УДК 512.541

Полуабелевость и самосовмещение в терминах векторов n-арных групп

Ю.И. Кулаженко

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

n-Арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности $x_1^n \in X^n$ справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1)$$

Последовательность r элементов из X называют r-угольником G. Четырехугольник <a,b,c,d> называют параллелограммом G, если

$$(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = d$$

Упорядоченную пару <a, b> называют направленным отрезком G и обозначают $\overline{ab}$. Если $\overline{ab} = \overline{cd}$, то четырехугольник <a,c,d,b> – параллелограмм G. Пусть $\overline{V}$ – множество всех направленных отрезков G. Под вектором $\overline{ab}$ n-арной группы G понимают класс

$$K(\overline{ab}) = \{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in \overline{V}, \overline{uv} = \overline{ab}\}, \text{ т.е. } \overrightarrow{ab} = K(\overline{ab}).$$

Получены новые критерии полуабелевости n-арной группы G (теоремы 1.2), выраженные через свойства векторов G.

Ключевые слова: n-арная группа, вектора n-арных групп, полуабелева n-арная группа.

Semicommutativity and congruence motion in terms of vectors of n-ary groups

Yu.I. Kulazhenko

Educational establishment «Francisk Skorina Gomel State University»

***Summary**. The article specifies the new criteria of semicommutativity of the n-ary group «G», expressed by properties of «G» vector.*

Понятие полуабелевости, которое ввел Дернте в [1], «красной нитью» проходит через работы математиков, труды которых принято относить к разряду классических в области n-арных групп [1–5]. Поэтому установление новых критериев полуабелевости было и остается достаточно актуальной задачей.

В представляемой работе критерии полуабелевости n-арной группы $G = \langle X, (\,)^{[-2]} \rangle$ выражены через свойства векторов G. Отметим также, что результаты устанавливают факты самосовмещения произвольной точки $p \in X$. Это также является важным, поскольку, как известно, самосовмещения используются для построения различных типов групп [6].

Напомним, что n-арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности $x_1^n \in X^n$ справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

В дальнейшем элементы n-арной группы G будем называть точками. Точку

$$S_a(b) = (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)$$

называют точкой, симметричной точке b относительно точки a. Последовательность k элементов из X – k-угольником G. Четырехугольник $\langle a,b,c,d \rangle$ называется параллелограммом G, если

$$(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = d.$$

Будем говорить, что точка $p \in X$ самосовмещается, если существует последовательность симметрий этой точки относительно других точек из X, в результате которых точка p отображается в себя.

Упорядоченную пару $\langle a,b \rangle$ точек $a,b \in X$ называют направленным отрезком n-арной группы G и обозначают $\overline{ab}$.

Если $a,b,c,d \in X$, то говорят, что направленные отрезки $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ равны и пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$, если четырехугольник $\langle a,c,d,b \rangle$ – параллелограмм G.

Пусть $\overline{V}$ – множество всех направленных отрезков n-арной группы G. Согласно предложению 1 из [5] бинарное отношение = на множестве $\overline{V}$ является отношением эквивалентности и разбивает множество $\overline{V}$ на непересекающиеся классы. Класс, порожденный направленным отрезком $\overline{ab}$, имеет вид

$$K(\overline{ab}) = \{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in \overline{V}, \overline{uv} = \overline{ab}\}.$$

Под вектором $\overrightarrow{ab}$ n-арной группы G понимают класс $K(\overline{ab})$, т.е. $\overrightarrow{ab} = K(\overline{ab})$.

Другие обозначения определения и результаты, используемые в работе, можно найти в [4–5].

