УДК 517.951.5

Дальнейшее развитие обобщенного метода Фурье разделения переменных

И.Е. Андрушкевич*, В.А. Жизневский**

** Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»*

*** Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»*

В данной работе исследуются и развиваются возможности обобщенного метода Фурье разделения переменных (ОМФ) для построения аналитических решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Развиваемый метод является обобщением хорошо известного классического метода Фурье разделения переменных, возможности которого ограничены задачами простой геометрии. Существует несколько подходов для повышения универсальности этого метода. В качестве отправной точки данных исследований выбран ОМФ как наиболее обоснованный и многообещающий по своим возможностям. Развитие этого метода, в рамках данной работы, направлено на преодоление математических проблем его практического использования. В процессе построения аналитических решений с использованием ОМФ возникает необходимость рассмотрения переопределенных систем разделенных уравнений. Найдены и доказаны закономерности, позволяющие уменьшить количество неопределенных коэффициентов и, тем самым, снять переопределенность систем. Благодаря проведенным исследованиям появилась возможность алгоритмизации ОМФ и создания его программной реализации.

Ключевые слова: обобщенный метод Фурье, матрица, невырожденное унитарное преобразование.

Further development of generalized Fourier method of separation of variables

I.Ye. Andrushkevich*, V.A. Zhiznevskiy**

**Educational establishment «Polotsk State University»*

***Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»*

Summary. *In this work the mathematical problem of practical application of generalized Fourier method of separation of variables is presented with reference to the differential equations in private derivatives. As a result of the carried out research generalization of Fourier method has obtained completed kind, suitable for the decision of applied sums.*

Постановка задачи. Настоящую статью следует рассматривать как продолжение предыдущих [1, 2], посвященных проблематике развития обобщенного метода Фурье разделения переменных в целях практического применения. Напомним, что для построения аналитических решений исходного линейного дифференциального уравнения в частных производных,

$$L\Psi(x, y) = U(x, y), \tag{1}$$

предлагается сопоставление этому уравнению эквивалентной на определенном классе функций системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Достигается это сведением (1) к билинейному функциональному уравнению вида:

$$\sum_{\zeta=1}^{N} f_\zeta(x)\, g_\zeta(y) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) получается из (1) при обеспечении разделимости оператора L и подстановке представления формального решения в виде:

$$\Psi(x, y) = \sum_{\kappa=1}^{S} X_\kappa(x) Y_\kappa(y).$$

Такой подход принято называть обобщенным методом Фурье [1].

При рассмотрении уравнения (2) его удобно записать в матричном виде:

$$\mathbf{f}^{\mathbf{T}} \times \mathbf{g} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_N(x) \end{pmatrix}$; $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ \dots \\ g_N(y) \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}^{\mathbf{T}}$ – матрица, транспонированная к $\mathbf{f}$.

Для нахождения решений (3) из множества N функций f_ζ выбирается подмножество r линейно-независимых, выступающих в качестве базисных, и строится система разделенных уравнений, из которой следует:

$$\mathbf{f}=\mathbf{A}[i^r]_{i_1,\dots i_r}\begin{pmatrix} f_1(x)\\ \cdot\\ \cdot\\ f_r(x)\end{pmatrix},\quad \mathbf{g}=(\mathbf{E}-\mathbf{A}')[i^r]_{j_1,\dots,j_{N-r}}\begin{pmatrix} g_1(y)\\ \cdot\\ \cdot\\ g_{N-r}(y)\end{pmatrix},\qquad (4)$$

где $\mathbf{A}[i^r]_{k_1,\dots k_s}$, $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}[i^r]_{k_1,\dots k_s}$ – матрицы, образованные столбцами $k_1,\dots,k_s$ матриц $\mathbf{A}[i^r]$, $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}[i^r]$ соответственно, а элементы матрицы $\mathbf{A}[i^r]$ определяются следующим образом:

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, i=j\in\{i^r\},\\ 0, i\in\{i^r\}, j\in\{i^r\}, i\neq j,\\ \alpha_{ij}, i\in\{j^r\}, j\in\{i^r\},\\ 0, j\in\{j^r\},\end{cases}\qquad (5)$$

