Радикальные формации и инъекторы конечных групп

В.И. Гойко
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого»

Л.А. Шеметков сформулировал проблему исследования локальных формаций конечных групп F *, обладающих свойством: любая конечная не* F*-группа является либо группой Шмидта, либо имеет простой порядок. В данной работе установлено, что формации Шеметкова являются классами Фиттинга. Хорошо известно, что в произвольном случае (G – произвольная конечная группа и* F *– произвольный класс Фиттинга)* F*-инъекторов не существует. В связи с этим большое внимание привлекла задача поиска F-инъекторов в конечных группах для некоторых специальных классов Фиттинга. В данной работе доказаны существование и сопряженность* F*-инъекторов в конечных группах* $G \in \mathsf{S}^{\pi}\mathsf{F}$, $\pi = \pi(\mathsf{F})$*, для радикальной формации Шеметкова.*

Ключевые слова: *группа, подгруппа, формация Шеметкова, класс Фиттинга, инъектор, главный фактор, силовская подгруппа, простая группа.*

Radical Formations and Injectors of Finite Groups

U.I. Hoika
Educational establishment «Gomel State Technical P. Sukhov University»

L.A. Shemetkov formulated the problem of investigation of a local formations of finite groups F *which posses the property: any of finite non* F *-group is the group of Shmidt or is the group of simple order. In this paper we identified that Shemetkov formations are the class of Fitting. It is well known that in arbitrary case (G is arbitrary finite groups and* F *is arbitrary class of Fitting)* F*-injectors don't exist. In this connection the problem of discovering of* F*-injectors in finite groups for some special classes of Fitting attracted great attention. In the present paper the existence and conjugation of the* F*-injectors in the finite groups* $G \in \mathsf{S}^{\pi}\mathsf{F}$, $\pi = \pi(\mathsf{F})$ *for the radical formation of Shemetkov are proved.*

Key words: *group, subgroup, Shemetkov formation, Fitting class, injector, main factor, Sylov's subgroup, simple group.*

В [1] (проблема 9.74) Л.А. Шеметков сформулировал проблему нахождения локальных формаций конечных групп F, обладающих следующими свойствами: любая минимальная не F-группа является либо группой Шмидта, либо имеет простой порядок.

На всесоюзных симпозиумах (1982 г., Сумы и 1984 г., Москва) была выдвинута более общая задача нахождения локальных формаций, обладающих некоторым фиксированным свойством. В дальнейшем такие формации стали называть формациями Шеметкова [2–3]. В [2–3] для разрешимого случая охарактеризованы локальные формации Шеметкова F в случае задания внешних свойств, т.е. задания свойств группы (подгруппы), не принадлежащих F.

Класс инъекторов в конечных разрешимых группах был введен в [4]. Поскольку инъекторы являются обобщением основополагающих результатов в теории конечных групп (теоремы Л. Силова и Ф. Холла), то, естественно, что в дальнейшем появился огромный интерес к инъекторам. Было замечено, что для произвольного класса Фиттинга F в произвольной конечной группе F-инъекторов не существует [5]. В связи с этим обстоятельством появились работы, в которых осуществился поиск инъекторов в частично разрешимых и π-разрешимых группах [6–8]. В дальнейшем большую актуальность приобрела задача нахождения инъекторов в произвольных конечных группах для некоторых специальных классов групп F. В [9] доказано существование в произвольной конечной группе F-инъекторов, где F – класс всех квазинильпотентных групп. Для других специальных классов конечных групп поиск инъекторов осуществлялся в [10–15].

В данной работе показано, что локальная формация Шеметкова F является классом Фиттинга, и установлено существование F-инъекторов в конечных группах $G \in \mathsf{S}^{\pi}\mathsf{F}$, $\pi = \pi(\mathsf{F})$. Кроме того, исследованы основные свойства F-инъекторов. Рассматриваются только конечные группы и все рассматриваемые классы групп берутся из класса всех конечных групп. *Класс Фиттинга* F – это такой непустой класс конечных групп, для которого выполняются условия: а) если $G \in \mathsf{F}$ и N –

нормальная в G подгруппа, то $N \in \mathsf{F}$; b) если M и N – нормальные подгруппы в группе G и $M \in \mathsf{F}$, $N \in \mathsf{F}$, то $MN \in \mathsf{F}$. Подгруппа V группы G называется F-*инъектором* [4], если для любой субнормальной подгруппы H группы G пересечение $H \cap V \in \mathsf{F}$ и является F-максимальной подгруппой в H. Подгруппа M группы G называется F-*максимальной подгруппой* в G, если $M \in \mathsf{F}$ и из условий $M \subseteq L \subseteq G$, $L \in \mathsf{F}$ всегда следует, что $M = L$. *Формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. *Минимальной не* F-*группой* называется группа, которая не принадлежит F, а все ее собственные подгруппы принадлежат F. Конечная группа называется *группой Шмидта*, если сама группа ненильпотентна, а все ее собственные подгруппы нильпотентны. Символом p всегда обозначаем простое число. Символом $Z_\infty^{\mathsf{F}}(G)$ обозначаем F-гиперцентр группы G. Остальные необходимые определения и обозначения см. в [5; 16].