Изложим теперь полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть* a,b,c *– произвольные точки из* X, *а точка* d *из* X *такая, что четырехугольник* $<a,b,c,d>$ *– параллелограмм* G. n*-арная группа* G *будет полуабелевой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{S_a(p)S_b(a)}+\overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_a(p))S_c(d)}\ +$$
$$+\overrightarrow{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p)))d}=\vec{0}. \qquad (1)$$

Доказательство. 1. Пусть G – полуабелева n-арная группа. Установим справедливость равенства (1). Для этого будем последовательно суммировать векторы из левой части равенства, применяя теорему 8 из [7], определение 4 из [5], равенство 3.28 из [4], предложение 1 из [7]. Имеем

$$\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{S_a(p)S_b(a)}=\overrightarrow{p(a(S_a(p))^{[-2]}\underbrace{S_a(p)\ldots S_b(a)}_{2n-4})}=$$
$$=p(a(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,a)^{[-2]}\underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,a)\ldots(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)}_{2n-4})=$$
$$=\overrightarrow{p(aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)}=\overrightarrow{p(pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)}. \quad (2)$$

Упростим выражение $S_{S_b(a)}(S_a(p))$, используя определение 4 из [1], равенство 3.28 из [2], предложение 1 из [3].

$$S_{S_b(a)}(S_a(p))=(S_b(a)(S_a(p))^{[-2]}\underbrace{S_a(p)\ldots S_b(a)}_{2n-4})=$$
$$=((ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,a)^{[-2]}\underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,a)\ldots(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)}_{2n-4})=$$
$$=(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b). \qquad (3)$$

С учетом равенств (2), (3), теоремы 8 из [7], определения 4 из [5], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7] имеем

$$\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{S_a(p)S_b(a)}+\overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_a(p))S_c(d)}=$$
$$=\overrightarrow{p(pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)}+$$
$$+\overrightarrow{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,c)}=$$
$$=\overrightarrow{p((pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)^{[-2]}}$$
$$\overrightarrow{\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)\ldots}_{2n-4}(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,c))}=$$
$$=\overrightarrow{p(pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a}$$
$$\overrightarrow{b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,c)}=$$
$$=\overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,c)}. \qquad (4)$$

Преобразуем выражение $S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p)))$ с учетом предыдущих рассуждений и равенства (3)

$$S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p)))=S_{S_c(d)}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)=$$
$$=(S_c(d)(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)^{[-2]}$$
$$\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)\ldots}_{2n-4}S_c(d))=$$
$$=((cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$$
$$ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,c)). \qquad (5)$$

С учетом равенств (4), (5), свойства полуабелевости группы G и того, что $<a,b,c,d>$ – параллелограмм G, имеем

$$\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{S_a(p)S_b(a)}+\overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_a(p))S_c(d)}+\overrightarrow{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p)))d}=$$
$$=\overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,c)}+$$
$$+\overrightarrow{(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,c)d}=$$
$$=\overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}c)}+$$
$$\overrightarrow{+(c(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}}$$
$$\overrightarrow{ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}c)d}=$$
$$=\overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c)}+\ \overrightarrow{+(cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}}$$
$$\overrightarrow{ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c)d}=$$
$$=\overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)}+\overrightarrow{((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c))d}=$$

$$= \overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)} + \overrightarrow{(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c))d} =$$

$$= \overrightarrow{p((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}}$$

$$\overrightarrow{\underbrace{(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}d)} =$$

$$= \overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c))} =$$

$$= \overrightarrow{p(pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a)} = \overrightarrow{pp} = \vec{0}. \tag{6}$$

Следовательно, равенство (1) справедливо.

2. Пусть равенство (1) выполняется. Докажем, что G – полуабелева n-арная группа.

Поскольку свойство полуабелевости группы G в первом пункте доказательства нами использовалось только в равенстве (6), то считаем, что все рассуждения до равенства (6) справедливы.