где α_{ij} – произвольные числовые коэффициенты, $\{i^r\},\{j^r\}$ – упорядоченные целочисленные множества, такие, что

$$\{i^r\}=\{i_1,\dots,i_r\};\ \{j^r\}=\{j_1,\dots,j_{N-r}\};\ r=\overline{1,N};$$
$$1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le N;\ 1\le j_1<j_2<\dots<j_{N-r}\le N;\qquad (6)$$
$$\{i^r\}\cup\{j^r\}=\{1,2,\dots,N\};\ \{i^r\}\cap\{j^r\}=\varnothing.$$

Таким образом, задача о разделении переменных, т.е. построении систем обыкновенных дифференциальных уравнений, теоретически решается. Но, с точки зрения создания расчетных моделей для прикладных задач, интерес представляет возможность получения аналитических решений (4) относительно неизвестных функций в замкнутом виде. На пути построения таких решений возникает проблема математического характера. Это – переопределенность этих систем, т.к. каждая из них содержит $(N-r)r$ постоянных разделения α_{ji}, подлежащих дополнительному определению. Решение данной математической проблемы было начато в [2]. В этой работе доказаны три теоремы, позволяющие уменьшить количество неопределенных коэффициентов для различных случаев соотношения между размерностью билинейного функционального уравнения N и количеством базисных функций r.

1. Для случая $N-$ четное, $r=N/2$ матрица $\mathbf{A}[i^r]$ заменяется подобной ей $\mathrm{B}[i^r]$, с элементами

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, i=j\in\{i^{N/2}\},\\ 0, i\in\{i^{N/2}\}, j\in\{i^{N/2}\}, i\neq j,\\ \beta_{i_k,j_n}\delta_{kn}, i\in\{j^{N/2}\}, j\in\{i^{N/2}\},\\ 0, j\in\{j^{N/2}\}.\end{cases}$$

Здесь и далее под δ_{ij} понимается 1, если $i=j$ и 0 если $i\neq j$.

В этом случае количество коэффициентов, которые необходимо определить, уменьшается с $(N-r)r$ до r. Например, при $N=6$, $r=3$ вместо 9 коэффициентов достаточно найти 3.

2. Для случая $r<N/2$ матрица $\mathbf{A}[i^r]$ заменяется подобной ей $\mathrm{B}[i^r]$, с элементами

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, i=j\in\{i^r\},\\ 0, i\in\{i^r\}, j\in\{i^r\}, i\neq j,\\ \beta_{i_n,j_k}\delta_{nk}, 1\le n,k\le r,\ i_n\in\{j^r\}, j_k\in\{i^r\},\\ \beta_{i_n,j_k}, n>r, i_n\in\{j^r\}, j_k\in\{i^r\},\\ 0, j\in\{j^r\}.\end{cases}\qquad (7)$$

В этом случае количество коэффициентов, которые необходимо определить, уменьшается с $(N-r)r$ до $(N-2r)r+r$. Например, при $N=9$, $r=3$ вместо 18 коэффициентов достаточно найти 12.

3. Для случая $r>N/2$ матрица $\mathbf{A}[i^r]$ заменяется подобной ей $\mathrm{B}[i^r]$, с элементами

$$b_{ij}=\begin{cases} 1,\ i=j\in\{i^r\},\\ 0,\ i\in\{i^r\}, j\in\{i^r\}, i\neq j,\\ \beta_{i_n,j_k}\delta_{nk},\ 1\le n,k\le N-r,\ i_n\in\{j^r\}, j_k\in\{i^r\},\\ \beta_{i_n,j_k},\ k>N-r, i_n\in\{j^r\}, j_k\in\{i^r\},\\ 0,\ j\in\{j^r\}.\end{cases}\qquad (8)$$

В этом случае количество коэффициентов, которые необходимо найти, уменьшается с $(N-r)r$ до $(r-N)(N-r)+(N-r)$. Например, при $N=10$, $r=6$ вместо 24 коэффициентов достаточно определить 12.

