

УДК 514.765+512.812.4

# ПОЛНАЯ ГРУППА ПОДОБИЙ САМОПОДОБНОГО ТРЕХМЕРНОГО ЛОРЕНЦЕВОГО МНОГООБРАЗИЯ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ГРУППЫ ЛИ

М.Н. Подоксёнов, Н.С. Герасимович

Учреждение образования «Витебский государственный  
университет имени П.М. Машерова»

В ряде работ были построены самоподобные лоренцевы многообразия различных трёхмерных и четырёхмерных групп Ли. Цель работы — построить такое многообразие одной специальной трёхмерной неунимодулярной группы Ли и исследовать её полную группу подобий.

**Материал и методы.** Рассматривается специальная трёхмерная неунимодулярная алгебра Ли и соответствующая ей связанная односвязная группа Ли  $S_3$ . Используются методы дифференциальной геометрии.

**Результаты и их обсуждение.** На группе Ли  $S_3$  находится левинвариантная лоренцева метрика, при которой эта группа Ли допускает сильно существенную однопараметрическую группу подобий, оставляющую неподвижным единичный элемент группы Ли. Тем самым с найденной метрикой рассматриваемая группа Ли превращается в однородное самоподобное лоренцево многообразие. Такое многообразие является единственным с точностью до изометрии. Найдены формулы, по которым действуют указанная существенная однопараметрическая группа подобий и полная группа подобий  $FH(S_3)$  полученного многообразия относительно естественных координат, а также найдено матричное представление группы  $FH(S_3)$  и показано, что она является полупрямым произведением двух двумерных коммутативных групп Ли.

**Заключение.** Авторы построили самоподобное однородное многообразие группы Ли  $S_3$  и исследовали его полную группу подобий. Ближайшая цель: построить такое многообразие для четырёхмерной группы Ли  $S_3 \times \mathbb{R}^+$  ( $\mathbb{R}^+$  — группа положительных действительных чисел по сложению).

**Ключевые слова:** группа Ли, алгебра Ли, лоренцева метрика, самоподобное многообразие, подобие, однопараметрическая группа подобий.

# FULL SIMILARITY GROUP OF A SELF-SIMILAR THREE-DIMENSIONAL LORENTZIAN MANIFOLD OF A SPECIAL THREE-DIMENSIONAL LIE GROUP

M.N. Podoksenov, N.S. Gerasimovich

Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

Self-similar Lorentzian manifolds of various three- and four-dimensional Lie groups have been constructed in a number of papers. The goal of the paper is to construct such a manifold of a special three-dimensional non-unimodular Lie group and to investigate its complete similarity group.

**Materials and methods.** We consider a special three-dimensional non-unimodular Lie algebra and the corresponding connected simply connected Lie group  $S_3$ . Methods of differential geometry are used.

**Findings and their discussion.** A left-invariant Lorentzian metric is found on the Lie group  $S_3$  such that this Lie group admits a strongly essential one-parameter similarity group that leaves the identity element of the Lie group fixed. Thus, with the found metric, the Lie group under consideration turns into a homogeneous self-similar Lorentzian manifold. Such a manifold is unique up to isometry. Formulas are found for the actions of this essential one-parameter similarity group and the full similarity group  $FH(S_3)$  of the resulting manifold with respect to natural coordinates. A matrix representation of  $FH(S_3)$  is also found, and it is shown that it is a semidirect product of two two-dimensional commutative Lie groups.

**Conclusion.** We have constructed a self-similar homogeneous manifold of the Lie group  $S_3$ , and investigated its full similarity group. Our next goal is to construct such a manifold for the four-dimensional Lie group  $S_3 \times \mathbb{R}^+$  ( $\mathbb{R}^+$  is the group of positive real numbers by addition).

**Key words:** Lie group, Lie algebra, Lorentz metric, self-similar manifold, similarity, one-parameter similarity group.

