное подпокрытие $\{W_{\lambda_{\tau,i}}\}_{i=1}^{m_\tau}$. Тогда верно

$$(L^-_\tau, L_{\tau^+}) \subset$$
$$\subset \left(\textstyle\bigcup_{i=1}^{m_\tau} V^-_{\{\tau,\lambda_{\tau,i}\}}\right) \bigcup \left(\textstyle\bigcup_{i=1}^{m_\tau} V^+_{\{\tau,\lambda_{\tau,i}\}}\right) \bigcup \{\tau\},$$

где

$$L^-_\tau = \max\{\frac{1}{2\pi K^-_{\{\tau,\lambda_{\tau,i}\}} + \lambda_{\tau,i} + \delta_{\{\tau,\lambda_{\tau,i}\}}} + \tau\} \in \mathbb{R},$$
$$L^+_\tau = \min\{\frac{1}{2\pi K^+_{\{\tau,\lambda_{\tau,i}\}} + \lambda_{\tau,i} - \delta_{\{\tau,\lambda_{\tau,i}\}}} + \tau\} \in \mathbb{R},$$

а $V^\pm_{\{\tau,\lambda_{\tau,i}\}}$ заданы в (10) и (11).

Поскольку семейство $\{(L_{\tau-}, L_{\tau+})\}_{\tau\in[0,1]}$ является покрытием отрезка $[0,1]$, то существует подпокрытие

$$[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{p} (L^-_{\tau_j}, L_{\tau_j})^+,$$

и тогда

$$[0,1] \subset \left(\bigcup_{j=1}^{p}\bigcup_{i=1}^{m_{\tau_j}} V^-_{\{\tau_j,\lambda_{\tau_j,i}\}}\right) \bigcup$$
$$\bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{p}\bigcup_{i=1}^{m_{\tau_j}} V^+_{\{\tau_j,\lambda_{\tau_j,i}\}}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{p} \{\tau_j\}\right).$$

Построим функцию x следующим образом:

$$x(t)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m_{\tau_j}}|x_{\{\tau_j-,\lambda_{\tau_j,i}\}}(t)|^2+$$
$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m_{\tau_j}}|x_{\{\tau_j+,\lambda_{\tau_j,i}\}}(t)|^2+\sum_{j=1}^{p}|x_{\{\tau_j\}}(t)|^2.$$

Поскольку верно $|x_{\{\cdot\}}(t)|^2=x_{\{\cdot\}}(t)\cdot\overline{x_{\{\cdot\}}(t)}$, где $\{\cdot\}$ – индекс $\{\tau_j\}$, $\{\tau_j-,\lambda_{\tau_j,i}\}$ или $\{\tau_j+,\lambda_{\tau_j,i}\}$ соответствующих функций, то $x\in\mathbf{A}$.

Обозначим $\mu=\min\{\mu_{\{\tau_j-,\lambda_{\tau_j,i}\}},x_{\{\tau_j}(\tau_j)\}$. Тогда из (10) и (11) следует, что $|x(t)|\geq\mu>0\ \forall t\in[0,1]$. Значит, функция x обратима в пространстве ограниченных функций, а следовательно, обратима в $\mathbf{A}$. То есть в максимальном идеале $\widetilde{M}$ есть обратимый элемент x, чего быть не может. Значит, $\widetilde{M}$ совпадает с одним из идеалов вида (5)–(7). Теорема доказана.

Как множество, $M(\mathbf{A})$ представимо в виде отрезка $[0,1]$ и двух экземпляров цилиндра $M^-=(0,1]\times S^1$ и $M^+=[0,1)\times S^1$, где $S^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. Точкам $\tau\in[0,1]$ (будем обозначать $\tau^\bullet$) соответствуют максимальные идеалы $M_{\{\tau\}}$, а точкам $(\tau,e^{i\lambda})\in M^-$ и $(\tau,e^{i\lambda})\in M^+$, которые будем обозначать $(\tau^-,e^{i\lambda})$ и $(\tau^+,e^{i\lambda})$, – максимальные идеалы $M_{\{\tau-,\lambda\}}$ и $M_{\{\tau+,\lambda\}}$ соответственно.

