Ученые записки • УО «ВГУ им. П.М. Машерова»
Естественные науки • Математика Том 8 • 2009

УДК 514.764.2 + 512.81

Гомотетические автоморфизмы трехмерных алгебр Ли

М.Н. Подоксёнов

Пусть на алгебре Ли $\mathcal{G}$ введено евклидово или лоренцево скалярное произведение. Преобразование $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется автоподобием, если оно одновременно является автоморфизмом алгебры Ли и подобием относительно введенного скалярного произведения. В данной работе найдены все автоподобия для разрешимых и нильпотентных трехмерных алгебр Ли, на которых введено лоренцево скалярное произведение сигнатуры $(+,+,-)$.

§1. *Постановка задачи*

Преобразование алгебры Ли $f: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ называется автоморфизмом, если оно сохраняет операцию скобки: $[fX, fY] = f[X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}$. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle , \rangle$. Тогда преобразование $f: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ называется подобием с коэффициентом e^{μ}, если $\langle fX, fY\rangle = e^{2\mu}\langle X, Y\rangle \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}$. В случае $\mu = 0$ преобразование f называется изометрией.

Преобразование, являющееся одновременно подобием и автоморфизмом, будем называть автоподобием. Преобразование, являющееся изометрией и автоморфизмом, будем называть автоизометрией. Решение задачи о существовании автоподобий для алгебр Ли тесно связано с решением задачи о существовании гомотетических преобразований для однородных пространств групп Ли, снабженных левоинвариантной метрикой.

В данной работе мы найдем все автоподобия для разрешимых и нильпотентных трехмерных алгебр Ли, на которых введено лоренцево скалярное произведение сигнатуры $(+,+,-)$.

§2. *О классификациях трехмерных алгебр Ли*

Автору известны две классификации трехмерных алгебр Ли: по типам Бианки [1] и классификация, изложенная в обзоре Дж. Милнора [2]. Вторая классификация менее известна. Кратко изложим ее суть.

Каждый вектор $Y \in \mathcal{G}$ определяет линейное отображение $\mathrm{ad}(Y): \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ по формуле $\mathrm{ad}(Y)X = [Y, X]$. Алгебра Ли $\mathcal{G}$ называется унимодулярной, если $\mathrm{trace}\ \mathrm{ad}(Y) = 0$ $\forall Y \in \mathcal{G}$. Пусть в унимодулярной алгебре Ли задано евклидово скалярное произведение векторов. Тогда, согласно [2], в ней существует ортонормированный базис $\{E_1, E_2, E_3\}$, в котором коммутационные соотношения имеют вид

$$[E_2, E_3] = \lambda_1 E_1, \ [E_3, E_1] = \lambda_2 E_2, \ [E_1, E_2] = \lambda_3 E_3. \tag{1}$$

Назовем этот вид диагональным. В соответствии с набором знаков $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ можно выделить шесть неизоморфных унимодулярных алгебр Ли.

1. $\mathcal{R}^3$: $(0,0,0)$ – алгебра Ли коммутативной группы векторов $\boldsymbol{R}^3$;
2. $\mathcal{Hs}$: $(+,0,0)$ – алгебра Ли группы Гейзенберга Hs;
3. $\mathcal{E}(2)$: $(+,+,0)$ – алгебра Ли группы $E(2)$ движений евклидовой плоскости;
4. $\mathcal{E}(1,1)$: $(+,-,0)$ – алгебра Ли группы $E(1,1)$ движений плоскости Минковского;
5. $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$: $(+,+,-)$ – алгебра Ли группы $SL(2,\boldsymbol{R})$;
6. $\mathcal{SO}(3)$: $(+,+,+)$ – алгебра Ли группы $SO(3)$ всех вращений трехмерного евклидова пространства.

Это алгебры Ли (в том же порядке) I, II типов Бианки, подтипов VII_0 и VI_0, типов VIII и IX. Если не требовать, чтобы базис был ортонормированным, можно считать, что все ненулевые λ_i по модулю равны 1.

