УДК 512.542

Новые характеризации метанильпотентных и разрешимых конечных групп

В.А. Васильев, А.Н. Скиба
Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

В статье введено понятие m-нормальной подгруппы. Найден новый критерий метанильпотентности групп: группа метанильпотентна тогда и только тогда, когда каждая ее силовская подгруппа является m-нормальной в G. Также установлено, что m-нормальность в группе каждой ее максимальной подгруппы с непростым индексом является необходимым и достаточным условием разрешимости группы.

Ключевые слова: метанильпотентная группа, разрешимая группа, m-нормальная подгруппа.

New characterizations of metanilpotent groups and finite soluble groups

V.A. Vasilyev, A.N. Skiba
Educational establishment «Francisk Skorina Gomel State University»

Summary. *The concept of a m-normal subgroup is introduced. New characterizations of finite metanilpotent groups and finite soluble groups in the terms of m-normal subgrous are obtained.*

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Элемент m решетки L называется модулярным (в смысле Куроша), если выполняются следующие условия:

(1) $x \cup (m \cap z) = (x \cup m) \cap z$ для всех $x, z \in L$ таких, что $x \le z$;

(2) $m \cup (y \cap z) = (m \cup y) \cap z$ для всех $y, z \in L$ таких, что $m \le z$.

Имея дело с решеткой $L(G)$ всех подгрупп группы G, мы приходим к понятию модулярной подгруппы группы G.

Определение 1.1. *Подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G, если выполняются следующие условия:*

(1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \le G, Z \le G$ таких, что $X \le Z$;

(2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \le G, Z \le G$ таких, что $M \le Z$.

Понятие модулярной подгруппы впервые было введено в работе Р. Шмидта [1] и оказалось полезным в вопросах классификации составных групп. В частности, в монографии Р. Шмидта [2, гл. 5] модулярные подгруппы были использованы для получения новых характеризаций сверхразрешимых групп. Дополняя эти результаты, в данной работе мы используем обобщенные модулярные подгруппы для получения новых характеризаций разрешимых и метанильпотентных групп. Основными нашими инструментами являются следующие понятия.

Определение 1.2. *Пусть $H \le G$. Подгруппу, порожденную всеми теми подгруппами из H, которые модулярны в G, назовем модулярным ядром подгруппы H в группе G и обозначим H_{mG}.*

Элементы теории модулярных ядер и некоторые приложения такой теории даны нами в работе [3]. В данной работе мы используем это понятие в следующем определении

Определение 1.3. *Подгруппу H группы G назовем m-нормальной в G, если в G существует такая нормальная подгруппа R, что G = HK и $H \cap K \le H_{mG}$.*

Заметим, что если H – модулярная подгруппа группы *G*, то $H_{mG} = H$ и поэтому всякая модулярная подгруппа является *m*-нормальной. В то же время легко построить примеры, показывающие, что в общем случае *m*-нормальная подгруппа не является модулярной.

Используемая в статье терминология стандартна и при необходимости мы отсылаем читателя к монографиям [4, 5, 6].

Некоторые предварительные результаты. Следующие известные свойства модулярных подгрупп будут использованы в данной работе.

Лемма 2.1 [2, гл. 5, раздел 5.1]. *Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *если M_1 и M_2 – модулярные в G подгруппы, то $\langle M_1, M_2 \rangle$ – модулярная в G подгруппа;*

(b) *если N – нормальная в G подгруппа, то* N *является модулярной в G подгруппой;*

(c) *если N – нормальная в G подгруппа, M – модулярная в G подгруппа, то* MN/N *– модулярная в* G/N *подгруппа;*

(d) *если* $N \le M \le G$, N *нормальна в G и* M/N *модулярна в* G/N, *то M модулярна в G;*

(e) *если* $M \le M_1 \le G$ *и M модулярна в G, то M модулярна в* M_1;

(f) *если* φ *– изоморфизм группы* G *на группу* $\overline{G}$, M *модулярна в* G, *то* M^{φ} *модулярна в* $\overline{G}$;

(g) *если* M *– модулярная в* G *подгруппа, то* $H \cap M$ *– модулярная в* H *подгруппа для всех* $H \le G$.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.2. *Пусть G – группа, H нормальна в G и* $M_1, M_2, ..., M_n$ *– некоторый такой набор подгрупп из G, что* $H \le M_i, i = 1,2,...,n$. *Тогда* $\langle M_1/H, M_2/H, ..., M_n/H \rangle = \langle M_1, M_2, ..., M_n \rangle /H$.

Следующая наша лемма показывает, что модулярное ядро обладает свойствами, аналогичными свойствам нормального ядра подгруппы.