Очевидно, что исследования, результаты которых изложены в [2], позволили значительно сократить многовариативность при решении систем разделенных уравнений. Однако в случаях 2 и 3 не удается снять переопределенность систем уравнений в полной степени. Дальнейшие исследования свойств матриц коэффициентов для этих случаев привели к результатам, излагаемым ниже. При этом использована сквозная с работой [2] нумерация утверждений, требующих строгого математического обоснования.

Результаты и их обсуждение.

Теорема 4. *Если* $r<N/2$, *то для матриц* $B[i^r]$, *определенных (7), существует*

невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и уменьшающее количество неопределенных коэффициентов с $(N-2r)\times r+r$ *до* $N-r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим невырожденную матрицу $\mathbf{\Pi}$, для которой выполняется $\det\mathbf{\Pi}=1$, и, следовательно, существует однозначно определяемая обратная матрица $\mathbf{\Pi}^{-1}$. Элементы такой матрицы определяются следующим образом:

$$\mathrm{p}_{ij}=\begin{cases} 1, i=j\in\{i^r\}, \\ 0, i\in\{i^r\}, j\in\{i^r\}, i\neq j, \\ \beta_{i_n, j_k}-\chi_{i_n, j_k}\delta_{lk}, 1\le k\le r, l=n-mr, 0\le m\le\dfrac{(N-r)}{r}, i_n\in\{j^r\}, j_k\in\{i^r\}, \\ 0, i\in\{i^r\}, j\in\{j^r\} \\ 1, i=j\in\{j^r\}, \\ 0, i\in\{j^r\} j\in\{j^r\}, i\neq j. \end{cases}$$

Осуществляя для матрицы $B[i^r]$**,** определенной в (7), преобразование вида $\mathbf{\Pi}^{-1}B\mathbf{\Pi}=C$, получим для элементов C:

$$\mathrm{c}_{ij}=\begin{cases} 1, i=j\in\{i^r\}, \\ 0, i\in\{i^r\}, j\in\{i^r\}, i\neq j, \\ \chi_{i_n, j_k}\delta_{lk}, 1\le k\le r, l=n-mr, 0\le m\le\dfrac{(N-r)}{r}, i_n\in\{j^r\}, j_k\in\{i^r\}. \\ 0, j\in\{j^r\}. \end{cases}$$

Что и требовалось для доказательства.

Теорема 5. *Если* $r\rangle N/2$, *то для матриц* $B[i^r]$, *определенных (8), существует невырожденное унитарное преобразование, сохраняющее их структуру и уменьшающее количество неопределенных коэффициентов с* $(2r-N)\times(N-r)+(N-r)$ *до* r.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим невырожденную матрицу $\mathbf{\Pi}$, для которой выполняется $\det\mathbf{\Pi}=1$, и, следовательно, существует однозначно определяемая обратная матрица $\mathbf{\Pi}^{-1}$. Элементы такой матрицы определяются следующим образом:

$$\mathrm{p}_{ij}=\begin{cases} 1, i=j\in\{i^r\}, \\ 0, i\in\{i^r\}, j\in\{i^r\}, i\neq j, \\ \beta_{i_n, j_k}-\chi_{i_n, j_k}\delta_{nl}, l=k-mr, 0\le m\le\dfrac{r}{(N-r)}, i_n\in\{j^r\}, j_k\in\{i^r\}, \\ 0, i\in\{i^r\}, j\in\{j^r\} \\ 1, i=j\in\{j^r\}, \\ 0, i\in\{j^r\} j\in\{j^r\}, i\neq j. \end{cases}$$

Осуществляя для матрицы $B[i^r]$**,** определенной в (8), преобразование вида $\mathbf{\Pi}^{-1}B\mathbf{\Pi}=C$, получим для элементов C:

$$\mathrm{c}_{ij}=\begin{cases} 1, i=j\in\{i^r\}, \\ 0, i\in\{i^r\}, j\in\{i^r\}, i\neq j, \\ \chi_{i_n, j_k}\delta_{nl}, 1\le k\le r, l=k-mr, 0\le m\le\dfrac{r}{(N-r)}, i_n\in\{j^r\}, j_k\in\{i^r\}, \\ 0, j\in\{j^r\}. \end{cases}$$

Что и требовалось для доказательства.