Если алгебра Ли неунимодулярна, то она содержит унимодулярное ядро $\mathcal{L}=\{X\in\mathcal{G} \mid \operatorname{trace}\operatorname{ad}(X)=0\}$. Оно является коммутативным идеалом размерности 2. Каждый вектор $Y\notin\mathcal{L}$ определяет линейное отображение $\operatorname{ad}(Y)|_{\mathcal{L}}:\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}$. Выберем $Y\notin\mathcal{L}$ так, чтобы $\operatorname{trace}\operatorname{ad}(Y)|_{\mathcal{L}}=2$. Тогда, если отбросить исключительный случай $\operatorname{ad}(Y)|_{\mathcal{L}}=\mathrm{id}_{\mathcal{L}}$ (V тип Бианки), то определитель $D=\det\operatorname{ad}(Y)|_{\mathcal{L}}$ будет полным изоморфным инвариантом алгебры Ли.

Случай $D=0$ соответствует алгебре Ли $\mathcal{A}(1)\times\mathcal{R}$ (III тип Бианки), где $\mathcal{A}(1)$ – алгебра Ли группы аффинных преобразований прямой, $\mathcal{R}$ – одномерная алгебра Ли. Случай $D=1$ соответствует алгебре Ли IV типа Бианки, $D>1$ – алгебрам Ли VII типа Бианки, $D\in(-\infty,0)\cup(0,1)$ – алгебрам Ли VI типа Бианки.

§3. *Автоподобия алгебры Ли* II *типа Бианки*

Существует с точностью до изоморфизма только одна трехмерная нильпотентная алгебра Ли. Это алгебра Ли $\mathcal{Hs}$ группы Ли Гейзенберга Hs. Группа Hs состоит из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали:

$$Y=\begin{pmatrix}1 & y^2 & y^1\\ 0 & 1 & y^3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Операция в группе – это обычное умножение матриц. Алгебра Ли $\mathcal{Hs}$ этой группы состоит из матриц вида

$$X=\begin{pmatrix}0 & x^2 & x^1\\ 0 & 0 & x^3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

В алгебре Ли $\mathcal{Hs}$ можно выбрать базис $\{E_1,E_2,E_3\}$, где

$$E_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда операция скобки будет задаваться одним равенством $[E_2,E_3]=E_1$ (остальные произведения равны нулевому вектору). Любой базис, в котором операция скоби имеет такой вид, будем называть каноническим. Одномерное подпространство $\mathcal{Z}=\boldsymbol{R}E_1$ представляет собой центр алгебры Ли $\mathcal{H}s$. Канонический вид матрицы скалярного произведения зависит от того, является ли центр $\mathcal{Z}$ времениподобным, пространственноподобным или изотропным (см. [3]).

***Теорема* 1.** *Пусть на алгебре Ли $\mathcal{H}s$ задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры* (+,+,–). Тогда *$\mathcal{H}s$ допускает автоподобия, тогда и только тогда, когда центр $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathcal{H}s$ является изотропным. Все автоподобия в подходящем каноническом базисе задаются одной из формул*

$$\begin{cases} E_1' = e^{3\nu t}E_1, \\ E_2' = \pm e^{2\nu t}E_2, \\ E_3' = \pm e^{\nu t}E_3. \end{cases} \quad (2.1) \qquad \begin{cases} E_1' = -e^{3\nu t}E_1, \\ E_2' = \pm e^{2\nu t}E_2, \\ E_3' = \mp e^{\nu t}E_3. \end{cases} \quad (2.2)$$

ν=const, $t\in\boldsymbol{R}$. *При этом матрица скалярного произведения имеет вид*

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon>0. \qquad (3)$$

Преобразования (2.1) *со знаком* «+» *образуют однопараметрическую группу преобразований.*

Доказательство. Любой автоморфизм алгебры Ли $\mathcal{H}s$ должен оставлять инвариантным центр $\mathcal{Z}$. Разобьем автоморфизмы на два типа:

1) автоморфизмы, которые сохраняют направление центра;

2) автоморфизмы, которые меняют направление центра.