Определение 1. *Локальная формация конечных групп* F *называется формацией Шеметкова, если всякая минимальная не* F-*группа является либо группой Шмидта, либо имеет простой порядок.*

Теорема 1. *Пусть* F *– локальная формация Шеметкова конечных групп*. Тогда F *является классом Фиттинга.*

Доказательство. 1. Докажем замкнутость класса F относительно нормальных подгрупп. Допустим, что это условие не выполняется. Пусть G есть группа минимального порядка, для которой выполняется условие $G \in \mathsf{F}$ и в G существует такая собственная нормальная подгруппа N, что $N \notin \mathsf{F}$ (т.к. для простой группы рассматриваемое условие выполняется тривиально, то считаем, что G – непростая группа). Пусть $H \subseteq N$ и H – минимальная не F-группа. По определению 1: H либо является группой Шмидта, либо имеет простой порядок. Если H имеет простой порядок, то H – нильпотентная подгруппа. Так как $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{F}$, то $H \in \mathsf{F}$. Поскольку последнее включение противоречит определению группы H, то полагаем, что H – группа Шмидта. Пусть $H = H_p \leftthreetimes H_q$, где H_p, H_q являются p-силовской и q-силовской подгруппами группы H соответственно. Применяя теорему 24.5 из [16], получим равенство:

$$H_p = H^{\mathsf{F}}. \qquad (1')$$

Ввиду теоремы 24.3 из [16] получим равенство:

$$\Phi(H) = Z_\infty^{\mathsf{F}}(H). \qquad (2')$$

Допустим, что $\Phi(H) \neq 1$. Если при этом выполняется включение $H^{\mathsf{F}}\Phi(H) \subset H$, то существует такой H-главный фактор $R/H^{\mathsf{F}}\Phi(H)$, $R \subseteq H$, который является F-центральным. Но это противоречит условию (2′). Пусть $H^{\mathsf{F}}\Phi(H) = H$. Ясно, что в этом случае (с учетом равенства (1′)) подгруппа H является нильпотентной. Так как $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{F}$, то $H \in \mathsf{F}$. Противоречие.

Пусть $\Phi(H) = 1$. В силу теоремы 24.1 из [16] получим равенство $H_p = H^{\mathsf{F}}$ и, кроме того, q-силовские подгруппы из H являются максимальными F-абнормальными подгруппами в группе H. Если в H существует такая минимальная нормальная подгруппа L, что $L \neq H^{\mathsf{F}}$, то легко показать, что L есть F-центральный H-главный фактор. Отсюда следует, что $L \subseteq H_q$. С другой стороны, так как $L \in \mathsf{N}$, то $L \subseteq F(H)$. Ввиду теоремы 24.3 из [16] справедливы равенства: $F(H) = H^{\mathsf{F}} = H_p$. Отсюда следует, что L есть p-группа. Противоречие. Значит, $H_p = H^{\mathsf{F}}$ является единственной минимальной нормальной подгруппой в группе H и $O_q(H) = 1$. В силу леммы 1 из [17] существует точный неприводимый $GF(q)[H]$–модуль Q. Пусть $\Gamma = Q \leftthreetimes H$. Очевидно, что $Q = F_q(\Gamma)$. Если Q есть F-центральный Γ-главный фактор, то в силу соотношений $\Gamma/Q \in f(q) \subseteq \mathsf{F}$ (через f обозначили максимальный внутренний локальный экран формации F) и $\Gamma/Q \cong H$ следует противоречивое включение $H \in \mathsf{F}$. Значит, Q – F-эксцентральный Γ-главный фактор. Отсюда следует, что в группе Γ существует нетривиальный F-нормализатор. Так как подгруппа H F-критична в Γ, то F-нормализатор группы H является F-нормализатором группы Γ (без ограничения общности считаем, что этим F-нормализатором является подгруппа H_q). Ввиду следствия 21.1.1 [16] H_q покрывает фактор Γ/Q. Последнее означает, что $\Gamma = H_q Q$. Значит, p не делит порядок группы Γ. С другой стороны, т.к. $|\Gamma| = |H| \cdot |Q| = |H_p| \cdot |H_q| \cdot |Q|$, то

$H_p = H^{\mathsf{F}} = 1$. Следовательно, $H \in \mathsf{F}$. Противоречие. Остается положить, что $N \in \mathsf{F}$.

2. Возьмем в группе G две произвольные нормальные подгруппы N, K такие, что выполняется включение: $N, K \in \mathsf{F}$. Надо показать, что $NK \in \mathsf{F}$ (так как для простой группы это условие выполняется очевидно, то считаем, что G – непростая группа). Если $G \in \mathsf{F}$, то в силу предыдущего пункта 1 получим включение: $NK \in \mathsf{F}$. Пусть $G \notin \mathsf{F}$. Предположим, что $NK \notin \mathsf{F}$. Возьмем в группе NK подгруппу D такую, что $D \subseteq NK$ и D – минимальная не F-подгруппа. Рассуждая относительно группы D аналогично, как в предыдущем абзаце для группы H, и, используя равенства $D_p = D^{\mathsf{F}}$, $\Phi(D) = Z_{\infty}^{\mathsf{F}}(D)$, приходим к включению: $D \in \mathsf{N}$. Так как $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{F}$, то $D \in \mathsf{F}$. Противоречие. Остается положить, что $NK \in \mathsf{F}$. Теорема 1 доказана.