В дальнейшем, если $A\subset[0,1]$, то как подмножество в $M(\mathbf{A})$ его будем обозначать $A^\bullet$; множество $A\times B, A\subset[0,1], B\subset S^1$, как подмножество в M^- или M^+ будем обозначать $A^-\times B$ или $A^+\times B$ соответственно. Таким образом, $M^-=(0,1]^-\times S^-$, $M^+=[0,1)^+\times S^+$ и само множество максимальных идеалов есть

$$M(\mathbf{A})=[0,1]^\bullet\cup M^-\cup M^+.$$

Введем также обозначение

$$W^*:=W^\bullet\cup W^-\times S^1\cup W^+\times S^1, \qquad (12)$$

где $W\subset(0,1)$.

Теорема 4. *На пространстве $M(\mathbf{A})$ максимальных идеалов алгебры $\mathbf{A}$*-слабая топология задается следующими элементарными окрестностями*

$$U^-(\tau_0^\pm,z_0;K,\delta)=$$
$$=\cup_{k=-K}^{-\infty}V(\tau_0,\lambda_0;k,\delta)^*\cup\{\tau_0\}^\pm\times\{e^{i\lambda},|\lambda-$$
$$-\lambda_0|<\delta, \qquad (13)$$
$$U^+(\tau_0^\pm,z_0;K,\delta)=$$
$$=\cup_{k=K}^{+\infty}V(\tau_0,\lambda_0;k,\delta)^*\cup\{\tau_0\}^\pm\times$$
$$\times\{e^{i\lambda},|\lambda-\lambda_0|<\delta\} \qquad (14)$$

точек $(\tau_0^\pm,z_0)\in M^\pm$, $z_0=e^{i\lambda_0}$, и элементарными окрестностями

$$U(\tau_0^\bullet)=\{\tau_0^\bullet\} \qquad (15)$$

точек $\tau_0^\bullet\in[0,1]^\bullet$, где $0<\delta<\pi, K\in\mathbb{N}$, а $V(k,\delta;\tau,\lambda)$ – множество вида (9).

Преобразование Гельфанда $\hat{x}$ функции $x\in\mathbf{A}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{x}(\tau^-,e^{i\lambda})&=x(\tau-0,\lambda),\quad(\tau^-,z)\in M^-,\\ \hat{x}(\tau^+,e^{i\lambda})&=x(\tau+0,\lambda),\quad(\tau^+,z)\in M^+,\\ \hat{x}(\tau^\bullet)&=x(\tau),\quad\tau\in[0,1],\end{aligned}\qquad(16)$$

где $x(\tau\pm0,\lambda)$ – пределы (2) и (3).

Доказательство. По определению проверяется, что верны формулы (16). Покажем, что топология на $M(\mathbf{A})$ задается множествами вида (13)–(15).

Рассмотрим

$$x(t)=\begin{cases}1, & t=\tau_0,\\ 0, & t\neq\tau_0.\end{cases}$$

Тогда ее преобразование Гельфанда $\hat{x}:M(\mathbf{A})\to\mathbb{C}$:

$$\hat{x}(\tau)=\begin{cases}1, & \tau=\tau_0^\bullet,\\ 0, & \tau\neq\tau_0^\bullet.\end{cases}$$

Множество $U(\tau_0^\bullet)$ является прообразом открытого шара $\{|t-1|<1/2\}\subset\mathbb{C}$ при отображении $\hat{x}$, следовательно, необходимо является открытым.

Рассмотрим

$$x(t)=\begin{cases}-z_0, & 0\leq t\leq\dfrac{1}{-2\pi K+\lambda_0+\delta}+\tau_0,\\ e^{\frac{i}{t-\tau}}, & \dfrac{1}{-2\pi K+\lambda_0+\delta}+\tau_0<t<\tau,\\ -z_0, & \tau_0\leq t\leq1.\end{cases}$$

Тогда множество $U^+(\tau_0^-,z_0;K,\delta)$ является прообразом $\{z\in\mathbb{C}:|\arg(z)-\lambda_0|<\delta\}$ при отображении преобразования Гельфанда функции $x\cdot\chi_{[\tau_0,1]}$, а множество $U^-(\tau_0^-,z_0;K,\delta)$ – функции $x\cdot\chi_{[0,\tau_0]}$.