Лемма 2.3. *Пусть G – группа и* $H \le K \le G$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) H_{mG} *– модулярная в G подгруппа и* $H_G \le H_{mG}$;

(2) $H_{mG} \le H_{mK}$;

(3) *если H нормальна в G, то* $(K/H)_{m(G/H)} = K_{mG}/H$;

(4) H_{mG} *– нормальная в H подгруппа.*

Доказательство.

(1) Пусть $M_1, M_2, ..., M_n$ – набор всех тех модулярных в G подгрупп, которые содержатся в H. Тогда $\langle M_1, M_2, ..., M_n \rangle = H_{mG}$ и, значит, H_{mG} – модулярная в G подгруппа по лемме 2.1(a). По лемме 2.1(b) всякая нормальная в G подгруппа является модулярной в G подгруппой. Значит, $H_G \le H_{mG}$.

(2) Применяя лемму 2.1(e), мы видим, что множество всех модулярных в G подгрупп из H содержится во множестве всех модулярных в K подгрупп из H. Значит, $H_{mG} \le H_{mK}$.

(3) Пусть $M_1/H, M_2/H, ..., M_n/H$ – набор всех тех модулярных в G/H подгрупп, которые содержатся в K/H. Тогда $(K/H)_{m(G/H)} = \langle M_1/H, M_2/H, ..., M_n/H \rangle$. Согласно лемме 2.2, $\langle M_1/H, M_2/H, ..., M_n/H \rangle = \langle M_1, M_2, ..., M_n \rangle /H$. По лемме 2.1(d), $M_1, M_2, ..., M_n$ – модулярные в G подгруппы, которые содержатся в K. Значит, $(K/H)_{m(G/H)} = \langle M_1, M_2, ..., M_n \rangle /H \subseteq K_{mG}/H$.

Если же $K_1, K_2, ..., K_t$ – набор всех модулярных в G подгрупп, содержащихся в K, то $K_{mG} = \langle K_1, K_2, ..., K_t \rangle$. Согласно лемме 2.1(c), K_iH/H – модулярная в G/H подгруппа, и, очевидно, $K_iH/H \subseteq K/H, i = 1,...,t$. Значит, $K_{mG}/H \subseteq (K/H)_{m(G/H)}$. Таким образом, $(K/H)_{m(G/H)} = K_{mG}/H$.

(4) Из $H_{mG} \subseteq H$ следует, что $(H_{mG})^h \subseteq H$ для любого $h \in H$. Так как H_{mG} модулярная в G подгруппа, то $(H_{mG})^h$ модулярная в G подгруппа по лемме 2.1(f). Значит, $(H_{mG})^h \subseteq H_{mG}$, а это влечет $(H_{mG})^h = H_{mG}$. Таким образом, H_{mG} нормальна в H. Лемма доказана.

Символом $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ обозначают наибольшую нормальную подгруппу группы G, у которой все G-главные факторы цикличны.

Лемма 2.4 [2, гл. 5, теорема 5.2.5]. *Если подгруппа H модулярна в G, то* $H^G/H_G \subseteq Z_{\mathfrak{U}}(G/H_G)$.

Общие свойства m-нормальных подгрупп описывает следующая лемма.

Лемма 2.5. *Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если H является m-нормальной в G подгруппой,* $H \le M \le G$, *то H является m-нормальной в M подгруппой;*

(2) *пусть N нормальна в G и* $N \le H$. *Тогда и только тогда H является m-нормальной в G подгруппой, когда* H/N *является m-нормальной в* G/N *подгруппой;*

(3) *пусть* π *– некоторое множество простых чисел, N – нормальная* π'*-подгруппа в G и H –* π*-подгруппа в G. Если H является m-нормальной в G подгруппой, то* HN/N *является m-нормальной в* G/N *подгруппой;*

(4) *пусть* $H \le G$ *и* $L \le \Phi(H)$. *Если L является m-нормальной в G подгруппой, то L является модулярной в G подгруппой и* $L \le \Phi(G)$.

Доказательство.

(1) Если $HK = G$, $H \cap K \le H_{mG}$, K нормальна в G, то $M = M \cap G = H(M \cap K)$ и $H \cap (M \cap K) = H \cap K \le H_{mG} \le H_{mM}$ по лемме 2.3. Подгруппа $M \cap K$ является нормальной в M подгруппой и, значит, H является m-нормальной в M.

(2) Предположим, что H/N является m-нормальной в G/N подгруппой. Тогда существует нормальная подгруппа K/N в G/N такая, что $G/N = (H/N)(K/N)$ и $(H/N) \cap (K/N) \le (H/N)_{m(G/N)}$. Тогда $G = HK$, где K нормальна в G, и по лемме 2.3(3) имеет место $(H/N)_{m(G/N)} = H_{mG}/N$, что вле-

чет $(H/N)\cap(K/N)\le H_{mG}/N$. Значит, $H\cap K\le H_{mG}$ и поэтому H является m-нормальной в G.