В связи с тем обстоятельством, что локальная формация Шеметкова F является классом Фиттинга, будем в дальнейшем F называть *радикальной формацией Шеметкова*.

Теорема 2. Пусть F – радикальная формация Шеметкова. Тогда в конечной группе $G \in \mathsf{S}^{\pi}\mathsf{F}$, $\pi = \pi(\mathsf{F})$, существует F-инъектор.

Доказательство. Допустим, что $G \in$ F. В этом случае по определению в G существует F-инъектор. Пусть $G \notin$ F. Возьмем в группе G любую наибольшую (собственную) нормальную подгруппу M. Если $M = 1$, то G – простая и в этом случае по определению в G существует F-инъектор. Пусть $M \neq 1$. Покажем, что $M^{\mathsf{F}} \in \mathsf{S}^{\pi}$. В самом деле, так как $G/G^{\mathsf{F}} \in \mathsf{F}$, то $MG^{\mathsf{F}}/G^{\mathsf{F}} \in \mathsf{F}$. Отсюда (в силу соотношений $MG^{\mathsf{F}}/G^{\mathsf{F}} \cong M/M \cap G^{\mathsf{F}}$) следует, что $M^{\mathsf{F}} \subseteq G^{\mathsf{F}}$. Следовательно, $M^{\mathsf{F}} \in \mathsf{S}^{\pi}$. Ввиду индуктивных рассуждений в M существует F-инъектор V. Пусть T – такая F-максимальная подгруппа группы G, для которой выполняется включение $V \subseteq T$. Ясно, что $V \subseteq T \cap M$. Так как $T \cap M \lhd T$, то $V = T \cap M$, т.е. $T \cap M$ – F-инъектор в M. Заметим, что пересечение подгруппы T с произвольной (собственной) максимальной нормальной подгруппой группы G является F-инъектором в этой нормальной подгруппе. Пусть S – произвольная субнормальная подгруппа группы G. Подгруппа S входит в некоторую максимальную нормальную подгруппу группы G. Без ограничения общности можно считать, что $S \subseteq M$. Так как $T \cap M$ есть F-инъектор в M, S – субнормальная подгруппа в M, то $(T \cap M) \cap S$ принадлежит F и является наибольшей F-подгруппой в группе S. В силу равенства $T \cap M \cap S = T \cap S$ получаем, что $T \cap S$ является наибольшей F-подгруппой в группе S. Последнее означает, что T – F-инъектор в группе G. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $G \in \mathsf{S}^{\pi}\mathsf{F}$, $\pi = \pi(\mathsf{F})$, F – *радикальная формация Шеметкова. Справедливы утверждения*:

1) *если* W – F-*максимальная подгруппа в коммутанте* G', V_1 *и* V_2 *являются* F-*максимальными подгруппами в* G *такими, что* $W \subseteq V_1 \cap V_2$, *то* V_1 *и* V_2 *сопряжены в группе* G;

2) *любые два* F-*инъектора группы* G *сопряжены в* G;

3) *подгруппа* H *группы* G *является* F-*инъектором группы* G *тогда и только тогда, когда* H *есть* F-*максимальная подгруппа в* G *и* $H \cap G'$ *есть* F-*инъектор в группе* G'.

Доказательство. Заметим, что для $G = 1$ утверждения теоремы справедливы. Пусть $G \neq 1$. Допустим, что теорема не верна и G – группа наименьшего порядка, для которой хотя бы одно утверждение не выполняется.

Предположим, что G – простая группа. В этом случае пункты 1 и 3 выполняются очевидно. Докажем справедливость пункта 2. Возьмем две F-максимальные подгруппы H_1, H_2 в группе G (по определению H_1, H_2 – F-инъекторы в G). Если $G \in$ F, то требуемое утверждение выполняется тривиально. Пусть $G \notin$ F. Возьмем в группе G две такие подгруппы L_1, L_2, чтобы выполнялись условия $H_1 \subset L_1$, $H_2 \subset L_2$ и L_1, L_2 являлись минимальными не F-группами. По определению класса F получим: либо L_i имеет простой порядок, либо L_i является группой Шмидта, $i = 1, 2$. Допустим, что L_1 имеет простой порядок. Тогда в группе L_1 нет собственных подгрупп. Значит, $H_1 = 1$ и, следовательно, $H_1 \subseteq H_2$. Так как по условию подгруппа H_1 – F-максимальная подгруппа в группе G, то $H_1 = H_2$. Пункт 2 теоремы 3 в этом случае выполняется тривиально. Пусть теперь подгруп-