Пусть  $M$  — дифференцируемое многообразие,  $g$  — невырожденный метрический тензор на нём. Преобразование этого многообразия называется *подобием* с коэффициентом  $k > 0, k \neq 1$ , если  $g_{f(Q)}(f_*X, f_*Y) = k^2 g_Q(X, Y) \quad \forall Q \in M \text{ и } \forall X, Y \in T_Q M$ . При  $k = 1$  это преобразование является изометрией.

Группа, состоящая из подобий многообразия  $(M, g)$ , называется *несущественной*, если она является группой изометрий для некоторой метрики  $\tilde{g}$  на  $M$ , конформно эквивалентной  $g$ .

Если многообразие  $(M, g)$  допускает существенную однопараметрическую группу подобий  $\{f_t\}, t \in \mathbf{R}$ , то оно называется *самоподобным*. Цель данной работы: найти левоинвариантную лоренцеву метрику на одной специальной трёхмерной группе Ли, вместе с которой оно является самоподобным однородным многообразием, а также найти формулы, по которым действует полная группа подобий построенного многообразия. Также мы найдём матричное представление полной группы подобий и дадим этой группе алгебраическую характеристику.

**Материал и методы.** Рассматривается специальная трёхмерная неунимодулярная связная односвязная группа Ли, на которой мы строим левоинвариантную лоренцеву метрику. Используются методы теории групп и алгебр Ли.

## Результаты и их обсуждение.

**1. Постановка задачи и обзор результатов.** Пусть  $G$  — произвольная группа Ли, а  $\mathcal{G}$  — соответствующая ей алгебра Ли  $\mathcal{G}$ , которую мы трактуем как касательное пространство к  $G$  в единичном элементе группы Ли. Невырожденное скалярное произведение (евклидово или лоренцево) в алгебре Ли  $\mathcal{G}$  однозначно определяет левоинвариантный метрический тензор  $g$  на группе Ли  $G$ . Для того, чтобы доказать, что получившееся многообразие является самоподобным, мы построим однопараметрическую группу подобий  $\{f_t\}, t \in \mathbf{R}$ , имеющую неподвижную точку — единичный элемент группы Ли. В таком случае эта группа подобий называется *сильно существенной*: умножение метрического тензора на любую функцию не может превратить эту группу в группу изометрий.

Группа Ли  $G$  называется экспоненциальной, если экспоненциальное отображение  $\exp: \mathcal{G} \rightarrow G$  является биективным. В таком случае для построения сильно существенной однопараметрической группы подобий группы Ли мы можем использовать однопараметрическую группу автоподобий  $\{F_t\}, t \in \mathbf{R}$  соответствующей алгебры Ли  $\mathcal{G}$  (см. [1]).

Для построения полной группы подобий найденного многообразия мы используем тот факт, что любое подобие  $f: G \rightarrow G$  группы Ли  $(G, g)$  является композицией одного из преобразований  $\{f_t\}$  и левого сдвига на произвольный элемент группы Ли.

Самоподобное однородное многообразие трёхмерной группы Ли Гейзенберга  $H_3$  было построено в работе [1]. В [2] и [3] были построены такие многообразия для двумерной группы Ли  $A^+(1)$  и трёхмерной группы Ли  $A^+(1) \times \mathbf{R}$  (здесь  $A^+(1)$  — группа аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию прямой).

Оказалось (см. [4]), что на четырёхмерной алгебре Ли  $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{A}(1)$  (IV типа Бианки) невозможно задать скалярное произведение так, чтобы эта алгебра Ли допускала автоподобия. Однако она допускает однопараметрическую группу автоизометрий для подходящего лоренцевого скалярного произведения. Этот результат позволил доказать в [5], что невозможно построить левоинвариантную лоренцеву метрику на группе Ли  $A^+(1) \times A^+(1)$ . При этом можно построить единственную с точностью до изометрии левоинвариантную лоренцеву метрику на  $A^+(1) \times A^+(1)$  так, чтобы полная группа изометрий получилась пятимерной (в остальных случаях она является четырёхмерной).