Аналогично показывается, что и множество $U(K,\delta;\tau_0^+,z_0)$ является открытым в *-слабой топологии.

Пусть $x_0\in\mathbf{A}$. Покажем, что функция $\widehat{x_0}$ непрерывна в точке $(\tau_0^-,e^{i\lambda_0})\in M(\mathbf{A})$, если на $M(G)$ задана топология (13)–(15). Из теоремы 2 следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ существуют $\delta(\varepsilon)>0$ и $K(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, такие, что для всех λ, удовлетворяющих условию $|\lambda-\lambda_0|<\delta$, и для всех $k\leq-K$ выполнено

$$|x_0(\tau_0-0,\lambda)-x_0(\tau_0-0,\lambda_0)|<\tfrac{\varepsilon}{2} \qquad (17)$$

и

$$\left|x_0(\tfrac{1}{2\pi k+\lambda}+\tau_0)-x_0(\tau_0-0,\lambda_0)\right|<\tfrac{\varepsilon}{2}. \qquad (18)$$

Из (16) и (17) получаем, что

$$\left|\hat{x}_0(\tau_0^-,e^{i\lambda})-\hat{x}_0(\tau_0^-,e^{i\lambda_0})\right|<\varepsilon. \qquad (19)$$

Условие (18) означает, что $\forall t\in W:=$ $:=\cup_{k=-K}^{-\infty}V(\tau_0,\lambda_0;k,\delta)$ выполнено

$$|x(t) - x_0(\tau_0 - 0, \lambda_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (20)$$

Тогда $\exists M \in \mathbb{N}$, такое, что для каждого $t_0 \in W$ и каждого $\mu \in [0,2\pi)$ точки $\frac{1}{2\pi m+\mu} + t_0 \in W$ для всех $m \le -M$ и для всех $m \ge M$, а это значит, в (20) можно перейти к пределам

$$\lim_{m\to-\infty} \left| x_0\left(\frac{1}{2\pi m+\mu} + t_0\right) - x_0(\tau_0 - 0, \lambda_0) \right| \le \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

$$\le \lim_{m\to+\infty} \left| x_0\left(\frac{1}{2\pi m+\mu} + t_0\right) - x_0(\tau_0 - 0, \lambda_0) \right| \le \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

С учетом (16) получим, что

$$\left|\widehat{x_0}\left(t_0^{\pm}, e^{i\mu}\right) - \widehat{x_0}\left(\tau_0^{-}, e^{i\lambda_0}\right)\right| < \varepsilon \qquad (21)$$

для всех $t_0 \in W$ и $\mu \in [0,2\pi)$.

Учитывая неравенства (18)–(21), заключаем, что для $\varepsilon > 0$ существуют $\delta(\varepsilon) > 0$ и $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такие, что $|\hat{x}(t) - x_0(\tau_0 - 0, \lambda_0)| < \varepsilon$ для всех точек $t \in U(\tau_0^-, z_0; K, \delta)$, где $U(\tau_0^-, z_0; K, \delta)$ – множество вида (13), то есть $\hat{x}$ непрерывна на $M(\mathbf{A})$ с топологией (13)–(15). Теорема доказана.

3. Сопряженное пространство

Рассмотрим подмножества в $M(\mathbf{A})$

$$D^{-}_{t_0;\lambda_1,\lambda_2} := \{t_0^-\} \times \{e^{i\lambda}, \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2)\}, \qquad (22)$$

$$D^{+}_{t_0;\lambda_1,\lambda_2} := \{t_0^+\} \times \{e^{i\lambda}, \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2)\} \qquad (23)$$

и

$$[t_1, t_2)^*.$$

Лемма 1. *Семейство подмножеств*

$$\begin{aligned} S := &\left\{D^{-}_{t_0;\lambda_1,\lambda_2}, t_0 \in (0,1], 0 \le \lambda_1 < \lambda_2 \le 1\right\} \cup \\ \cup &\left\{D^{+}_{t_0;\lambda_1,\lambda_2}, t_0 \in [0,1), 0 \le \lambda_1 < \lambda_2 \le 1\right\} \cup \\ \cup &\{[t_1, t_2)^*, 0 \le t_1 < t_2 \le 1\} \cup \\ \cup &\{\{t_0\}^{\bullet}, t_0 \in [0,1]\} \cup \{M(\mathbf{A})\} \end{aligned} \qquad (24)$$

является полукольцом и порождает борелевскую σ-алгебру на $M(\boldsymbol{A})$.

