

Новые характеристики метанильпотентных и разрешимых конечных групп

В.А. Васильев, А.Н. Скиба

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

В статье введено понятие m -нормальной подгруппы. Найден новый критерий метанильпотентности групп: группа метанильпотентна тогда и только тогда, когда каждая ее силовская подгруппа является m -нормальной в G . Также установлено, что m -нормальность в группе каждой ее максимальной подгруппы с непростым индексом является необходимым и достаточным условием разрешимости группы.

Ключевые слова: метанильпотентная группа, разрешимая группа, m -нормальная подгруппа.

New characterizations of metanilpotent groups and finite soluble groups

V.A. Vasilyev, A.N. Skiba

Educational establishment «Francisk Skorina Gomel State University»

Summary. The concept of a m -normal subgroup is introduced. New characterizations of finite metanilpotent groups and finite soluble groups in the terms of m -normal subgroups are obtained.

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Элемент m решетки L называется модулярным (в смысле Куроша), если выполняются следующие условия:

- (1) $x \cup (m \cap z) = (x \cup m) \cap z$ для всех $x, z \in L$ таких, что $x \leq z$;
- (2) $m \cup (y \cap z) = (m \cup y) \cap z$ для всех $y, z \in L$ таких, что $m \leq z$.

Имея дело с решеткой $L(G)$ всех подгрупп группы G , мы приходим к понятию модулярной подгруппы группы G .

Определение 1.1. Подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G , если выполняются следующие условия:

- (1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$;
- (2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Понятие модулярной подгруппы впервые было введено в работе Р. Шмидта [1] и оказалось полезным в вопросах классификации составных групп. В частности, в монографии Р. Шмидта [2, гл. 5] модулярные подгруппы были использованы для получения новых характеристик сверхразрешимых групп. Дополняя эти результаты, в данной работе мы используем обобщенные модулярные подгруппы для получения новых характеристик

разрешимых и метанильпотентных групп. Основными нашими инструментами являются следующие понятия.

Определение 1.2. Пусть $H \leq G$. Подгруппу, порожденную всеми теми подгруппами из H , которые модулярны в G , назовем модулярным ядром подгруппы H в группе G и обозначим H_{mG} .

Элементы теории модулярных ядер и некоторые приложения такой теории даны нами в работе [3]. В данной работе мы используем это понятие в следующем определении

Определение 1.3. Подгруппу H группы G назовем m -нормальной в G , если в G существует такая нормальная подгруппа R , что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_{mG}$.

Заметим, что если H – модулярная подгруппа группы G , то $H_{mG} = H$ и поэтому всякая модулярная подгруппа является m -нормальной. В то же время легко построить примеры, показывающие, что в общем случае m -нормальная подгруппа не является модулярной.

Используемая в статье терминология стандартна и при необходимости мы отсылаем читателя к монографиям [4, 5, 6].

Некоторые предварительные результаты. Следующие известные свойства модулярных подгрупп будут использованы в данной работе.

Лемма 2.1 [2, гл. 5, раздел 5.1]. Пусть G –

группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) если M_1 и M_2 – модулярные в G подгруппы, то $\langle M_1, M_2 \rangle$ – модулярная в G подгруппа;

(б) если N – нормальная в G подгруппа, то N является модулярной в G подгруппой;

(с) если N – нормальная в G подгруппа, M – модулярная в G подгруппа, то MNN – модулярная в G/N подгруппа;

(д) если $N \leq M \leq G$, N нормальна в G и M/N модулярна в G/N , то M модулярна в G ;

(е) если $M \leq M_1 \leq G$ и M модулярна в G , то M модулярна в M_1 ;

(ф) если φ – изоморфизм группы G на группу $\bar{G}$, M модулярна в G , то M^φ модулярна в $\bar{G}$;

(г) если M – модулярная в G подгруппа, то $H \cap M$ – модулярная в H подгруппа для всех $H \leq G$.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.2. Пусть G – группа, N нормальна в G и $M_1, M_2, \dots, M_n$ – некоторый такой набор подгрупп из G , что $N \leq M_i, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $\langle M_1/H, M_2/H, \dots, M_n/H \rangle = \langle M_1, M_2, \dots, M_n \rangle / H$.

Следующая наша лемма показывает, что модулярное ядро обладает свойствами, аналогичными свойствам нормального ядра подгруппы.

Лемма 2.3. Пусть G – группа и $N \leq K \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) H_{mG} – модулярная в G подгруппа и $H_G \leq H_{mG}$;

(2) $H_{mG} \leq H_{mK}$;

(3) если N нормальна в G , то $(K/H)_{m(G/H)} = K_{mG}/H$;

(4) H_{mG} – нормальная в H подгруппа.