Наиболее интересные результаты были получены в [6] и [7]. В [6] было показано, что для четырёхмерной группы Ли  $H_3 \times \mathbf{R}^+$  существуют три неизометричных однородных самоподобных лоренцевых многообразия (в отличие от трёхмерного случая — группы Ли  $H_3$ ). Позже Ю. Шпаковой была создана рабочая книга Excel [8] для вычисления тензора кривизны левоинвариантных метрик на четырёхмерных группах Ли. С её помощью мы показали, что среди трёх указанных выше многообразий только одно является плоским. В [7] было построено самоподобное лоренцево многообразие группы Ли  $SE(2) \times \mathbf{R}^+$ . Оказалось, что оно относится к одному интересному классу многообразий, рассмотренному в [9]. Построенное многообразие является неодносвязным и имеет существенную однопараметрическую группу подобий, обладающую изотропной орбитой.

**2. Специальная трёхмерная алгебра Ли и её группа Ли.** Алгебра Ли  $\mathcal{G}$  называется *унимодулярной*, если след оператора  $\text{ad}(X): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  равен нулю для любого вектора  $X \in \mathcal{G}$ . Согласно классификации, изложенной в обзоре Дж. Милнора [10], существует только шесть трёхмерных унимодулярных алгебр Ли и бесконечное число неунимодулярных. Оказывается, что среди шести унимодулярных алгебр Ли есть ровно две разрешимые. В классе трёхмерных алгебр Ли неунимодулярность влечёт разрешимость.

Для любой разрешимой трёхмерной алгебры Ли идеал  $\mathcal{L} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$  является двумерным и коммутативным. В случае, когда  $\mathcal{G}$  — неунимодулярная алгебра Ли, этот идеал представляет собой её унимодулярное ядро (т.е. для любого  $X \in \mathcal{L}$  выполнено  $\text{trace ad}(X) = 0$ ). Операция скобки в трёхмерной неунимодулярной алгебре Ли полностью определяется матрицей линейного преобразования  $\text{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ , если базис  $(E_1, E_2, E_3)$  выбран таким образом, что  $(E_2, E_3) \in \mathcal{L}$ . Если эту матрицу за счёт выбора нового базиса привести к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad (1)$$

то значение  $D$  определяет алгебру Ли однозначно с точностью до изоморфизма.

Однако привести матрицу преобразования  $\text{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  к виду (1) можно не для любой трёхмерной неунимодулярной алгебры Ли. Существует один специальный случай, когда это преобразование  $\text{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  пропорционально тождественному. Тогда матрицу указанного преобразования можно привести к виду единичной матрицы.

Мы такую алгебру Ли обозначим  $\mathcal{S}_3$  и будем её называть *специальной*. Она относится к V типу Бианки. Связную односвязную группу Ли, которая соответствует алгебре Ли  $\mathcal{S}_3$ , мы будем обозначать  $S_3$  и тоже будем называть *специальной*. При подходящем выборе базиса  $(E_1, E_2, E_3) \in \mathcal{S}_3$  коммутационные в алгебре Ли  $\mathcal{S}_3$  соотношения определяются равенствами

$$[E_1, E_2] = E_2, [E_1, E_3] = E_3, [E_2, E_3] = \vec{0}. \quad (2)$$

Любой базис, в котором коммутационные соотношения имеют такой вид, мы назовём *каноническим*.

В [11] найдены матричные представления алгебры Ли  $\mathcal{S}_3$  и соответствующей связной односвязной группы Ли  $S_3$ :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & u_1 & 0 & u_3 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} \text{ch } x_1 & 0 & \text{sh } x_1 & x_2 \\ 0 & e^{x_1} & 0 & x_3 \\ \text{sh } x_1 & 0 & \text{ch } x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введём в  $\mathcal{S}_3$  и  $S_3$  естественные координаты, приписав указанным матрицам координаты  $(u_1, u_2, u_3)$  и  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $u_i \in \mathbf{R}$ ,  $x_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Канонический базис составляют векторы (они же матрицы) с координатами  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ .

В этой же работе [11] выписаны общие формулы любого автоморфизма рассматриваемой алгебры Ли в каноническом базисе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & a_{22} & a_{23} \\ \beta & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}, a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \neq 0.$$

Также были найдены координатные записи групповой операции и операции нахождения обратного элемента

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + y_1, y_2 e^{x_1} + x_2, y_3 e^{x_1} + x_3), \\ (x_1, x_2, x_3)^{-1} &= (-x_1, e^{-x_1} x_2, e^{-x_1} x_3) \end{aligned} \quad (3)$$

в естественных координатах. Группа Ли  $S_3$  является экспоненциальной, а экспоненциальное отображение  $\exp: \mathcal{S}_3 \rightarrow S_3$  биективно. Оно задаётся в естественных координатах формулами:

$$\exp(u_1, u_2, u_3) = \left( u_1, \frac{u_2}{u_1}(e^{u_1} - 1), \frac{u_3}{u_1}(e^{u_1} - 1) \right).$$

Обратное к нему отображение  $\exp^{-1}: S_3 \rightarrow S_3$  действует по формулам:

$$\exp^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left( x_1, \frac{x_1 x_2}{(e^{x_1} - 1)}, \frac{x_1 x_3}{(e^{x_1} - 1)} \right).$$

**3. Однопараметрическая группа подобий.** Если два многообразия, построенные на одной группе Ли, изометричны, то соответствующие левоинвариантные метрики мы относим к одному классу. Следующая теорема была доказана в [12], и мы приведём только схему доказательства.

**Теорема 1.** *Группа Ли  $S_3$  допускает единственный класс левоинвариантных лоренцевых метрик, превращающих её в самоподобное многообразие. Если выбрать естественные координаты на группе Ли  $S_3$ , то для любой метрики из данного класса метрический тензор такой метрики представляется матрицей*

$$[g(X)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{-x_1} \\ 0 & e^{-2x_1} & 0 \\ -e^{-x_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

При этом сильно существенная однопараметрическая группа подобий, оставляющая неподвижным единичный элемент группы Ли, действует по формулам

$$\begin{cases} x'_1 = x_1, \\ x'_2 = e^{\mu t} x_2, \\ x'_3 = e^{2\mu t} x_3, \end{cases} t \in \mathbf{R}, \mu > 0. \quad (5)$$

**Доказательство.** Будем использовать обозначения:  $[A]$  — матрица преобразования  $A$ ,  $[g(X)]$  — матрица метрического тензора  $g(X)$ ,  $X \in S_3$ ,  $E$  — единичный элемент группы Ли  $S_3$  (единичная матрица).

Согласно результатам работы [13] необходимым и достаточным условием существования однопараметрической группы автоподобий трёхмерной разрешимой алгебры Ли является вырожденность скалярного произведения, индуцированного на её коммутативном идеале  $\mathcal{L}$ . При выполнении этого условия векторное пространство  $\mathcal{L}$  является касательным к конусу изотропных векторов, в интерпретации алгебры Ли, как точечного пространства Минковского.

Зададим в алгебре Ли  $S_3$  именно такое лоренцево скалярное произведение. Выберем вектор  $E_3$  принадлежащим единственному изотропному направлению в идеале  $\mathcal{L}$ . С помощью автоморфизма алгебры Ли можно добиться, чтобы вектор  $E_1$  в каноническом базисе был изотропным, и  $E_1 \cdot E_3 = -1$ . Тогда матрица Грама скалярного произведения имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(этого можно добиться с помощью автоморфизма алгебры Ли). Расположение идеала  $\mathcal{L}$  и базисных векторов относительно конуса изотропных векторов показано на рис.