В работе [3] доказано, что матрица $\boldsymbol{\Gamma}=(g_{ij})$ скалярного произведения в $\mathcal{H}s$ с помощью автоморфизмов алгебры Ли может быть приведена к диагональному виду

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix},$$

в том случае, когда центр $\mathcal{Z}$ не является изотропным; при этом, $g_{11}\neq 0$, $g_{22}=\pm 1$, $g_{33}=\pm 1$.

1. Пусть центр $\mathcal{Z}$ является времениподобным. Рассматриваемому случаю соответствуют значения $g_{11}<0$, $g_{22}=g_{33}=1$.

Предположим, что подобие $A:\mathcal{H}s\longrightarrow\mathcal{H}s$ является автоморфизмом первого типа. Тогда A может быть только композицией вращения вокруг центра и гомотетии, т.е. все такие преобразования описываются формулами

$$E_1' = e^{\mu}E_1,\ E_2' = e^{\mu}(E_2\cdot\cos\alpha + E_3\cdot\sin\alpha),\ E_3' = e^{\mu}(-E_2\cdot\sin\alpha + E_3\cdot\cos\alpha), \qquad (4)$$

μ=const, $\alpha\in\boldsymbol{R}$. Обозначим такое преобразование $e^{\mu}A_{\alpha}$. Находим, что

$$[E_2', E_3'] = e^{2\mu}\cos^2\alpha[E_2, E_3] - e^{2\mu}\sin^2\alpha[E_3, E_2] = e^{2\mu}E_1 = e^{\mu}E_1'.$$

Значит, $e^{\mu}A_{\alpha}:\mathcal{H}s\longrightarrow\mathcal{H}s$, является автоморфизмом только в случае $\mu=0$. Поэтому $\mathcal{H}s$ допускает автоизометрии, но не допускает автоподобий.

Заметим, что алгебра Ли $\mathcal{H}s$ допускает еще автоизометрии вида

$$S_2\colon\ E_1' = -E_1,\ E_2' = E_2,\ E_3' = -E_3 \quad \text{и} \quad S_3\colon E_1' = -E_1,\ E_2' = -E_2,\ E_3' = E_3. \tag{5}$$

Любое автоподобие второго типа можно представить в виде композиции $S_2\circ(e^{\mu}A_{\alpha})$. Поэтому такие автоподобия возможны только при $\mu = 0$, а значит они тоже являются автоизометриями.

2. Пусть центр $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathcal{H}s$ является пространственноподобным. Данному случаю соответствуют значения $g_{11}>0$, $g_{22}=-1$, $g_{33}=1$. Предположим, что подобие является автоморфизмом первого типа. Тогда оно является композицией гиперболического вращения вокруг центра и гомотетии, т.е. оно действует по формулам

$$E_1' = e^{\mu} E_1,\ \ E_2' = \pm e^{\mu}(E_2\cdot \mathrm{ch}t + E_3\cdot \mathrm{sh}t),\ \ E_3' = \pm e^{\mu}(E_2\cdot \mathrm{sh}t + E_3\cdot \mathrm{ch}t). \tag{6}$$

Находим, что

$$[E_2', E_3'] = e^{2\mu}\mathrm{ch}^2t[E_2, E_3] - e^{2\mu}\mathrm{sh}^2t[E_3, E_2] = e^{2\mu}E_1 = e^{\mu}E_1'.$$

Мы приходим к выводу, что преобразования (6) являются автоморфизмами только в случае $\mu=0$. Поэтому они являются изометриями. Любой автоморфизм второго типа можно представить в виде композиции преобразования (6) и одного из преобразований (5). Поэтому среди них тоже не может быть подобий.