Доказательство. Очевидно, что S является полукольцом.

Покажем, что открытые множества на $M(\mathbf{A})$ принадлежат σ-алгебре, порожденной S. Действительно, поскольку

$$V(\tau_0, \lambda_0; k, \delta) = \cup_{n \ge N_0} \left[\frac{1}{2\pi k + \lambda + \delta} + \right. \left. + \tau + \frac{1}{n}, \frac{1}{2\pi k + \lambda - \delta + n} + \tau\right)$$

для некоторого $N_0 \in \mathbb{N}$, то $V(\tau_0, \lambda_0; k, \delta)^*$ принадлежит σ-алгебре, порожденной S. Также множество $\{\tau\}^{\pm} \times S^1$ можно представить в виде счетного объединения множеств вида $D^{\pm}_{t_0;\lambda_1,\lambda_2}$. Следовательно, множества вида (13) и (14) принадлежат σ-алгебре, порожденной S. Значит, борелевская σ-алгебра включается в σ-алгебру, порожденную S.

Аналогично можно проверить, что множества вида (22), (23) и $[t_1, t_2)^*$ можно представить в виде счетного объединения, счетного пересечения множеств (13)–(15). Следовательно, лемма верна.

Построим регулярные борелевские меры на компакте M, используя семейство множеств S.

Теорема 5. *Пусть μ – борелевская мера на $M(\boldsymbol{A})$. Тогда μ является регулярной мерой.*

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{A} = \{A : A \in \mathbf{U}, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \quad C_n \in \mathbf{C}, n \in \mathbb{N}\},$$

где $\mathbf{C}$ – система всех замкнутых множеств, $\mathbf{U}$ – система всех открытых множеств на пространстве $M(\mathbf{A})$.

Можно показать, что минимальная σ-алгебра, порожденная семейством $\mathbf{A}$, совпадает с алгеброй борелевских множеств на M. Поскольку $M(\mathbf{A})$ компактно, как пространство максимальных идеалов C^*-алгебры ([3]), то по теореме 9 из [5] мера μ является регулярной на σ-алгебре, порожденной семейством $\mathbf{A}$, то есть на $M(\mathbf{A})$. Теорема доказана.

Поскольку S – полукольцо, порождающее σ-алгебру борелевских множеств, то σ-аддитивную меру на M достаточно задавать на минимальном кольце $K(S)$, порожденном семейством S.

Рассмотрим монотонную непрерывную функцию $g_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, такую, что $g_0(0) = 0$. Зафиксируем не более чем счетное подмножество $\{t_k : k \in \mathbb{N}\}$ отрезка $[0,1]$ и монотонные функции $g^-_{t_k}, g^+_{t_k}$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $g^-_{t_k} = 0$, если $t_k = 0$, то $g^+_{t_k} = 0$, если $t_k = 1$, и $g^{\pm}_{t_k}(0) = 0$. Пусть

$$g(t,s) = g_0(t) + \sum_{i\in\mathbb{N}} g_i^-(s) \cdot H_{t_i-}(t) + + \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}} g_i^+(s) \cdot H_{t_i+}(t),) \qquad (25)$$

где

$$H_{t_i-}(t) = \begin{cases} 0, t < t_i, \\ 1, t \ge t_i; \end{cases} \quad H_{t_i+}(t) = \begin{cases} 0, t \le t_i, \\ 1, t > t_i. \end{cases}$$

Тогда функция множеств $m_g : S \to \mathbb{R}$, заданная по формулам

$$m_g([a,b)^*) = g(b,1) - g(a,0), \qquad (26)$$

$$m_g\left(D^{-}_{t_0;\lambda_1,\lambda_2}\right) = g(t_0, \lambda_2) - g(t_0, \lambda_1), \qquad (27)$$

$$m_g\left(D^{-}_{t_0;\lambda_1,\lambda_2}\right) = g(t_0, \lambda_2) - g(t_0, \lambda_1), \qquad (28)$$

очевидно, является мерой на S.