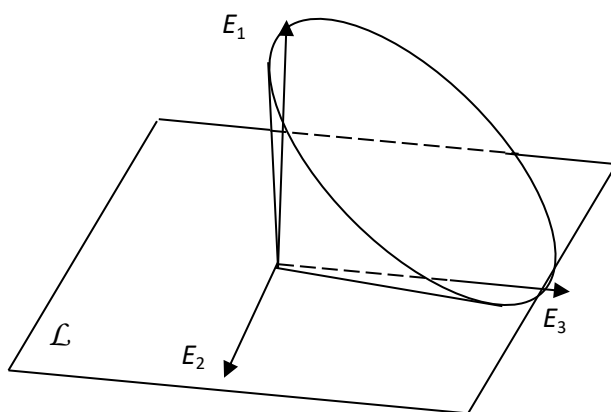


Рис. Расположение базисных векторов

Нетрудно показать, что в этом случае существует единственная (с точностью до автоморфизма) однопараметрическая группа автоподобий алгебры Ли  $S_3$ :

$$[F_t] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, \mu > 0.$$

За счёт замены параметра мы можем получить любое значение  $\mu \neq 0$  (в том числе и  $\mu = 1$ ), поэтому две однопараметрические группы с разным значением  $\mu \neq 0$  изоморфны.

Находим матрицу дифференциала левого сдвига  $(L_X)_* : T_Y G_3 \rightarrow T_{XY} G_3$  и обратную к ней матрицу:

$$[(L_X)_*] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_1} \end{pmatrix}, W = [(L_X)_*]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x_1} \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением по формуле

$$[g(X)] = W^T(X) \Gamma W(X)$$

находим матрицу метрического тензора  $g$  в точке  $X(x_1, x_2, x_3)$ . Получается матрица (3).

Непосредственным вычислением по формуле

$$f_t = \exp \circ F_t \circ \exp^{-1}, t \in \mathbf{R}$$

строим сильно существенную однопараметрическую группу подобий, под действием которой единичный элемент группы Ли остаётся неподвижным. Находим, что преобразования  $f_t$  действуют по формулам (5).

Доказательство того, что полученные преобразования представляют собой подобию при любом  $t \in \mathbf{R}$ , можно найти в [12]. Для этого нужно установить, что  $[(f_t)^* g(X)] = e^{-2\mu t} [g(X')]$ , где  $X' = f_t(X)$ . Эта группа является сильно существенной: её дифференциал  $((f_t)_E)_*$  в неподвижной точке не является изометрией при всех  $t \neq 0$ .

#### 4. Полная группа подобий и её матричное представление.

**Теорема 2.** Преобразования, образующие полную группу подобий многообразия  $(S_3, g)$ , действуют в естественных координатах согласно следующим формулам:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + h_1, \\ x'_2 = e^{\mu t + h_1} x_2 + h_2, \\ x'_3 = e^{2\mu t + h_1} x_3 + h_3, \end{cases} \quad (6)$$

где  $t \in \mathbf{R}, \mu > 0, h_1, h_2, h_3 \in \mathbf{R}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Произвольное подобие построенного нами многообразия  $(S_3, g)$  можно получить в результате композиции некоторого преобразования из группы  $\{f_t\}, t \in \mathbf{R}$  (см. теорему 1) и левого сдвига на некоторый элемент  $H(h_1, h_2, h_3)$  группы Ли  $S_3, h_1, h_2, h_3 \in \mathbf{R}$ .