Доказательство.

(1) Пусть $M_1, M_2, \dots, M_n$ – набор всех тех модулярных в G подгрупп, которые содержатся в H . Тогда $\langle M_1, M_2, \dots, M_n \rangle = H_{mG}$ и, значит, H_{mG} – модулярная в G подгруппа по лемме 2.1(а). По лемме 2.1(б) всякая нормальная в G подгруппа является модулярной в G подгруппой. Значит, $H_G \leq H_{mG}$.

(2) Применяя лемму 2.1(е), мы видим, что множество всех модулярных в G подгрупп из H содержится во множестве всех модулярных в K подгрупп из H . Значит, $H_{mG} \leq H_{mK}$.

(3) Пусть $M_1/H, M_2/H, \dots, M_n/H$ – набор всех тех модулярных в G/H подгрупп, которые

содержатся в K/H . Тогда $(K/H)_{m(G/H)} = \langle M_1/H, M_2/H, \dots, M_n/H \rangle$. Согласно лемме 2.2, $\langle M_1/H, M_2/H, \dots, M_n/H \rangle = \langle M_1, M_2, \dots, M_n \rangle / H$. По лемме 2.1(д), $M_1, M_2, \dots, M_n$ – модулярные в G подгруппы, которые содержатся в K . Значит, $(K/H)_{m(G/H)} = \langle M_1, M_2, \dots, M_n \rangle / H \subseteq K_{mG}/H$.

Если же $K_1, K_2, \dots, K_t$ – набор всех модулярных в G подгрупп, содержащихся в K , то $K_{mG} = \langle K_1, K_2, \dots, K_t \rangle$. Согласно лемме 2.1(с), $K_i/H/H$ – модулярная в G/H подгруппа, и, очевидно, $K_i/H/H \subseteq K/H, i = 1, \dots, t$. Значит, $K_{mG}/H \subseteq (K/H)_{m(G/H)}$. Таким образом, $(K/H)_{m(G/H)} = K_{mG}/H$.

(4) Из $H_{mG} \subseteq H$ следует, что $(H_{mG})^h \subseteq H$ для любого $h \in H$. Так как H_{mG} модулярная в G подгруппа, то $(H_{mG})^h$ модулярная в G подгруппа по лемме 2.1(ф). Значит, $(H_{mG})^h \subseteq H_{mG}$, а это влечет $(H_{mG})^h = H_{mG}$. Таким образом, H_{mG} нормальна в H . Лемма доказана.

Символом $Z_U(G)$ обозначают наибольшую нормальную подгруппу группы G , у которой все G -главные факторы циклически.

Лемма 2.4 [2, гл. 5, теорема 5.2.5]. Если подгруппа N модулярна в G , то $H^G/H_G \subseteq Z_U(G/H_G)$.

Общие свойства t -нормальных подгрупп описывает следующая лемма.

Лемма 2.5. Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если N является t -нормальной в G подгруппой, $N \leq M \leq G$, то N является t -нормальной в M подгруппой;

(2) пусть N нормальна в G и $N \leq H$. Тогда и только тогда N является t -нормальной в G подгруппой, когда H/N является t -нормальной в G/N подгруппой;

(3) пусть π – некоторое множество простых чисел, N – нормальная π' -подгруппа в G и H – π -подгруппа в G . Если N является t -нормальной в G подгруппой, то HN/N является t -нормальной в G/N подгруппой;

(4) пусть $N \leq G$ и $L \leq \Phi(N)$. Если L является t -нормальной в G подгруппой, то L является модулярной в G подгруппой и $L \leq \Phi(G)$.

Доказательство.

(1) Если $NK = G$, $N \cap K \leq H_{mG}$, K нормальна в G , то $M = M \cap G = N(M \cap K)$ и $N \cap (M \cap K) = N \cap K \leq H_{mG} \leq H_{mM}$ по лемме 2.3. Подгруппа $M \cap K$ является нормальной в M подгруппой и,

значит, H является m -нормальной в M .

(2) Предположим, что H/N является m -нормальной в G/N подгруппой. Тогда существует нормальная подгруппа K/N в G/N такая, что $G/N = (H/N)(K/N)$ и $(H/N) \cap (K/N) \leq (H/N)_{m(G/N)}$. Тогда $G = HK$, где K нормальна в G , и по лемме 2.3(3) имеет место $(H/N)_{m(G/N)} = H_{mG}/N$, что влечет $(H/N) \cap (K/N) \leq H_{mG}/N$. Значит, $H \cap K \leq H_{mG}$ и поэтому H является m -нормальной в G .