3. Пусть центр $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathcal{H}s$ является изотропным. Тогда операция скобки и матрица скалярного произведения в $\mathcal{H}s$ с помощью автоморфизмов могут быть приведены соответственно к виду $[V_2, V_3] = \lambda V_1$, $\lambda>0$ и

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Согласно [5] любое подобие первого типа задается одной из формул

$$\begin{cases} V_1' = e^{(\mu+\nu)t}V_1, \\ V_2' = \pm e^{\mu t}V_2, \\ V_3' = \pm e^{(\mu-\nu)t}V_3, \end{cases} \tag{8.1}$$

$$\begin{cases} V_1' = e^{\mu t}V_1, \\ V_2' = \pm e^{\mu t}(tV_1 + V_2), \\ V_3' = \pm e^{\mu t}((t^2/2)V_1 + tV_2 + V_3), \end{cases} \tag{8.2}$$

где $\mu=\mathrm{const}$, $\nu=\mathrm{const}$, $t\in\boldsymbol{R}$. Для преобразований вида (8.1) находим, что

$$[V_2', V_3'] = e^{\mu t}e^{(\mu-\nu)t}[V_2, V_3] = e^{(2\mu-\nu)t}\lambda V_1 = e^{(2\mu-\nu)t}e^{-(\mu+\nu)t}\lambda V_1' = e^{(\mu-2\nu)t}\lambda V_1'.$$

Мы видим, такое преобразование будет автоморфизмом только при $(\mu-2\nu)t=0$. Случай $t=0$ соответствует тождественному преобразованию. Значит при $\mu=2\nu$ формулы (8.1) задают автоподобие алгебры Ли $\mathcal{H}s$, с коэффициентом $e^{\mu t}$.

Для преобразований вида (8.2) имеем

$$[V_2', V_3'] = e^{2\mu t}[V_2, V_3] = e^{2\mu t}\lambda V_1 = e^{\mu t}\lambda V_1'.$$

Значит, формулы (8.2) не задают автоморфизма кроме случая $t=0$.

Итак, только в случае изотропного центра алгебра Ли $\mathcal{H}s$ допускает однопараметрическую группу автоподобий U_t, действующую по формулам

$$V_1' = e^{3\nu t}V_1,\ \ V_2' = e^{2\nu t}V_2,\ \ V_3' = e^{\nu t}V_3.\ \ \nu=\mathrm{const},\ \ t\in\boldsymbol{R}.$$

А также она допускает автоподобия W_t вида

$$V_1' = e^{3\nu t}V_1,\ \ V_2' = -e^{2\nu t}V_2,\ \ V_3' = -e^{\nu t}V_3.\ \ \nu=\mathrm{const},\ \ t\in\boldsymbol{R}.$$

Заменим теперь базис $\{V_1, V_2, V_3\}$ на $\{V_1, \varepsilon^{1/2}V_2, V_3\}$, $\varepsilon=\lambda^{-2}$, который обозначим как $\{E_1, E_2, E_3\}$. В этом базисе операция скобки имеет канонический вид, матрица скалярного произведения имеет вид (3), а преобразования U_t и W_t будут действовать по прежним формулам, т.е. (2.1).

Любое автоподобие второго типа алгебры Ли $\mathcal{H}s$ с матрицей скалярного произведения вида (7) можно представить в виде композиции $U_t{\circ}S_2= S_2{\circ}U_t$, либо в виде композиции $W_t{\circ}S_2= S_2{\circ}W_t$. Эти преобразования действуют по формулам (2.2).