Иллюстрация эффективности доказанных утверждений. Рассмотрим применение результатов исследований для упомянутых выше примеров.

Для случая $N=9,\ r=3$ с учетом результатов работы [2] необходимо использовать матрицу вида:

$$
B[1,2,3]=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\beta_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \beta_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \beta_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\beta_{71} & \beta_{72} & \beta_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\beta_{81} & \beta_{82} & \beta_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\beta_{91} & \beta_{92} & \beta_{93} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

и решать соответствующие ей системы разделенных уравнений

$$
\begin{cases}
f_4-\beta_{41}f_1=0\\
f_5-\beta_{52}f_2=0\\
f_6-\beta_{63}f_3=0\\
f_7-\beta_{71}f_1-\beta_{72}f_2-\beta_{73}f_3=0\\
f_8-\beta_{81}f_1-\beta_{82}f_2-\beta_{83}f_3=0\\
f_9-\beta_{91}f_1-\beta_{92}f_2-\beta_{93}f_3=0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
g_1+\beta_{41}g_4+\beta_{71}g_7+\beta_{81}g_8+\beta_{91}g_9=0\\
g_2+\beta_{52}g_5+\beta_{72}g_7+\beta_{82}g_8+\beta_{92}g_9=0\\
g_3+\beta_{63}g_6+\beta_{73}g_7+\beta_{83}g_8+\beta_{93}g_9=0
\end{cases}
$$

Благодаря теореме 4 нам достаточна матрица вида:

$$
C[1,2,3]=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\chi_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \chi_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \chi_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\chi_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \chi_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \chi_{93} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

При этом системы уравнений упростятся до следующих:

$$
\begin{cases}
f_4-\chi_{41}f_1=0\\
f_5-\chi_{52}f_2=0\\
f_6-\chi_{63}f_3=0\\
f_7-\chi_{71}f_1=0\\
f_8-\chi_{82}f_2=0\\
f_9-\chi_{93}f_3=0
\end{cases}
\tag{9}
$$

$$
\begin{cases}
g_1+\chi_{41}g_4+\chi_{71}g_7=0\\
g_2+\chi_{52}g_5+\chi_{82}g_8=0\\
g_3+\chi_{63}g_6+\chi_{93}g_9=0
\end{cases}
$$

Как видим, благодаря проведенным исследованиям удается уменьшить количество коэффициентов с 12 до 6.

Рассматривая случай $N=10,\ r=6$ вместо решения систем уравнений с 12 неопределенными коэффициентами

$$
\begin{cases}
f_7-\beta_{71}f_1-\beta_{75}f_5-\beta_{76}f_6=0\\
f_8-\beta_{82}f_2-\beta_{85}f_5-\beta_{86}f_6=0\\
f_9-\beta_{93}f_3-\beta_{95}f_5-\beta_{96}f_6=0\\
f_{10}-\beta_{10\,4}f_4-\beta_{10\,5}f_5-\beta_{10\,6}f_6=0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
g_1+\beta_{71}g_7=0\\
g_2+\beta_{82}g_8=0\\
g_3+\beta_{93}g_9=0\\
g_4+\beta_{10\,4}g_{10}=0\\
g_5+\beta_{75}g_7+\beta_{85}g_8+\beta_{95}g_9+\beta_{10\,5}g_{10}=0\\
g_6+\beta_{76}g_7+\beta_{86}g_8+\beta_{96}g_9+\beta_{10\,6}g_{10}=0
\end{cases}
$$