Преобразуем (4) и (5) с учетом того, что четырехугольник $< a, b, c, d >$ – параллелограмм G. Имеем:

$$\overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,c)} =$$

$$= \overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\,\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}c)} =$$

$$= \overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c)} = \overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)}, \tag{7}$$

$$S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p))) = = (cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,c) =$$

$$= (c(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\,\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$$

$$ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\,\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}c) =$$

$$= (cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$$

$$ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,c) =$$

$$= (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c). \tag{8}$$

С учетом (1), (7) и (8) имеем

$$\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{S_a(p)S_b(a)} + \overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_a(p))S_c(d)} + \overrightarrow{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p)))d} =$$

$$= \overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)} + \overrightarrow{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)d} = \vec{0}.$$

Откуда, с учетом теоремы 8 из [7],

$$\overrightarrow{p((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}}$$

$$\overrightarrow{\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}d)} = \vec{0}.$$

Преобразовывая это равенство получим

$$\overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}}$$

$$\overrightarrow{b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,d)} = \vec{0},$$

или

$$\overrightarrow{p(pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c))} = \overrightarrow{pp},$$

Откуда

$$(pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)) = p. \tag{9}$$

Умножим обе части равенства (9) слева на выражение $cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$. Имеем

$$(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b$$

$$a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)) =$$

$$= (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}p).$$

Откуда

$$(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)) = ((cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a),$$

или

$$((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)),$$

или

$$(S_a(b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}S_a(b)). \qquad (10)$$

На основании (10) и предложения 1 из [8] заключаем, что G – полуабелева n-арная группа.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть a,b,c – произвольные точки из X, а точка $d \in X$ такая, что четырехугольник $< a,b,c,d >$ – параллелограмм G. n-арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$\overrightarrow{pd} + \overrightarrow{S_d(p)S_b(a)} + \overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_d(p))S_c(d)} + \overrightarrow{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_d(p)))S_d(a)} = \vec{0}. \qquad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть G – полуабелева n-арная группа. Докажем справедливость равенства (11).

Поскольку четырехугольник $< a,b,c,d >$ – параллелограмм G, то, согласно определению 2 из [5],

$$d = (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c). \qquad (12)$$

Тогда с учетом теоремы 8 из [7], определения 4 из [5], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7] имеем

$$\overrightarrow{pd} + \overrightarrow{S_d(p)S_b(p)} = \overrightarrow{p(d(S_d(p))^{[-2]}\underbrace{S_d(p)\ldots}_{2n-4}S_b(a))} =$$

$$= \overrightarrow{p(d(dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}d)^{[-2]}\underbrace{(dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}d)\ldots}_{2n-4}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b))} =$$

$$= \overrightarrow{p(dd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)} = \overrightarrow{p(pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)} =$$

$$= \overrightarrow{p(p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)^{[-2]}\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)\ldots}_{2n-4}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)} =$$

$$= \overrightarrow{p(pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)}. \qquad (13)$$

Преобразуем выражение $S_{S_b(a)}(S_d(p))$ с учетом определения 4 из [5], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7]. Имеем

$$S_{S_b(a)}(S_d(p)) = (S_b(a)(S_d(p))^{[-2]}\underbrace{S_d(p)\ldots}_{2n-4}S_b(a)) =$$

$$= ((ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)(dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}d)^{[-2]}\underbrace{(dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}d)\ldots}_{2n-4}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)) =$$

$$= (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b). \qquad (14)$$

С учетом равенств (13), (14), теоремы 8 из [7], определения 4 из [5], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7] имеем

$$\overrightarrow{pd} + \overrightarrow{S_d(p)S_b(a)} + \overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_d(p))S_c(d)} = \overrightarrow{p(pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)} +$$

$$+\overrightarrow{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c)} =$$

$$= \overline{p((pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)^{[-2]}}$$

$$\overrightarrow{\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)\ldots}_{2n-4}(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c))} =$$

$$= \overline{p(pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}d}$$

$$\overrightarrow{p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c))} =$$

$$= \overline{p(pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}}$$

$$\overline{c(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)^{[-2]}\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)\ldots}_{2n-4}c)} = \overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)} =$$

$$= \overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)}. \qquad (15)$$

Преобразуем выражение $S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_d(p)))$ с учетом равенства (14), определения 4 из [5], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7]