па L_1 является группой Шмидта. В этом случае $L_1 \in \mathsf{S}$. Теперь в силу теоремы 24.5 из [16] получим равенство:

$$(L_1)_p = (L_1)^{\mathsf{F}}. \qquad (1)$$

Применяя теорему 24.3 из [16], получим равенство:

$$\Phi(L_1) = Z_\infty^{\mathsf{F}}(L_1). \qquad (2)$$

Очевидно, что все L_1 – главные факторы между $\Phi(L_1)(L_1)^{\mathsf{F}}$ и L_1 являются F-центральными. Значит, ввиду (2) получим следующее утверждение: либо $(L_1)^{\mathsf{F}} \subseteq \Phi(L_1)$ (а это приводит к противоречивому включению $L_1 \in \mathsf{F}$), либо $\Phi(L_1)(L_1)^{\mathsf{F}} = L_1$. Применяя теперь (1), получим $\Phi(L_1)(L_1)^{\mathsf{F}} \in \mathsf{N}$, т.е. $L_1 \in \mathsf{N}$. Опять противоречие. Полагаем теперь, что G – непростая группа. Допустим, что $G' = G$. В этом случае пункты 1 и 3 теоремы 3 выполняются очевидно. Докажем пункт 2 в этом случае. Предположим, что F-инъектор V группы G отличен от 1. Возьмем в группе G такую подгруппу A, что выполняется условие $V \subset A$ и A является минимальной не F-подгруппой в G. Значит, A есть либо группа Шмидта, либо имеет простой порядок. Если A – группа Шмидта, то V – разрешима и в V имеется абелева подгруппа. Отсюда следует, что и в группе G имеется абелева подгруппа. Последнее противоречит допущенному равенству $G' = G$. Если же A имеет простой порядок, то $V = 1$. Утверждение 2 в этом случае выполняется тривиально. Пусть $G' \subset G$. Докажем утверждение 1. Если $G \in \mathsf{F}$, то в этом случае утверждение 1 выполняется тривиально. Пусть $G \notin \mathsf{F}$. Допустим, что $G' \in \mathsf{F}$. Тогда в силу определения подгруппы W получим, что $W = G'$. Следовательно, $G' \subseteq V_i$, $i = 1, 2$. Теперь получим, что $V_i \lhd G$, $i = 1, 2$. Возьмем F-инъектор F в группе G. Ясно, что $F \cap V_i$ – F-инъектор в V_i, $i = 1, 2$. Но так как $V_i \in$ F, то $F \cap V_i = V_i, V_i \subseteq F$. Учитывая тот факт, что V_i – F-максимальные подгруппы в G, из последнего включения следует, что $V_i = F$, $i = 1, 2$. Следовательно, $V_1 = V_2$. Рассмотрим далее случай, когда $G' \notin \mathsf{F}$. Так как $W \subseteq V_i \cap G'$, $V_i \cap G' \in \mathsf{F}$ и W – F-максимальная подгруппа в $V_i \cap G'$, $i = 1, 2$, то справедливо равенство:

$$W = V_i \cap G'. \qquad (3)$$

Так как $V_i \cap G' \lhd V_i$, то $W \lhd V_i$. Значит, $V_i \subseteq N_G(W)$, $i = 1, 2$. Рассмотрим следующие возможные случаи *A* и *B*.

A. W – не нормальная подгруппа в группе G. Значит, $(N_G(W)) \subset G$. Заметим, что так как $W \in \mathsf{F}$, а $G' \notin \mathsf{F}$, то $W \subset G'$. Кроме того, $(N_G(W))' \subseteq G'$. Покажем далее, что коммутант $(N_G(W))'$ обладает такой F-максимальной подгруппой, которая входит и в V_1, и в V_2. Для этой цели используем включения: $W \subseteq W(N_G(W))' \subseteq G'$. Рассмотрим далее следующие возможные подслучаи.

*A*1. $W(N_G(W))' = G'$. Так как W и $(N_G(W))'$ входят в $N_G(W)$, то $G' \subseteq N_G(W)$. Отсюда следует, что $V_i G' \subseteq N_G(W) \subset G$. Следовательно, $V_i G' \subset G$. Поскольку $W \lhd N_G(W)$, то для F-инъектора R группы $N_G(W)$ (с применением [5, часть 9, 1.3(а)]) получим, что $W \cap R$ есть F-инъектор в группе W. Значит, $W \cap R = R$, $W \subseteq R$. Так как $V_i G' \lhd G$, то $V_i G' \lhd N_G(W)$. Отсюда следует, что $R \cap V_i G'$ есть F-инъектор в группе $V_i G'$ для всех i = 1, 2. Кроме того, $R \cap V_i G'$ – F-инъектор в группе $V_i G'$ для всех $i = 1, 2$. Теперь из включений $W \subseteq R \cap G' \subseteq G'$ и того факта, что W – F-максимальная подгруппа в G', получим: либо $R \cap G' = G'$, либо $W = R \cap G'$. Пусть $R \cap G' = G'$. Так как из последнего равенства следует противоречивое включение $G' \in \mathsf{F}$, то $R \cap G' = W$. С учетом равенства (3) теперь видно, что $V_i \cap G'$ – F-инъектор в группе G'. Поскольку $(V_i G')' \lhd G'$, то $V_i \cap G' \cap (V_i G')'$ есть F-инъектор в $(V_i G')'$. Следовательно, учитывая включение $(V_i G')' \subseteq G'$, получим: $V_i \cap (V_i G')'$ есть F-инъектор в группе $(V_i G')'$. По пункту 3 теоремы 3 (и с учетом индуктивных рассуждений) получим, что V_i есть F-инъектор

в группе $V_i\ G'$, $i=1,2$: V_1 есть F-инъектор в группе $V_1\ G'$, V_2 – F-инъектор в группе $V_2\ G'$. Значит, подгруппа V_1 сопряжена с $R\bigcap V_1\,G'$ и V_2 сопряжена с $R\bigcap V_2\,G'$, т.е. $V_1^a=R\bigcap V_1\,G'$, $a\in V_1\,G'$, $V_2^b=R\bigcap V_2\,G'$, $b\in V_2\,G'$ (напомним, что R – это F-инъектор в группе $N_G(W)$). Отсюда следует, что $V_1^a\subseteq R$, $V_2^b\subseteq R$. Теперь ясно, что $V_1^a=R$, $V_2^b=R$. Значит, $V_1=V_2^c$, $c=ba^{-1}\in G$.