§4. *Автоподобия трехмерных разрешимых алгебр Ли*

К разрешимым относятся все неунимодулярные трехмерные алгебры Ли, а также унимодулярные алгебры Ли $\mathcal{E}(2)$ и $\mathcal{E}(1,1)$. Все они содержат коммутативный идеал $\mathcal{L}$ размерности 2. Выберем базис $\{E_1, E_2, E_3\}$ в алгебре Ли $\mathcal{G}$ так, чтобы $E_2, E_3\in\mathcal{L}$. Тогда операция скобки в $\mathcal{G}$ полностью определяется матрицей **A** преобразования $\mathrm{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$ в базисе $\{E_2, E_3\}$.

В следующей таблице приведен канонический вид матрицы преобразования $\mathrm{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$ при подходящем выборе базиса $\{E_1,E_2,E_3\}$. Этот базис, а также базис $\{E_1, E_3, E_2\}$, который получается в результате перестановки двух последних векторов, будем называть каноническими.

Таблица

Канонический вид матрицы преобразования $\mathrm{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$

Тип Бианки	Канонический вид матрицы **A**	Одномерные идеалы
III	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\boldsymbol{R}E_2$, $\boldsymbol{R}E_3$
IV	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\boldsymbol{R}E_2$
V	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	любое одномерное подпространство в $\mathcal{L}$
VI	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$, $\alpha\in(-1, 0)\cup(0, 1)$	$\boldsymbol{R}E_2$, $\boldsymbol{R}E_3$
VI$_o$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$\boldsymbol{R}E_2$, $\boldsymbol{R}E_3$
VII	$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$, $\alpha\in(0, 1)$, $\beta=\sqrt{1-\alpha^2}$	отсутствуют
VII$_o$	$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	отсутствуют

Будем говорить, что двумерный идеал $\mathcal{L}$ является пространственноподобным, если на нем индуцируется положительно определенное скалярное произведение, времениподобным, если на нем индуцируется знаконеопределенное скалярное произведение, и изотропным, если на нее индуцируется вырожденное скалярное произведение.

***Теорема* 2.** *Трехмерная разрешимая алгебра Ли* $\mathcal{G}$*, снабженная лоренцевым скалярным произведением допускает автоподобия тогда и только тогда, когда она относится к* III, V *или* VI *типу Бианки, или подтипу* VI_o ($\mathcal{E}(1,1)$)*, и при этом ее двумерный коммутативный идеал* $\mathcal{L}$ *и один из одномерных идеалов являются изотропными.*

В этом случае в подходящем каноническом базисе любое автоподобие алгебры Ли $\mathcal{G}$ *будет задаваться одной из формул*

$$\begin{cases} E_1' = E_1, \\ E_2' = \pm e^{\mu t} E_2, \\ E_3' = \pm\, e^{2\mu t} E_3., \end{cases} \qquad (9.1) \qquad\qquad \begin{cases} E_1' = -E_1, \\ E_2' = \pm e^{\mu t} E_2, \\ E_3' = \mp\, e^{2\mu t} E_3., \end{cases} \qquad (9.2)$$

а матрица скалярного произведения в этом базисе будет иметь вид (7).

Доказательство. **1.** Предположим, что идеал $\mathcal{L}$ является пространственноподобным и $f: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ – автоподобие. Тогда f должно оставлять инвариантными идеал $\mathcal{L}$ и ортогональное к нему одномерное подпространство $\boldsymbol{R}E_1$. Разобьем автоподобия на два типа:

1) автоподобия, которые сохраняют направление $\boldsymbol{R}E_1$;
2) автоподобия, которые меняют направление $\boldsymbol{R}E_1$.