Обратно, если H является m-нормальной в G подгруппой, то существует такая нормальная в G подгруппа K, что $G=HK$ и $H\cap K\le H_{mG}$. Покажем, что H/N является m-нормальной в G/N подгруппой. Подгруппа KN нормальна в G и подгруппа KN/N нормальна в G/N. Так как $HKN=HK=G$, то $(H/N)(KN/N)=G/N$. Из $H\cap K\le H_{mG}$ получаем, что $(H/N)\cap(KN/N)=$ $=(H\cap KN)/N=N(H\cap K)/N\le H_{mG}/N$. По лемме 2.3(3) имеем $H_{mG}/N=(H/N)_{m(G/N)}$. Значит, $(H/N)\cap(KN/N)\le(H/N)_{m(G/N)}$ и поэтому H/N является m-нормальной в G/N.

(3) Если H является m-нормальной в G подгруппой, то существует такая нормальная в G подгруппа K, что $G=HK$ и $H\cap K\le H_{mG}$. Так как $|G|_{\pi'}=|K|_{\pi'}=|KN|_{\pi'}$, то $|K\cap N|_{\pi'}=|N|_{\pi'}=|N|$. Значит, $N\le K$. Ясно, что $(HN/N)(K/N)=G/N$ и $(HN/N)\cap(K/N)=(H\cap K)N/N\le(HN/N)_{m(G/N)}$ по лемме 2.1(c), и K/N нормальна в G/N. Таким образом, HN/N является m-нормальной в G/N подгруппой.

(4) Если L является m-нормальной в G подгруппой, то существует нормальная в G подгруппа K такая, что $LK=G$ и $L\cap K\le L_{mG}$. Так как $L\le\Phi(H)$, то $H=H\cap G=L(H\cap K)=H\cap K$. Значит, $L\le H\cap K\le L_{mG}$ и получаем, что L модулярна в G. Если $L\not\le\Phi(G)$, то существует максимальная в G подгруппа M такая, что $LM=G$. Так как $H=H\cap G=L(H\cap M)=H\cap M\le M$, то $G=LM\le HM\le M<G$. Получили противоречие. Значит, $L\le\Phi(G)$. Лемма доказана.

Определение 2.6. *Группу G назовем m-простой, если в G нет других m-нормальных подгрупп кроме 1 и G.*

Лемма 2.7. *Пусть g – группа и $H\le G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если H является нормальной в G подгруппой, то H является m-нормальной в G подгруппой;*

(2) *G является m-простой тогда и только тогда, когда G является простой.*

Доказательство.

(1) $HG=G$ и $H\cap G=H=H_{mG}$. Значит, H является m-нормальной в G.

(2) Согласно (1), если G – m-простая группа, то она будет и простой. Допустим теперь, что G – простая группа, но G не является m-простой. Тогда существует такая нетривиальная подгруппа H, которая является m-нормальной в G. По определению, существует такая нормальная в G подгруппа N, что $HN=G$ и $H\cap N\le H_{mG}$. Тогда $N\ne 1$ и получаем, что $N=G$. Это влечет $H\cap G=H\le H_{mG}$. Значит, $H=H_{mG}$ модулярна в G. По лемме 2.4 получаем, что $H^G/H_G\subseteq Z_{\mathfrak{U}}(G/H_G)$. Но $1<H<G$ и поэтому $H^G=G$ и $H_G=1$. Следовательно, $G=Z_{\mathfrak{U}}(G)$ – сверхразрешимая группа. Но G – простая группа и поэтому $|G|=p$ – простое число. Ввиду теоремы Лагранжа, это противоречит нашему предположению о подгруппе H. Следовательно, группа G – m-простая. Лемма доказана.

Основные результаты. Понятие m-нормальной подгруппы позволяет получить следующую новую характеризацию метанильпотентных групп.