Формулы, которыми задаётся левый сдвиг в естественных координатах, имеют вид:

$$L_H(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + h_1, x_2 e^{h_1} + h_2, x_3 e^{h_1} + h_3). \quad (7)$$

Мы составляем композицию преобразований, действующих по формулам (5) и (7). В результате получаем формулы (6). ■

Обозначим полную группу подобий построенного многообразия  $FH(S_3)$ . Найдём матричное представление этой группы. Произвольный элемент  $X(x_1, x_2, x_3) \in S_3$  мы будем представлять как столбец  $[X] = (x_1, 1, x_2, x_3, 1)^T$ . Рассмотрим произведение матриц:

$$[H][X] = \begin{pmatrix} 1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t + h_1} & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t + h_1} & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + h_1 \\ 1 \\ e^{\mu t + h_1} x_2 + h_2 \\ e^{2\mu t + h_1} x_3 + h_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получившийся столбец  $[X']$  соответствует элементу  $X'(x'_1, x'_2, x'_3)$ , который находится по формулам (6). Мы доказали, что группу  $FH(S_3)$  можно представить как состоящую из матриц указанного выше вида  $[H]$ . Тому преобразованию, которое задаётся матрицей  $[H]$ , мы поставим в соответствие координаты  $(t_1, h_1, h_2, h_3)$ .

Найдём координатную запись групповой операции в группе  $FH(S_3)$ . Рассмотрим два произвольных элемента группы  $FH(S_3)$ . Пусть  $(t_1, h_1, h_2, h_3)$  и  $(t_2, g_1, g_2, g_3)$  — это их координаты. Вычислим произведение соответствующих данным элементам матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t_1 + h_1} & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t_1 + h_1} & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t_2 + g_1} & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t_2 + g_1} & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & g_1 + h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu(t_1 + t_2) + h_1 + g_1} & 0 & e^{\mu t_1 + h_1} g_2 + h_2 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu(t_1 + t_2) + h_1 + g_1} & e^{2\mu t_1 + h_1} g_3 + h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, групповая операция записывается в координатах так:

$$(t_1, h_1, h_2, h_3) \cdot (t_2, g_1, g_2, g_3) = (t_1 + t_2, h_1 + g_1, e^{\mu t_1 + h_1} g_2 + h_2, e^{2\mu t_1 + h_1} g_3 + h_3).$$

**5. Алгебраическая характеристика полной группы подобий.** Рассмотрим две коммутативные группы  $G_1$  и  $G_2$ , координаты двух элементов в первой из которых будем обозначать  $(t_1, h_1)$ ,  $(t_2, g_2)$ , а во второй —  $(h_2, h_3)$  и  $(g_2, g_3)$ . Групповые операции:

$$(t_1, h_1) * (t_2, g_2) = (t_1 + t_2, h_1 + g_2) \text{ и } (h_2, h_3) * (g_2, g_3) = (g_2 + h_2, g_3 + h_3).$$

Рассмотрим оператор  $\varphi[t_1, h_1]$ , действующий на группе  $G_2$  по формуле

$$\varphi[t_1, h_1](g_2, g_3) = (e^{\mu t_1 + h_1} g_2, e^{2\mu t_1 + h_1} g_3)$$

Легко убедиться, что

$$\varphi[t_1, h_1]((h_2, h_3) * (g_2, g_3)) = (\varphi[t_1, h_1](h_2, h_3)) * (\varphi[t_1, h_1](g_2, g_3)).$$

Поэтому  $\varphi[t, h_1] : G_2 \rightarrow G_2$  есть автоморфизм.

Это позволяет переписать групповую операцию в  $FH(S_3)$  с помощью автоморфизма так:

$$(t_1, h_1, h_2, h_3) * (t_2, g_1, g_2, g_3) = ((t_1, h_1) * (t_2, g_2), (h_2, h_3) * \varphi[t_1, h_1](g_2, g_3)).$$