*A*2. $W(N_G(W))'\subset G'$. Допустим, что $W(N_G(W))'\in\mathsf{F}$. Теперь из включения $W\subseteq W(N_G(W))'$ и того факта, что подгруппа W – F-максимальная в группе G', следует, что $W=W(N_G(W))'$. Теперь очевидно: $(N_G(W))'\subseteq W$. Применяя включение $W\subseteq V_i$, получим, что $(N_G(W))'\subseteq V_i$. Из последнего включения вытекает: $V_i\lhd N_G(W)$, $i=1,2$. Если $N_G(W)\in\mathsf{F}$, то $V_i=N_G(W)$, $i=1,2$. Отсюда следует, что $V_1=V_2$. Пусть $N_G(W)\notin\mathsf{F}$. Теперь ясно, что $R\subset N_G(W)$. Так как $V_i\lhd N_G(W)$, $i=1,2$, то $R\bigcap V_i$ есть F-инъектор в группе V_i. Значит, $R\bigcap V_i=V_i$, $V_i\subseteq R$. В силу того, что V_i есть F-максимальные подгруппы в группе G, то из последнего включения следует равенство: $V_i=R$ для всех $i=1,2$. Значит, $V_1=V_2$. Рассмотрим случай: $W(N_G(W))'\notin\mathsf{F}$. Возьмем F-инъектор H в группе $W(N_G(W))'$. Так как W – нормальная подгруппа в группе $W(N_G(W))'$, то $H\bigcap W$ есть F-инъектор в группе $W\in\mathsf{F}$. Значит, $H\bigcap W=W, W\subseteq H$. Следовательно, из включений $W\subseteq H\subset W(N_G(W))'\subset G'$ и того факта, что W – F-максимальная подгруппа в G', получим, что $W=H$, то есть W – F-инъектор в $W(N_G(W))'$. Таким образом, $W\bigcap(N_G(W))'$ есть F-инъектор в группе $(N_G(W))'$. Значит, $W\bigcap(N_G(W))'$ – F-максимальная подгруппа в коммутанте $(N_G(W))'$. Кроме того, $W\bigcap(N_G(W))'$ входит в V_i для всех $i=1,2$. По индукции V_1 и V_2 сопряжены в группе $N_G(W)$. Значит, V_1 и V_2 сопряжены в группе G.

B. $W\lhd G$. Заметим, что если $G'=1$, то группа G – абелева и приходим к противоречивому включению $G\in\mathsf{F}$. Значит, $G'\neq 1$. Пусть D – F-инъектор в группе G'. Так как $W\lhd G'$, то $D\bigcap W$ – F-инъектор в группе W. Значит, $D\bigcap W=W$. Отсюда следует, что $W\subseteq D\subseteq G'$. Теперь с учетом того, что $G'\notin\mathsf{F}$, получим: $D\neq G'$. Так как W – F-максимальная подгруппа в G', то $W=D$, т.е. W – F-инъектор в группе G'. Далее покажем, что подгруппы V_i являются F -инъекторами в группе G, $i=1,2$. В самом деле, пусть F – F -инъектор в группе G. Так как $W\lhd G$, то $W\subseteq F$. Отсюда следует, что $W\subseteq F\bigcap G'$. Значит, $W=F\bigcap G'$. Теперь с учетом (3) получим следующие равенства:

$$W=F\bigcap G'=V_1\bigcap G'=V_2\bigcap G'. \qquad (4)$$

Возьмем собственную наибольшую нормальную подгруппу H в группе G. Так как $H'\lhd G$, то $F\cap H'$ – F-инъектор в H'. Так как $F\bigcap H\bigcap H'=F\bigcap H'$, то $F\bigcap H\bigcap H'$ – F-инъектор в H'. Теперь в силу равенства $F\bigcap G'\bigcap H'=F\bigcap H'$ получили, что $F\bigcap G'\bigcap H'$ – F-инъектор в H'. Применяя равенство (4), теперь получим, что $V_i\bigcap G'\bigcap H'$ есть F-инъектор в H'. Отсюда, с учетом равенства $V_i\bigcap G'\bigcap H'=V_i\bigcap H'$, получим, что $V_i\bigcap H'$ – F-инъектор в H'. По индукции (с применением пункта 3 теоремы 3) $V_i\bigcap H$ есть F-инъектор в H. Применяя [5, часть 9, 1.3(c)], получим, что подгруппы V_i являются F-инъекторами в группе G для всех $i=1,2$. Рассмотрим следующие возможные подслучаи.