Теорема 3.1. *Группа G является метанильпотентной тогда и только тогда, когда каждая ее силовская подгруппа является m-нормальной в G.*

Следствие 3.2 (Л. Жу, В. Го, К.П. Шам [7, теорема 1]). *Группа G является метанильпотентной, если каждая еще силовская подгруппа является c-нормальной в G.*

Определение 3.3. *Пусть M – максимальная подгруппа группы G, H/K – главный фактор группы G, где $K\subseteq M$, $H\not\subseteq M$. Тогда $\eta(G:M)=|H/K|$ называется нормальным индексом подгруппы M в G.*

Лемма 3.4. *Если N – нормальная подгруппа группы G и M – максимальная подгруппа группы G такая, что $N\le M$, то $\eta(G/N:M/N)=\eta(G:M)$.*

Теорема 3.5. *Пусть G – группа и M – ее максимальная подгруппа. Тогда M является m-нормальной в G тогда и только тогда, когда $\eta(G:M)=|G:M|$.*

Следствие 3.6 (Дескинз [8, теорема 1]). *Пусть G – группа. Тогда G разрешима тогда и только тогда, когда $\eta(G:M)=|G:M|$ для каждой максимальной подгруппы M из G.*

Следствие 3.7 (Ванг [9, теорема 3.2]). *Пусть G – группа и M – ее максимальная подгруппа. Тогда M является c-нормальной в G тогда и только тогда, когда $\eta(G:M)=|G:M|$.*

Теорема 3.8. *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная в G подгруппа M с непростым индексом $|G:M|$ является m-нормальной в G подгруппой.*

Следствие 3.9 (Ванг [9, теорема 3.5]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная в G подгруппа с непро-*

стым индексом $|G:M|$ *является* $\mathfrak{m}$*-нормальной в G подгруппой.*

Теорема 3.10. *Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если каждая минимальная подгруппа группы G является* $\mathfrak{m}$*-нормальной в G, то G разрешима;*

(2) *если для любой силовской подгруппы из G все ее максимальные подгруппы или все ее циклические подгруппы с простым порядком и порядка 4* $\mathfrak{m}$*-нормальны в G, то группа G сверхразрешима.*

Следующий результат Гашюца хорошо известен.

Следствие 3.11 [10, гл. IV, теорема 5.7]. *Если каждая минимальная в G подгруппа является нормальной в G, то G разрешима.*

Теорема 3.12. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G – группа с такими нормальными подгруппами* $X \le E$, *что* $G/E \in \mathfrak{F}$. *Предположим, что для каждой нециклической силовской подгруппы P из X все ее максимальные подгруппы или все ее циклические подгруппы с простым порядком и порядка 4* $\mathfrak{m}$*-нормальны в G. Если* $X = E$ *или* $X = F^*(E)$, *тогда* $G \in \mathfrak{F}$.

Следствие 3.13 (Сринивасан [11]). *Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из G является нормальной в G, то группа G разрешима.*

Следствие 3.14 (Рамадан [12]). *Пусть G – разрешимая группа. Если все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из* $F(E)$ *являются нормальными в G, то группа G сверхразрешима.*

Следствие 3.15 (Бакли [13]). *Группа нечетного порядка является сверхразрешимой, если все ее подгруппы простого порядка нормальны.*

Подгруппа *H* группы *G* называется квазинормальной [Оре, 1937], если *H* перестановочна со всеми подгруппами группы G. Как установлено в монографии [2] (см. теорему 5.1.1 на стр. 201), всякая квазинормальная подгруппа является модулярной и поэтому из теоремы 3.12 мы получаем

Следствие 3.16 (Баллестер-Болиншес, Педраза-Агуилера [14]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы. Группа G принадлежит* $\mathfrak{F}$ *при условии, что все минимальные и все циклические подгруппы порядка 4 из* $G^{\mathfrak{F}}$ *квазинормальны в G.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Schmidt, R. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. – 1969. – Vol. 13. – P. 358–377.
2. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
3. Васильев, В.А. Новые характеризации конечных разрешимых групп / В.А. Васильев, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3. – С. 51–58.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
5. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
6. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht, 2006. – 385 p.
7. Zhu, L. Weakly c-normal subgroups of finite groups and their properties / L. Zhu, W. Guo, K.P. Shum // Comm. Algebra. – 2002. – Vol. 30, № 11. – P. 5503–5510.
8. Deskins, W.E. On maximal subgroups / W.E. Deskins // Proc. Symp. Pure Math. – 1959. – Vol. 1. – P. 100–104.
9. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.
10. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1967. – 793 s.
11. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // J. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 210–214.
12. Ramadan, M. Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / M. Ramadan // Acta Math. – Hungar. – 1996. – Vol. 59, N 1–2. – P. 107–110.
13. Buckley, J. Finite groups whose minimal subgroups are normal / J. Buckley // Math. Z. – 1970. – Vol. 116. – 15–17 p.
14. Ballester-Bolinches, A. On minimal subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // Acta Math. – Hungar. – 1996. – Vol. 73, N 4. – P. 335–342.

Поступила в редакцию 24.05.2010

Адрес для корреспонденции: 246028, г. Гомель, ул. Советская, д. 106, кв. 156, e-mail: vovichx@mail.ru – Васильев В.А.