Пусть m – произвольная σ-аддитивная мера на σ-алгебре, порожденной S. Построим по ней функцию g вида (25), чтобы выполнялись свойства (26)–(28).

Положим $[0,0)^* = \emptyset$. Тогда можно рассмотреть функцию $g^*: [0,1] \to \mathbb{R}$, действующую по формуле

$$g^*(t) = m([0,t)^*),$$

где $[0,t)^*$ – множество (12), $t \in [0,1]$.

Так как m – мера, то g^* – монотонно неубывающая функция, а из σ-аддитивности m следует, что функция g непрерывна слева в каждой точке. Очевидно также, что $g^*(0) = 0$.

Поскольку g^* – монотонна, то множество T точек разрыва функции g^* не более чем счетно, $T = \{t_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Пусть $\tau_0 \in [0,1)$.

Так как $\{\tau_0\}^* \subset D^*_{0,\tau_0+\frac{1}{n}} \backslash D_{0,\tau_0}$ и m – мера, то $m(\{\tau_0\}^*) \le g^*(\tau_0 + \frac{1}{n}) - g^*(\tau_0)$, а значит,

$$m(\{\tau_0\}^*) \le g^*(\tau_0 + 0) - g^*(\tau_0).$$

Из этого, в частности, следует, что $m(\{\tau_0\}^*) = 0$ и $m(\{\tau_0\}^\bullet) = 0$, если $\tau_0 \ne t_i$.

Положим

$$g_0(t) = g^*(t) - \sum_{k=1}^{\infty} m(\{t_k\}^- \times S^1) \cdot H_{t_k-}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} m(\{t_k\}^+ \times S^1) \cdot H_{t_k+}(t).$$

Функция g_0 остается монотонной, поскольку m – мера.

Рассмотрим функции

$$g_k^-(s) = m(\{t_k\}^- \times \{e^{i\lambda}, \lambda \in [0,s\})$$

и

$$g_k^+(s) = m(\{t_k\}^+ \times \{e^{i\lambda}, \lambda \in [0,s\}).$$

Функции g_k^-, g_k^+, g_0 – искомые для представления (25) функции $g(t,s)$, задающей меру m.

Тогда ее можно представить в виде

$$g_2(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (y_k H^1_{t_k}(t) - h_k H_{t_k}(t)),$$

где g – монотонная, непрерывная и $g(0) = 0$ (так как $g_1(0) = 0$), а $y_k, h_k \ge 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} h_k < \infty$. Положим $g^-_{t_k} = h_k$, $g^+_{t_k} = y_k$.

Поскольку произвольный заряд можно представить в виде разности мер, то верна следующая теорема.

Теорема 6. *Каждой функции вида (25), где $g_0, g^-_{t_k}, g^+_{t_k}$ – функции ограниченной вариации, соответствует регулярный борелевский заряд ν на $M(\boldsymbol{A})$, который удовлетворяет условиям*

$$\nu([a,b)^*) = g(b,1) - g(a,0), \tag{29}$$

$$\nu(D^-_{t_0;\lambda_1,\lambda_2}) = g(t_0,\lambda_2) - g(t_0,\lambda_1), \tag{30}$$

$$\nu\big(D^-_{t_0;\lambda_1,\lambda_2}\big) = g(t_0,\lambda_2) - g(t_0,\lambda_1). \tag{31}$$

Обратно, если ν – регулярный борелевский заряд на $M(\boldsymbol{A})$, то по нему можно построить набор $\{g, g^-_{t_k}, g^\circ_{t_k}, g^+_{t_k}\} \in \boldsymbol{A}$, такой, что будут выполнены (29)–(31).

Если мере (заряду) на M соответствует g вида (25) по формулам (29)–(31), то будем говорить, что мера (заряд) *порождена* g, и будем обозначать $\hat{\mu}_g$ *($\hat{\nu}_g$)*.