*B*1. По крайней мере, для одного i выполняется включение (пусть для определенности i = 1): $V_1\,G'\subset G$. Так как $V_1\,G'\lhd G$, то $V_2\bigcap V_1\,G'$ – F-инъектор в группе $V_1\,G'$. Кроме того, видно, что V_1 – F-инъектор в группе $V_1\,G'$. Теперь ввиду индуктивных рассуждений

(с применением пункта 2 теоремы 2) получим, что V_1 и $V_2 \cap V_1 G'$ сопряжены в группе $V_1 G'$, т.е. $V_1 = V_2^b \cap V_1 G', b \in V_1 G'$. Отсюда следует, что $V_1 \subseteq V_2^b$. Значит, с учетом того, что V_1 – F-максимальная подгруппа в группе G, получим равенство: $V_1 = V_2^b, b \in G$.

*B*2. $V_i G' = G$ для всех $i = 1, 2$. Используя изоморфизм $G/G' \cong V_i/W$, $i = 1, 2$, приходим к равенству:

$$|V_1| = |V_2|. \qquad (5)$$

Возьмем простое $p \in \pi(V_1)$. Поскольку $G' \subseteq V_{1p} G'$, то $V_{1p} G' \lhd G$ (через V_{1p} обозначили силовскую p-подгруппу группы V_1). Допустим, что

$$V_{1p} G' \subset G. \qquad (6)$$

Предположим, что $V_{1p} W$ – не нормальная подгруппа в G. Отсюда следует, что $N_G(V_{1p} W) \subset G$. Применяя равенство (3) и тождество Дедекинда, получим следующее равенство: $V_{1p} W = V_{1p}(V_1 \cap G') = V_1 \cap V_{1p} G'$. Ясно, что $V_{1p} W$ и $V_2 \cap V_{1p} G'$ – F-инъекторы в группе $V_{1p} G'$. Так как имеет место включение (6), то по индукции (с применением пункта 2 теоремы 3) получим сопряженность F-инъекторов: $V_2 \cap V_{1p} G' = (V_{1p})^a W$, $a \in V_{1p} G'$. Отсюда следует, что $(V_{1p})^a \subseteq V_2$. Значит, $(V_{1p})^a \subseteq V_{2p}$ – силовская p-подгруппа в группе V_2. Применяя (5), получим: $(V_{1p})^a = V_{2p}$. Отсюда следует (с учетом (6)), что $V_{2p} G' \subset G$ и, кроме того, $N_G(V_{2p} W) \subset G$. Так как $V_{1p} W = V_1 \cap V_{1p} G' \lhd V_1$, то $V_1 \subseteq N_G(V_{1p} W)$. Значит, $V_1^a \subseteq (N_G(V_{1p} W))^a = N_G((V_{1p})^a W) = N_G(V_{2p} W) \subset G$. Кроме того, так как $V_2 \cap V_{2p} G' = V_{2p}(V_2 \cap G') = V_{2p} W$ – нормальная подгруппа в V_2, то $V_2 \subseteq N_G(V_{2p} W)$. Получили включения: V_1^a, V_2 входят в $N_G(V_{2p} W)$. По индукции V_1^a и V_2 сопряжены в группе $N_G(V_{2p} W)$. Значит, V_1 и V_2 сопряжены в группе G.

Полагаем теперь, что $V_{1p} W \lhd G$. В этом случае (ввиду индукции) F-инъекторы $V_2 \cap V_{1p} G'$ и $V_1 \cap V_{1p} G' = V_{1p}(V_1 \cap G') = V_{1p} W$ сопряжены в группе $V_1 G'$. Значит, в силу того, что $V_{1p} W \lhd G$, эти инъекторы совпадают: $V_2 \cap V_{1p} G' = V_{1p} W$. Отсюда следует включение:

$$V_{1p} \subseteq V_{2p}. \qquad (7)$$

Если теперь допустить, что для всех простых $p \in \pi(V_1)$ справедливо включение $V_{1p} G' \subset G$, то отсюда следует включение (7) для всех простых $p \in \pi(V_1)$. Значит, $V_1 \subseteq V_2$. С применением (5) получим равенство $V_1 = V_2$. Последнее равенство противоречит индуктивному предположению. Значит, существует такое простое $p \in \pi(V_1)$, что выполняется равенство: $V_{1p} G' = G$. Применяя тождество Дедекинда, получим равенство: $V_{1p} W = V_{1p}(V_1 \cap G') = V_1 \cap V_{1p} G' = V_1$. Если $V_{1p} W \lhd G$, то получим, что $V_1 \lhd G$. Значит, $V_1 \cap V_2$ есть F-инъектор в группе V_1. Так как $V_1 \in \mathsf{F}$, то $V_1 \cap V_2 = V_1$, $V_1 \subseteq V_2$. Теперь ясно, что в этом случае справедливо равенство $V_1 = V_2$. Пусть $V_{1p} W$ не нормальна в G. В силу леммы 11.6 из [16] получим, что для всех $q \in \pi(V_1)$ и $q \neq p$ справедливо равенство силовских q-подгрупп: $W_q = V_{1q}$. Следовательно (с учетом включения $W \subseteq V_2$), для всех простых $q \in \pi(V_1)$, кроме $q = p$, получим включение: $V_{1q} \subseteq V_{2q}$. Значит, справедливо равенство:

$$V_{1q} = V_{2q}. \qquad (8)$$

Допустим теперь, что существует такое простое $r \in \pi(V_1)$ и $r \neq p$, для которого выполняется равенство: $V_{1r} G' = G$. Применяя [16, лемма 11.6] и равенство $V_{1r} W = V_{1r}(V_1 \cap G') = V_1 \cap V_{1r} G' = V_1$, получим: $W_s = V_{1s}$, где s пробегает все простые из $\pi(V_1)$, в том числе $s = p$ (кроме $s = r$). Следовательно, $V_{1s} \subseteq V_{2s}$. Учитывая теперь (8), получим: $V_1 \subseteq V_2$. Значит, справедливо равенство: $V_1 = V_2$. Последнее равенство противоречит индуктивному предположению. Итак, $V_{1p} G' = G$ для одного простого $p \in \pi(V_1)$, а для всех других

простых $q \in \pi(V_1)$ справедливо включение $V_{1q}\, G' \subset G$ и выполняется равенство (8). Далее $V_{1p} \subseteq G_p$ – силовская p-подгруппа в группе G, $V_{2p} \subseteq G_p^x$ – силовская p-подгруппа в группе G, $x \in G$. Отсюда следует, что $V_{2p}^y \subseteq G_p$, $y = x^{-1}$. Пусть $\pi(V_1) = \{p, q, \ldots, s\}$. Введем обозначения: $V_{1q} = V_{2q} = A_1, \ldots, V_{1s} = V_{2s} = A_n$, $\langle G_p, A_1, \ldots, A_n \rangle = T$. Очевидно, что $T \subset G$. Поскольку $V_1, V_2^y \subseteq T$, то по индукции V_1, V_2^y сопряжены в группе T. Значит, V_1, V_2 сопряжены в группе G. Утверждение 1 теоремы 3 доказано.

Докажем утверждение 2. Допустим, что

$$G' = G. \tag{9}$$

Так как $G \in \mathsf{S}^\pi \mathsf{F}$, $\pi = \pi(\mathsf{F})$, то любой G-главный фактор R/Q такой, что $R \subseteq G^{\mathsf{F}}$, является либо абелевой p-группой, $p \in \pi$, либо π'-группой. Допустим, что существует такой фраттиниев G-главный фактор L/S, для которого справедливо включение: $L \subseteq G^{\mathsf{F}}$. Так как L/S – нильпотентная группа, а $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{F}$, то L/S – абелева q-группа, $q \in \pi$. Значит, $(G/S)' \subset G/S$. В силу равенства $(G/S)' = G'S/S$ получим включение $G' \subset G$. Последнее включение противоречит допущенному равенству (9). Значит, все G-главные факторы между 1 и G^{F} являются нефраттиниевыми. Кроме того, ввиду следствия 8.1.2 из [16] такие факторы являются F-эксцентральными. В силу следствия 21.1.1 из [16] F-нормализатор H группы G изолирует все G-главные факторы между 1 и G^{F} и покрывает все G-главные факторы между G^{F} и G. Отсюда следует, что $H \cap G^{\mathsf{F}} = 1$. Так как G^{F} есть π-разрешимая группа, то теперь ясно, что G^{F} есть π'-группа. Возьмем V – произвольный F-инъектор в группе G. Так как G^{F} есть π'-группа, то $V \cap G^{\mathsf{F}} = 1$. Рассмотрим далее группу $V G^{\mathsf{F}}$. Возьмем F-нормализатор F в этой группе. Так как F является π-группой, то $F^x \subseteq V$, $x \in V G^{\mathsf{F}}$. В силу следствия 21.1.1 из [16] подгруппа F^x покрывает все G-главные факторы между G^{F} и G. Так как $F^x \subseteq V$, то и подгруппа V покрывает все G-главные факторы между G^{F} и G. Таким образом, видим, что подгруппы F^x и V имеют одинаковое свойство покрытия-изолирования главных факторов группы G. Следовательно, порядки этих подгрупп совпадают. А с учетом включения $F^x \subseteq V$ получим теперь равенство: $F^x = V$. Из равенства $F^x G^{\mathsf{F}} = G$ теперь следует равенство $V G^{\mathsf{F}} = G$. Значит, подгруппа $F^x = V$ является F-нормализатором в группе G. Итак, в силу того, что V – произвольный F-инъектор в группе G, то любой F-инъектор группы G есть F-нормализатор в G. Ввиду теоремы 21.4 из [16] получаем требуемое утверждение.

Полагаем, что $G' \subset G$. Если допустить, что $G' = 1$, то в силу определения формации Шеметкова получим, что $G \in \mathsf{F}$. Утверждение в этом случае выполняется тривиально. Пусть $G' \neq 1$. Ясно, что $V_i \cap G'$ – F-инъектор в группе G', $i = 1, 2$. В силу индуктивных рассуждений справедливо равенство: $V_1 \cap G' = (V_2 \cap G')^x$, $x \in G'$. Кроме того, очевидно равенство: $V_1 \cap G' = V_2^x \cap G'$. Так как $W = V_1 \cap G' = V_2^x \cap G'$ является F-максимальной подгруппой в группе G' и $W \subseteq V_1, W \subseteq V_2^x$, то ввиду пункта 1 теоремы 3 подгруппы V_1 и V_2^x сопряжены в группе G, т.е. V_1, V_2 сопряжены в группе G. Пункт 2 теоремы 3 доказан.