Любое автоподобие первого типа $f: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ действует в выбранном базисе $\{E_1, E_2, E_3\}$ по формулам (4). При этом, матрица $\mathbf{A}'$ преобразования $\mathrm{ad}(E_1')|_{\mathcal{L}}$ в базисе $\{E_2', E_3'\}$ должна совпадать с матрицей $\mathbf{A}$ преобразования $\mathrm{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$ в базисе $\{E_2, E_3\}$. Пусть $\mathbf{A}''$ – матрица преобразования $\mathrm{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$ в базисе $\{E_2', E_3'\}$. Тогда $\mathbf{A}' = e^{\mu}\mathbf{A}''$ и $\mathbf{A}'' = \boldsymbol{H}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{H}$, где

$$\boldsymbol{H} = e^{\mu}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\det \mathbf{A}' = e^{2\mu}\det \mathbf{A}'' = e^{2\mu}\det(\boldsymbol{H}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{H}) = e^{2\mu}\det \boldsymbol{H}^{-1}\det \mathbf{A}\,\det \boldsymbol{H} = e^{2\mu}\det \mathbf{A}.$$

Мы видим, что матрицы $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}$ не могут совпадать за исключением, может быть, случая $D = \det\mathbf{A} = 0$, соответствущего алгебре Ли III типа Бианки. Если идеал $\mathcal{L}$ является времениподобным, мы приходим такому же выводу. Единственное отличие: вместо матрицы $\boldsymbol{H}$ следует рассматривать матрицу

$$e^{\mu}\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $D = 0$ и идеал $\mathcal{L}$ является пространственноподобным. В ортонормированном базисе матрица $\mathbf{A}$ имеет вид $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Тогда

$$\mathbf{A}'=e^{\mu}\mathbf{A}''=e^{\mu}e^{-\mu}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}e^{\mu}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=e^{\mu}\begin{pmatrix}\lambda\cos^2\alpha & -\lambda\sin 2\alpha\\ -\lambda\sin 2\alpha & \lambda\sin^2\alpha\end{pmatrix}.$$

Равенство $\mathbf{A}'=\mathbf{A}$ возможно только для $\mu=0$. Такой же результат получится, если идеал $\mathcal{L}$ является времениподобным. Значит, $\mathcal{A}(1)\times\mathcal{R}$ тоже не допускает автоподобий первого типа, если $\operatorname{rank}\mathbf{\Gamma}|_{\mathcal{L}}=2$.

Любое автоподобие второго типа можно представить в виде композиции подобия первого типа и автоизометрии S_2 (см. формулы (5)). Поэтому $\mathcal{G}$ не допускает также автоподобий второго типа, отличных от автоизомерий.

2. Пусть теперь на разрешимой трехмерной алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано скалярное произведение так, что ограничение скалярного произведения на идеал $\mathcal{L}$ вырождено, т.е. $\operatorname{rank}\mathbf{\Gamma}|_{\mathcal{L}}=1$. Пусть $f\colon\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}$ – автоподобие. Тогда f должно оставлять инвариантными идеал $\mathcal{L}$ и конус изотропных векторов K. Следовательно, f должно оставлять инвариантным одномерное направление, по которому пересекаются $\mathcal{L}$ и K. Выберем базис $\{E_1, E_2, E_3\}$ в алгебре Ли $\mathcal{G}$ так, чтобы E_3 принадлежал этому направлению, $E_2\in\mathcal{L}$ и матрица скалярного произведения имела вид (7).

К указанным выше двум типам автоподобий добавим третий тип: автоподобия, которые не оставляет подпространство $\boldsymbol{R}E_1$ инвариантным.

Если f относится к первому типу, то оно задается формулами вида

$$E_1'=e^{(\mu+\nu)t}E_1,\quad E_2'=\pm e^{\mu t}E_2,\quad E_3'=\pm e^{(\mu-\nu)t}E_3. \tag{10}$$

Тогда в базисе $\{E_2, E_3\}$ матрица $f|_{\mathcal{L}}$ имеет вид $\pm e^{\mu t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-\nu t}\end{pmatrix}$. Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})$ и $\mathbf{A}''$ – матрицы преобразования $\operatorname{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$ в базисах $\{E_2, E_3\}$ и $\{E_2', E_3'\}$ соответственно. Тогда

$$\mathbf{A}''=e^{-\mu t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{\nu t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}e^{\mu t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-\nu t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & e^{-\nu t}a_{12}\\ e^{\nu t}a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Имеем $\operatorname{ad}(E_1')|_{\mathcal{L}}=e^{(\mu+\nu)t}\operatorname{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$. Поэтому матрица этого преобразования в базисе $\{E_2', E_3'\}$ имеет вид