достаточно найти решение для систем, содержащих 6 коэффициентов:

$$\begin{cases} f_7 - \chi_{71} f_1 - \chi_{75} f_5 = 0 \\ f_8 - \chi_{82} f_2 - \chi_{86} f_6 = 0 \\ f_9 - \chi_{93} f_3 = 0 \\ f_{10} - \chi_{10\,4} f_4 = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

$$\begin{cases} g_1 + \chi_{71} g_7 = 0 \\ g_2 + \chi_{82} g_8 = 0 \\ g_3 + \chi_{93} g_9 = 0 \\ g_4 + \chi_{10\,4} g_{10} = 0 \\ g_5 + \chi_{75} g_7 = 0 \\ g_6 + \chi_{76} g_7 = 0 \end{cases}$$

Как видно из этих примеров, количество коэффициентов, подлежащих определению, уменьшается до количества уравнений в системах (9), (10) по одной из переменных. Это позволяет однозначно найти их значения при наличии нетривиального решения.

Заключение. С учетом доказанных утверждений необходимо переформулировать основную теорему [3, с. 51], определяющую схему применения обобщенного метода Фурье разделения переменных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными.

Для построения общего решения уравнения (1)–(3) достаточно получить решения $N-2S$ систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\left(E - C(r)\right)\mathbf{f} = 0, \mathrm{C}^{\mathbf{T}}(r)\,\mathbf{g} = 0, \qquad (11)$$

где $\mathrm{C}(r)$ – матрица размерности $N \times N$, элементы которой определяются следующими соотношениями для случаев соответственно:

1. $r = N/2$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n,\, j_k} \delta_{lk}, , i_n \in \{i^r\}, j_k \in \{j^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

2. $r \langle N/2$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n,\, j_k} \delta_{lk}, l = n - mr, 0 \le m \le \dfrac{(N-r)}{r}, i_n \in \{i^r\}, j_k \in \{j^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}. \end{cases}$$

3. $r \rangle N/2$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \in \{i^r\}, \\ 0, i \in \{i^r\}, j \in \{i^r\}, i \neq j, \\ \chi_{i_n,\, j_k} \delta_{nl}, l = k - mr, 0 \le m \le \dfrac{r}{(N-r)}, i_n \in \{i^r\}, j_k \in \{j^r\}, \\ 0, j \in \{j^r\}, \end{cases}$$

где χ_{ij} – произвольные числовые коэффициенты, $\{i^r\},\{j^r\}$ – для каждого $r = \overline{S, N-S}$ одна из возможных пар упорядоченных целочисленных множеств, таких, что

$$\{i^r\} = \{i_1, ..., i_r\}; \{j^r\} = \{j_1, ..., j_{N-r}\}; \{i^0\} = \varnothing; \{j^0\} = \{1, 2, ..., N\}$$

$$1 \le i_1 \langle i_2 \langle ... \langle i_r \le N; 1 \le j_1 \langle j_2 \langle ... \langle j_{N-r} \le N;$$
$$\{i^r\} \cup \{j^r\} = \{1, 2, ..., N\}; \{i^r\} \cap \{j^r\} = \varnothing.$$

С использованием схемы применения метода, основанной на этой теореме, создан алгоритм и его программная реализация в системе компьютерной алгебры Maple. Данное программное обеспечение можно рассматривать как инструмент для проведения математического моделирования и вычислительного эксперимента через аналитические решения при изучении процессов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с частными производными.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Андрушкевич, И.Е. Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных / И.Е. Андрушкевич // Электромагнитные волны & Электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 4. – С. 4–17.

2. Андрушкевич, И.Е. Развитие обобщенного метода Фурье разделения переменных / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2006. – № 4. – С. 26–35.

3. Андрушкевич, И.Е. Новые возможности применения метода разделения переменных в электродинамике неоднородных и нестационарных сред / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // «Вестник БГУ», серия «Физика. Математика. Информатика». – 2006. – № 2. – С. 47–53.

Поступила в редакцию 29.04.2010
Адрес для корреспонденции: 210027, г. Витебск, пр-т Черняховского, д. 32, корп. 2, кв. 13, тел.: +37529 621-49-15 – Андрушкевич И.Е.