Доказательство утверждения 3. Пусть H – F-максимальная подгруппа группы G и $H \cap G'$ – F-инъектор в группе G'. Возьмем F-инъектор K группы G. Ясно, что $K \cap G'$ есть F-инъектор в группе G'. Применяя пункт 2 теоремы 3, получим сопряженность F-инъекторов группы G': $H \cap G' = (K \cap G')^x = K^x \cap G'$, $x \in G'$. Очевидно, что $W = H \cap G' = K^x \cap G'$ является F-максимальной подгруппой в G'.

Кроме того, H и K^x – F-максимальные подгруппы в G. В силу пункта 1 теоремы 3 получим сопряженность подгрупп H и K^x в G, т.е. H и K сопряжены в G. Доказательство обратного утверждения очевидно. Пункт 3 доказан. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь. – Новосибирск, 1984.
2. Семенчук, В.Н. О разрешимых минимальных не F-группах / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1987. – № 3. – С. 16–21.
3. Васильев, А.Ф. К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1987. – Вып. 3. – С. 3–11.
4. Fischer, B. Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
5. Doerk, K. Finite soluble groups. Walter de Gruyter / K. Doerk, T.O. Hawkes. – Berlin, 1992.
6. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 166–170.
7. Сементовский, В.Г. $\triangle$-нильпотентные инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 72–86.
8. Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.
9. Blessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – Vol. 56. – P. 516–532.
10. Shemetkov, L.A. Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3(16). – С. 186–187.
11. Vorob'ev, N.T. Gaschütz's local method in the theory of Fitting classes of finite soluble groups / N.T. Vorob'ev // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3(16). – С. 155–166.
12. Залесская, Е.Н. О новых классах сопряженных инъекторов конечных групп / Е.Н. Залесская // Дискретная математика. – 2004. – Т. 16, вып. 1. – С. 105–113.
13. Гойко, В.И. О существовании сопряженного класса инъекторов в конечных группах / В.И. Гойко // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 6. – С. 17–22.
14. Iranzo, M.J. Fitting classes F such that all finite groups have F-injector / M.J. Iranzo, F. Perez-Monasor // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 56. – P. 97–101.
15. Förster, P. Nilpotent injectors in finite groups / P. Förster // Bull. Austral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 32. – P. 293–297.
16. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
17. Скиба, А.Н. О локальных формациях конечных групп с S_n-замкнутыми подформациями / А.Н. Скиба // Докл. БССР. – 1979. – Т. 23, № 8. – С. 677–680.

REFERENCES

1. *Nereshenniye voprosi teorii grupp: Kourovskaya tetrad* [Unsolved Issues of Theory of Groups: Kourov Notebook]. – Novosibirsk, 1984.
2. Semenchuk V.N. *Voprosi algebri* [Issues of Algebra], 1987, 3, pp. 16–21.
3. Vasilyev A.F. *Voprosi algebri* [Issues of Algebra], 1987, 3, pp. 3–11.
4. Fischer, B. Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
5. Doerk K., Hawkes T.O. Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
6. Sementovski V.G. *Issledovaniye normalnogo i podgruppovogo stroyeniya konechnikh grupp* [Study of Normal and Subgroup Composition of Finite Groups], Mn.: Nauka i tekhnika, 1984, pp. 166–170.
7. Sementovski V.G. *Voprosi algebri* [Issues of Algebra], 1985, 1, pp. 72–86.
8. Shemetkov L.A. *Konechniye gruppi* [Finite Groups], Mn., Nauka i tekhnika, 1975, pp. 207–212.
9. Blessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra, 1979. – Vol. 56. – P. 516–532.
10. Shemetkov L.A. *Izvestiya Gomelskogo gos. un-ta im. F. Skorini. Voprosi algebri* [Newslettter of Gomel State F. Skorina University. Issues of Algebra], 2000, 3(16), pp. 186–187.
11. Vorobyev N.T. *Izvestiya Gomelskogo gos. un-ta im. F. Skorini. Voprosi algebri* [Newslettter of Gomel State F. Skorina University. Issues of Algebra], 2000, 3(16), pp. 155–166.
12. Zalesskaya E.N. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics], 2004, 16(1), pp. 105–113.
13. Hoiko V.I. *Dokladi NAN Belarusi* [Reports of NAS of Belarus], 2008, 52(6), pp. 17–22.
14. Iranzo, M.J. Fitting classes F such that all finite groups have F-injector / M.J. Iranzo, F. Perez-Monasor // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 56. – P. 97–101.
15. Förster, P. Nilpotent injectors in finite groups / P. Förster // Bull. Austral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 32. – P. 293–297.
16. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnikh grupp* [Formations of Finite Groups]. – M.: Nauka, 1978, 272 p.
17. Skiba A.N. DAN BSSR, 1979, 23(8), pp. 677–680.

Поступила в редакцию 07.07.2014. Принята в печать 20.10.2014
Адрес для корреспонденции: e-mail: stage@tut.by – Гойко В.И.