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix}e^{(\mu+\nu)t}a_{11} & e^{\mu t}a_{12}\\ e^{(\mu+2\nu)t}a_{21} & e^{(\mu+\nu)t}a_{22}\end{pmatrix}.$$

Из равенства $\mathbf{A}'=\mathbf{A}$ получаем четыре возможных случая:

1. $a_{12}=a_{21}=0$ и $\mu=-\nu\neq0$;
2. $a_{11}=a_{22}=a_{12}=0$ и $\mu=-2\nu\neq0$;
3. $a_{11}=a_{22}=a_{21}=0$ и $\mu=0,\ \nu\neq0$;
4. $\mu=\nu=0$.

Случай 2 соответствует алгебре Ли $\mathcal{H}s$ (см. §3). В случаях 3 и 4 преобразование f является автоизометрией.

В случае 1 матрица преобразования $\mathrm{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$ имеет вид $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, т.е. подпространства $\boldsymbol{R}E_2$, $\boldsymbol{R}E_3$ являются одномерными идеалами. Таким образом, $\mathcal{G}$ относится к III, V или VI типу Бианки, или подтипу VI_o ($\mathcal{E}(1,1)$). При этом одномерный идеал $\boldsymbol{R}E_3$ является изотропным.

Подставляя $\mu=-\nu$ в (10) получаем формулы (9.1). Любое автоподобие второго типа можно представить в виде композиции подобия первого типа и автоизометрии S_2. Поэтому такое автоподобие действует по формулам (9.2).

Умножение базисных векторов на ненулевые постоянные не изменяет формул (9.1) и (9.2), по которым действует f. Умножение вектора E_1 на число $\lambda\neq 0$ приводит к умножению матрицы $\mathbf{A}_1$ на это число, а умножение векторов E_2 и E_3 не изменяет матрицы $\mathbf{A}_1$. Поэтому с помощью замены вида $E_1'=\lambda E_1$, $E_3'=\lambda^{-1}E_3$ мы можем добиться, чтобы $\alpha=1$, либо $\beta=1$, и при этом матрица $\mathbf{\Gamma}$ скалярного произведения не изменится.

Обратно, пусть $\mathrm{rk}(g_{ij})|_{\mathcal{L}}=1$ и один из одномерных идеалов алгебры Ли $\mathcal{G}$ является изотропным. Выберем векторы E_2 и E_3 так, чтобы E_3 принадлежал изотропному идеалу, а E_2 принадлежал неизотропному идеалу; при этом вектор E_2 выберем единичным. Вектор E_1 выберем так, чтобы он принадлежал единственному изотропному направлению, ортогональному E_2, и выполнялось $\langle E_1, E_2\rangle = 1$. Тогда матрица скалярного произведения в базисе $\{E_1, E_2, E_3\}$ будет иметь вид (7), а матрица преобразования $\mathrm{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$ будет иметь вид $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}$.

Проведенная выше проверка показывает, что преобразование, действующее по формулам (9.1), является автоподобием. Преобразование, действующее по формулам (9.2), является композицией преобразования (9.1) и автоизометрии S_2; следовательно, оно тоже является автоподобием.

Заметим, что преобразования, действующие по формулам (9.1) со знаком «+», образуют однопараметрическую группу автоподобий.

Пусть теперь автоподобие f относится к третьему типу. Тогда в соответствии с [5] оно задается формулами вида

$$E_1'= e^{\mu t}(E_1 + tE_2 + (t^2/2)E_3),\ \ E_2'=e^{\mu t}(E_1 + tE_2),\ \ E_3'=e^{\mu t}E_3, \tag{11}$$

либо оно является композицией преобразования (11) и симметрий (5).