Обратно, если H является m -нормальной в G подгруппой, то существует такая нормальная в G подгруппа K , что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_{mG}$. Покажем, что H/N является m -нормальной в G/N подгруппой. Подгруппа KN нормальна в G и подгруппа KN/N нормальна в G/N . Так как $HKN = HK = G$, то $(H/N)(KN/N) = G/N$. Из $H \cap K \leq H_{mG}$ получаем, что $(H/N) \cap (KN/N) = (H \cap KN)/N = N(H \cap K)/N \leq H_{mG}/N$. По лемме 2.3(3) имеем $H_{mG}/N = (H/N)_{m(G/N)}$. Значит, $(H/N) \cap (KN/N) \leq (H/N)_{m(G/N)}$ и поэтому H/N является m -нормальной в G/N .

(3) Если H является m -нормальной в G подгруппой, то существует такая нормальная в G подгруппа K , что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_{mG}$. Так как $|G|_{\pi'} = |K|_{\pi'} = |KN|_{\pi'}$, то $|K \cap N|_{\pi'} = |N|_{\pi'} = |N|$. Значит, $N \leq K$. Ясно, что $(HN/N)(K/N) = G/N$ и $(HN/N) \cap (K/N) = (H \cap K)N/N \leq (HN/N)_{m(G/N)}$ по лемме 2.1(с), и K/N нормальна в G/N . Таким образом, HN/N является m -нормальной в G/N подгруппой.

(4) Если L является m -нормальной в G подгруппой, то существует нормальная в G подгруппа K такая, что $LK = G$ и $L \cap K \leq L_{mG}$. Так как $L \leq \Phi(H)$, то $H = H \cap G = L(H \cap K) = H \cap K$. Значит, $L \leq H \cap K \leq L_{mG}$ и получаем, что L модулярна в G . Если $L \not\leq \Phi(G)$, то существует максимальная в G подгруппа M такая, что $LM = G$. Так как $H = H \cap G = L(H \cap M) = H \cap M \leq M$, то $G = LM \leq HM \leq M < G$. Получили противоречие. Значит, $L \leq \Phi(G)$. Лемма доказана.

Определение 2.6. Группу G назовем m -простой, если в G нет других m -нормальных подгрупп кроме 1 и G .

Лемма 2.7. Пусть g – группа и $H \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если H является нормальной в G подгруппой, то H является m -нормальной в G подгруппой;

(2) G является m -простой тогда и только тогда, когда G является простой.

Доказательство.

(1) $HG = G$ и $H \cap G = H = H_{mG}$. Значит, H является m -нормальной в G .

(2) Согласно (1), если G – m -простая группа, то она будет и простой. Допустим теперь, что G – простая группа, но G не является m -простой. Тогда существует такая нетривиальная подгруппа H , которая является m -нормальной в G . По определению, существует такая нормальная в G подгруппа N , что $HN = G$ и $H \cap N \leq H_{mG}$. Тогда $N \neq 1$ и получаем, что $N = G$. Это влечет $H \cap G = H \leq H_{mG}$. Значит, $H = H_{mG}$ модулярна в G . По лемме 2.4 получаем, что $H^G/H_G \subseteq Z_U(G/H_G)$. Но $1 < H < G$ и поэтому $H^G = G$ и $H_G = 1$. Следовательно, $G = Z_U(G)$ – сверхразрешимая группа. Но G – простая группа и поэтому $|G| = p$ – простое число. Ввиду теоремы Лагранжа, это противоречит нашему предположению о подгруппе H . Следовательно, группа G – m -простая. Лемма доказана.

Основные результаты. Понятие m -нормальной подгруппы позволяет получить следующую новую характеристику метанильпотентных групп.

Теорема 3.1. Группа G является метанильпотентной тогда и только тогда, когда каждая ее силовская подгруппа является m -нормальной в G .

Следствие 3.2 (Л. Жу, В. Го, К.П. Шам [7, теорема 1]). Группа G является метанильпотентной, если каждая еще силовская подгруппа является s -нормальной в G .

Определение 3.3. Пусть M – максимальная подгруппа группы G , H/K – главный фактор группы G , где $K \subseteq M$, $H \not\subseteq M$. Тогда $\eta(G : M) = |H/K|$ называется нормальным индексом подгруппы M в G .