Поскольку все регулярные борелевские заряды описываются множеством **G** функций вида (25), то на основании вышеизложенных рассуждений и теоремы Рисса об общем виде линейного функционала в $C(K)$ ([6]) можно сделать следующий вывод.

Теорема 7. *Сопряженное пространство к A изоморфно подпространству $\boldsymbol{G}$ функций на* $[0,1] \times [0,1]$:

$$\mathbf{G} := \left\{ \begin{array}{c} g : g(t,s) = g_0(t) + \\ + \sum_{i\in\mathbb{N}} g_i^-(s) \cdot \\ \cdot H_{t_i-}(t) + \sum_{i\in\mathbb{N}} g_i^+(s) \cdot H_{t_i+}(t), g_i \in \\ \in BV[0,1), i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{array} \right\},$$

где

$$H_{t_i-}(t) = \begin{cases} 0, t < t_i, \\ 1, t \ge t_i; \end{cases} \quad H_{t_i+}(t) = \begin{cases} 0, t \le t_i, \\ 1, t > t_i. \end{cases}$$

Заключение. В работе исследованы некоторые свойства функций алгебры **A**, порожденной функциями с разрывами почти периодического типа на отрезке. Показано, что пространство максимальных идеалов $M(\mathbf{A})$ алгебры **A** можно представить в виде отрезка и двух экземпляров цилиндра. Были построены элементарные окрестности на $M(\mathbf{A})$. Описаны меры на нем и сопряженное пространство к **A**. Полученные результаты могут быть применены при изучении операторов с коэффициентами из **A**.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф13М-036).

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневич, А.Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход / А.Б. Антоневич. – Минск: Университетское, 1988.
2. Гохберг, И.Ц. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов / И.Ц. Гохберг, Н.Я. Крупник. – Кишинев: ШТИИНЦА, 1973. – 427 с.
3. Мерфи, Дж. С*-алгебры и теория операторов: пер. с англ. / Дж. Мерфи // под ред. проф. А.Я. Хелемского. – М.: Факториал, 1997. – 336 с.
4. Глаз, А.Н. Общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве кусочно-непрерывных функций / А.Н. Глаз // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 29–34.
5. Риечанова, З. О регулярности меры / З. Риечанова // Matematický asopis 17. – 1967. – No. 1. – С. 38–47.

6. Кадец, В.М. Курс функционального анализа: учеб. пособие для студентов механико-математического факультета / В.М. Кадец. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2006. – 607 с.

REFERENCES

1. Antonevich A.B. *Lineiniye funktsionalniye uravneniya: operatornii podkhod* [Linear Functional Equations: Operator Approach], Minsk: Universitetskoye, 1988.
2. Hochberg I.Ts., Krupnik N.Y. *Vvedeniye v teoriyu odnomernikh singuliarnikh operatorov* [Introduction to the Theory of One-Dimensional Singular Integral Operators], Kishinev: Shtiintsa, 1973. – 427 p.
3. Murphy, J. *C * algebri i teoriya operatorov* [*C * A*lgebras and the Theory of Operators], Translated from English. ed. prof. Khelemskii, M.: Factorial, 1997. – 336 p.
4. Glaz A.N. *Ves. Nats. Acad. Navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. Navuk* [Newsletter by the National Academy of Sciences of Belarus, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2012, 2. – P. 29–34.
5. Riechanova, Z. *O reguliarnosti meri* [On the regularity of the measure], Bratislava: Matematický asopis 17, 1967, 1. – P. 38–47.
6. Kadets V.M. *Kurs funktsionalnogo analiza: Uchebnoye posobiye dlia studentov mekhaniko-matematicheskogo fakulteta* [The Course of Functional Analysis: A Manual for Students of the Faculty of Mathematics and Mechanics], Kh.: KhNU imeni V.N. Karazina, 2006. – 607 p.

Поступила в редакцию 05.09.2014. Принята в печать 20.10.2014
Адрес для корреспонденции: e-mail: anna-glaz@yandex.ru – Глаз А.Н.