Пусть f действует по формулам (11). Тогда в базисе $\{E_2, E_3\}$ матрица $f|_{\mathcal{L}}$ имеет вид $e^{\mu}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 0\end{pmatrix}$. Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})$ и $\mathbf{A}'$ – матрицы преобразований $\mathrm{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$ и $\mathrm{ad}(E_1')|_{\mathcal{L}}$ в базисах $\{E_2, E_3\}$ и $\{E_2', E_3'\}$ соответственно. Тогда непосредственным вычислением находим, что

$$\mathbf{A}' = e^{\mu t}\begin{pmatrix} a_{11}+ ta_{12} & a_{12}\\ t(a_{22}-a_{11}) + (1- t^2)a_{21} & -ta_{12}+a_{22}\end{pmatrix}.$$

Из равенства $\mathbf{A}'=\mathbf{A}$ получаем

$$e^{\mu t}(a_{11}+ta_{12})=a_{11},\quad e^{\mu t}(a_{22}-ta_{12})=a_{22}.$$

Если $\mu t\neq 0$, то $a_{11}=-a_{22}$. Это означает, что $\operatorname{trace}\operatorname{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}=0$, т.е. алгебра Ли является унимодулярной.

Предположим сначала, что подпространство $\boldsymbol{R}E_3$ не является идеалом. Заново выберем специальный базис так, чтобы E_2 был коллинеарен $[E_1, E_3]$. Автоподобие (11) будет в этом базисе задаваться теми же формулами, а матрица $\operatorname{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$ будет иметь вид $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -\lambda_3\\ \lambda_2 & 0\end{pmatrix}$, $\lambda_2\lambda_3\neq 0$. Тогда

$$\mathbf{A}'=e^{\mu t}\begin{pmatrix}-t\lambda_3 & -\lambda_3\\ (1-t^2)\lambda_2 & t\lambda_3\end{pmatrix}.$$

Из равенства $\mathbf{A}'=\mathbf{A}$ получаем $\mu=t=0$.

Предположим теперь, что подпространство $\boldsymbol{R}E_3$ является одномерным идеалом. Тогда $\mathcal{G}$ – это $\mathcal{E}(1,1)$. Заново выберем специальный базис так, чтобы E_2 принадлежал второму одномерному идеалу. Автоподобие (11) будет в этом базисе задаваться теми же формулами, а матрица $\operatorname{ad}(E_1)|_{\mathcal{L}}$ будет иметь вид $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}$. Тогда

$$\mathbf{A}'=e^{\mu t}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 2\alpha t & -\alpha\end{pmatrix}.$$

Мы опять из равенства $\mathbf{A}'=\mathbf{A}$ получаем $\mu=t=0$. Значит, автоподобий третьего типа, отличных от изометрий, не существует.

Литература

1. Петров, А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров. – М.: Наука, 1966.
2. Milnor, J. Curvaturies of left-invariant metrics on Lie groups / J. Milnor // Adv. Math. – 1976. – Vol. 21. – P. 293–329.
3. Гаврилов, С.П. Приведение симметрической невырожденной билинейной формы на двумерных и трехмерных алгебрах Ли к каноническому виду автоморфизмами алгебр Ли / С.П. Гаврилов // Гравит. и теор. относит. (Казань). – 1980. – Вып. 17. – С. 12–23.
4. Гаврилов, С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на односвязной трехмерной группе Ли II типа Бианки / С.П. Гаврилов // Гравит. и теор. относит. (Казань). – 1982. – Вып. 19. – С. 37–47.
5. Alekseevski, D. Self-similar Lorentzian manifolds / D. Alekseevski // Ann. of Global / Anal. Geom. – 1985. – Vol. 3, № 1. – C. 59–84.

Поступило 2.07.2009