При этом следует ещё отметить, что отображение  $\varphi : G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$ , сопоставляющее элементу  $(t_1, h_1) \in G_1$  автоморфизм  $\varphi[t_1, h_1]$ , есть гомоморфизм (в группе  $\text{Aut}(G_2)$ , естественно, используется операция композиции отображений). Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi[(t_1, h_1) * (t_2, g_1)](g_2, g_3) &= (e^{\mu(t_1 + t_2) + h_1 + h_2} g_2, e^{2\mu(t_1 + t_2) + h_1 + h_2} g_3) = \\ &= \varphi[t_1, h_1](\varphi[t_2, g_1](g_2, g_3)) = \varphi[t_2, g_1](\varphi[t_1, h_1](g_2, g_3)). \end{aligned}$$

Как результат, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Полная группа подобий  $FH(S_3)$  построенного нами однородного самоподобного многообразия  $(S_3, g)$  является полупрямым произведением двух двумерных коммутативных групп  $G_2 \rtimes_{\varphi} G_1$ .

**Заключение.** Мы построили самоподобное лоренцево многообразие специальной неунимодулярной трёхмерной группы Ли, нашли её полную группу подобий и дали этой группе алгебраическую характеристику. Наша ближайшая задача: исследовать четырёхмерную группу Ли  $\mathbf{R}^+ \times S_3$  ( $\mathbf{R}^+$  — группа положительных действительных чисел с операцией умножения) с целью найти на ней все классы левоинвариантных лоренцевых метрик, при которых эта группа Ли является однородным самоподобным многообразием.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Подоксёнов, М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой / М.Н. Подоксёнов // Вестник Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. — 2011. — № 5(65). — С. 10–15.
2. Подоксёнов, М.Н. Самоподобные однородные двумерное и трёхмерное лоренцевы многообразия / М.Н. Подоксёнов // Вестник Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. — 2018. — № 2(99). — С. 14–19.
3. Подоксёнов, М.Н. Самоподобное однородное лоренцево многообразие трёхмерной группы Ли / М.Н. Подоксёнов, А.Н. Кабанов // Наука — образованию, производству, экономике: материалы XXIV(71) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 14 февр. 2019 г.: в 2 т. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. — Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. — Т. 1. — С. 18–20.
4. Подоксёнов, М.Н. Автоизометрии четырёхмерной алгебры Ли IV типа Бианки / М.Н. Подоксёнов, Е.А. Иванова // Математические структуры и моделирование. — 2021. — № 2(58). — С. 28–36.
5. Подоксёнов, М.Н. Максимальная группа изометрий лоренцевой группы Ли  $A^+(1) \times A^+(1)$  / М.Н. Подоксёнов, Я.В. Гороя / Математические структуры и моделирование. — 2022. — № 2(62). — С. 154–162.
6. Подоксёнов, М.Н. Четырёхмерные самоподобные однородные многообразия группы Ли  $HS \times R^+$  / М.Н. Подоксёнов, А.К. Гуц // Вестник Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. — 2022. — № 1. — С. 5–10.
7. Подоксёнов, М.Н. Самоподобное однородное лоренцево многообразие группы Ли  $SE(2) \times R^+$  / М.Н. Подоксёнов, Ю.А. Шпакова // Математические структуры и моделирование. — 2023. — № 1(65). — С. 46–54.
8. Подоксёнов, М.Н. Тензор кривизны самоподобных лоренцевых многообразий некоторых четырёхмерных групп Ли / М.Н. Подоксёнов, Ю.А. Шпакова // Математические структуры и моделирование. — 2023. — № 3(67). — С. 16–22.
9. Подоксёнов, М.Н. Лоренцево многообразие с однопараметрической группой гомотетий имеющей замкнутую изотропную орбиту / М.Н. Подоксёнов // Сибирский математический журнал. — 1990. — Т. 30, № 5. — С. 771–773.
10. Milnor, J. Curvatures of left-invariant metrics on Lie groups / J. Milnor // Advances Mathematics. — 1976. — Vol. 21. — P. 293–329.
11. Подоксёнов, М.Н. Полная группа изометрий специальной трёхмерной группы Ли / М.Н. Подоксёнов, Г. Ян // Математические структуры и моделирование. — 2024. — № 3(71). — С. 33–43.
12. Подоксёнов, М.Н. Самоподобное лоренцево многообразие одной специальной трёхмерной группы Ли / М.Н. Подоксёнов, Н.С. Герасимович // Омская конференция по геометрии и её приложениям, Омск, 13–16 окт. 2025 г. — Омск: Издательство Омского государственного университета им. Ф.М. Достоевского, 2025. — С. 50–53.
13. Подоксёнов, М.Н. Гомотетические автоморфизмы трёхмерных алгебр Ли / М.Н. Подоксёнов // Учёные записки УО «ВГУ им. П.М. Машерова»: сб. науч. тр. — Витебск, 2009. — Т. 8. — С. 203–211.