Лемма 3.4. Если N – нормальная подгруппа группы G и M – максимальная подгруппа группы G такая, что $N \leq M$, то $\eta(G/N : M/N) = \eta(G : M)$.

Теорема 3.5. Пусть G – группа и M – ее максимальная подгруппа. Тогда M является m -нормальной в G тогда и только тогда, когда $\eta(G : M) = |G : M|$.

Следствие 3.6 (Дескинз [8, теорема 1]). Пусть G – группа. Тогда G разрешима тогда и только тогда, когда $\eta(G : M) = |G : M|$ для каждой максимальной подгруппы M из G .

Следствие 3.7 (Ванг [9, теорема 3.2]). Пусть G – группа и M – ее максимальная подгруппа.

Тогда M является s -нормальной в G тогда и только тогда, когда $\eta(G:M) = |G:M|$.

Теорема 3.8. *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная в G подгруппа M с непростым индексом $|G:M|$ является m -нормальной в G подгруппой.*

Следствие 3.9 (Ванг [9, теорема 3.5]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная в G подгруппа с непростым индексом $|G:M|$ является m -нормальной в G подгруппой.*

Теорема 3.10. *Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если каждая минимальная подгруппа группы G является m -нормальной в G , то G разрешима;*

(2) *если для любой силовой подгруппы из G все ее максимальные подгруппы или все ее циклические подгруппы с простым порядком и порядка 4 m -нормальны в G , то группа G сверхразрешима.*

Следующий результат Гашнюца хорошо известен.

Следствие 3.11 [10, гл. IV, теорема 5.7]. *Если каждая минимальная в G подгруппа является нормальной в G , то G разрешима.*

Теорема 3.12. *Пусть F – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G – группа с такими нормальными подгруппами $X \leq E$, что $G/E \in F$. Предположим, что для каждой нециклической силовой подгруппы P из X все ее максимальные подгруппы или все ее циклические подгруппы с простым порядком и порядка 4 m -нормальны в G . Если $X = E$ или $X = F^*(E)$, тогда $G \in F$.*

Следствие 3.13 (Сринивасан [11]). *Если каждая максимальная подгруппа каждой силовой подгруппы из G является нормальной в G , то группа G разрешима.*

Следствие 3.14 (Рамадан [12]). *Пусть G – разрешимая группа. Если все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из $F(E)$ являются нормальными в G , то группа G сверхразрешима.*

Следствие 3.15 (Бакли [13]). *Группа нечетного порядка является сверхразрешимой, если все ее подгруппы простого порядка нормальны.*

Подгруппа H группы G называется квазинормальной [Оре, 1937], если H перестановочна со всеми подгруппами группы G . Как установлено в монографии [2] (см. теорему 5.1.1 на стр. 201), всякая квазинормальная подгруппа является модулярной и поэтому из

теоремы 3.12 мы получаем

Следствие 3.16 (Баллестер-Болиншес, Педраза-Агуилера [14]). *Пусть F – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы. Группа G принадлежит F при условии, что все минимальные и все циклические подгруппы порядка 4 из G^F квазинормальны в G .*

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt, R. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. – 1969. – Vol. 13. – P. 358–377.
2. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
3. Васильев, В.А. Новые характеристики конечных разрешимых групп / В.А. Васильев, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3. – С. 51–58.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
5. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
6. Ballester-Bolínches, A. Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolínches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht, 2006. – 385 p.
7. Zhu, L. Weakly c -normal subgroups of finite groups and their properties / L. Zhu, W. Guo, K.P. Shum // Comm. Algebra. – 2002. – Vol. 30, № 11. – P. 5503–5510.
8. Deskins, W.E. On maximal subgroups / W.E. Deskins // Proc. Symp. Pure Math. – 1959. – Vol. 1. – P. 100–104.
9. Wang, Y. c -normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.
10. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1967. – 793 s.
11. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // J. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 210–214.
12. Ramadan, M. Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / M. Ramadan // Acta Math. – Hungar. – 1996. – Vol. 59, N 1–2. – P. 107–110.
13. Buckley, J. Finite groups whose minimal subgroups are normal / J. Buckley // Math. Z. – 1970. – Vol. 116. – 15–17 p.
14. Ballester-Bolínches, A. On minimal subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolínches, M.C. Pedraza-Aguilera // Acta Math. – Hungar. – 1996. – Vol. 73, N 4. – P. 335–342.

Поступила в редакцию 24.05.2010

Адрес для корреспонденции: 246028, г. Гомель, ул. Советская, д. 106, кв. 156, e-mail: vovichx@mail.ru – Васильев В.А.