## REFERENCES

1. Podoksenov M.N. *Vesnik Vitsebskaga dziazhaunaga universiteta* [Journal of Vitebsk State University], 2011, 5(65), pp. 10–15.
2. Podoksenov M.N. *Vesnik Vitsebskaga dziazhaunaga universiteta* [Journal of Vitebsk State University], 2018, 2(99), pp. 14–19.
3. Podoksenov M.N., Kabanov A.N. *Nauka — obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike: materialy XXIV (71) Region. nauch.-prakt. konf. prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 14 fevr. 2019 g.: v 2 t.* [Science for Education, Industry, Economy: Proceedings of the 24<sup>th</sup> (71 Regional Scientific and Practical Conference of Teachers, Researchers and Postgraduate Students, Vitebsk, February 14, 2019: in 2 Volumes], Vitebsk: VGU imeni P.M. Masherova, 2019, 1, pp. 18–20.
4. Podoksenov M.N., Ivanova E.A. *Matematicheskiye struktury i modelirovaniye* [Mathematical Structures and Modeling], 2021, 2(58), pp. 28–36.
5. Podoksenov M.N., Gorovaya Ya.V. *Matematicheskiye struktury i modelirovaniye* [Mathematical Structures and Modeling], 2022, 2(62), pp. 154–162.
6. Podoksenov M.N. *Vesnik Vitsebskaga dziazhaunaga universiteta* [Bulletin of Vitebsk State University], 2022, 1, pp. 5–10.
7. Podoksenov M.N., Shpakova Yu.A. *Matematicheskiye struktury i modelirovaniye* [Mathematical Structures and Modeling], 2023, 1(65), pp. 46–54.
8. Podoksenov M.N., Shpakova Yu.A. *Matematicheskiye struktury i modelirovaniye* [Mathematical Structures and Modeling], 2023, 3(67), pp. 16–22.
9. Podoksenov M.N. *Sibirski matematicheski zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1990, 5(30), pp. 771–773.
10. Milnor, J. Curvatures of left-invariant metrics on Lie groups / J. Milnor // *Advances Mathematics*. — 1976. — Vol. 21. — P. 293–329.
11. Podoksenov M.N., Yang G. *Matematicheskiye struktury i modelirovaniye* [Mathematical Structures and Modeling], 2024, 3(71), pp. 33–43.
12. Podoksenov M.N., Gerasimovich N.S. *Omskaya konferentsiya po geometrii i yeyo prilozheniyam, Omsk, 13–16 okt. 2025 g.* [Omsk Conference on Geometry and its Applications, Omsk, October 13–16, 2025], Omsk: Izdatelstvo Omskogo gosudarstvennogo universiteta im. F.M. Dostoyevskogo, 2025, pp. 50–53.
13. Podoksenov M.N. *Ucheniye zapiski UO "VGU im. P.M. Masherova": sb. nauch. tr.* [Scientific Notes of Vitebsk State P.M. Masherov University], Vitebsk, 2009, 8, pp. 203–211.

Поступила в редакцию 10.03.2026

Address for correspondence: e-mail: michael.vitebsk@gmail.com — Подоксёнов М.Н.