$$S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_d(p))) = S_{S_c(d)}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) =$$

$$= (S_c(d)(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\ pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\ ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ b)^{[-2]}$$

$$\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ bd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\ pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\ ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ b)\ldots}_{2n-4} S_c(d)) =$$

$$= ((cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\ c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\ db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ (cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\ c)) =$$

$$= ((c(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)^{[-2]}\ \underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)\ldots}_{2n-4} c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$$

$$(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ (c(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)^{[-2]}\ \underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)\ldots}_{2n-4} c)) =$$

$$= ((cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$$

$$ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ (cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ c)) =$$

$$= (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c). \qquad (16)$$

С учетом равенств (15), (16), свойства полуабелевости группы G и предыдущих рассуждений имеем

$$\overrightarrow{pd} + \overrightarrow{S_d(p)S_b(a)} + \overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_d(p))S_c(d)} + \overrightarrow{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_d(p)))S_d(a)} =$$

$$= \overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)} + \overrightarrow{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}}$$

$$\overrightarrow{ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ d)} =$$

$$= \overline{p((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}}\ \overline{ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)^{[-2]}}$$

$$\underbrace{\overline{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)\ldots}}_{2n-4}$$

$$\overrightarrow{(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ d))} = \overline{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}}$$

$$\overrightarrow{pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c))} =$$

$$= \overrightarrow{p(pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)} =$$

$$= \overrightarrow{p(pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)} = \ = \overrightarrow{pp} = \vec{0}. \qquad (17)$$

Справедливость равенства (11) установлена.

2. Пусть равенство (11) выполняется. Докажем, что G – полуабелева n-арная группа.

В первой части доказательства свойства полуабелевости мы использовали только в равенстве (17). Поэтому без повторения рассуждений считаем, что равенства (15) и (16) справедливы.

Из (1), (15) и (16) имеем

$$\overrightarrow{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)} + \overline{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}}$$

$$\overrightarrow{cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ d)} = \vec{0}. \qquad (18)$$

Преобразуем правую часть равенства (18) с учетом теоремы 8 из [7], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7]. Имеем

$$\overline{p((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}}$$

$$\overline{ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)^{[-2]}}$$

$$\underbrace{\overline{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c)\ldots}}_{2n-4}$$

$$\overrightarrow{(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ d))} = \vec{0}$$

или

$$\overline{p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}}$$

$$\overrightarrow{ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ (da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ d))} = \vec{0}.$$

С учетом того, что $< a,b,c,d >$ – параллелограмм G и нейтральности последовательностей $xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}$ и $x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}\ x$ для любого $x \in X$, имеем

$$\overline{p(pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}}$$

$$\overrightarrow{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\ ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\ c))} = \vec{0}.$$

Согласно определению 6 из [5] $\vec{0}=\overrightarrow{pp}$ для любой точки $p\in X$, тогда

$$\overrightarrow{p(pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)}=\overrightarrow{pp}.$$

Из этого равенства следует, что

$$(pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)=p. \qquad (19)$$

Умножим обе части равенства (19) слева на выражение $cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$. Имеем

$$(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,b$$
$$a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)=$$
$$=(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,p). \qquad (20)$$

Откуда, с учетом нейтральности последовательностей,

$$((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)=$$
$$=(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c). \qquad (21)$$

Умножим обе части равенства (21) справа на выражение $c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,b$. Имеем

$$(S_a(b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,b)=$$
$$=(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,S_a(b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,b). \qquad (22)$$

Откуда

$$(S_a(b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)=(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,S_a(b)). \qquad (23)$$

Поскольку a,b,c – произвольные точки из X , то из равенства (23) и на основании предложения 1 из [8] заключаем, что G – полуабелева n -арная группа.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dornte, W. Untersuchungn uber einen verallgemeinerten Gruppenbergriff / W. Dornte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
2. Post, E.L. Polgadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Prufer, H. Theorle der Abelschen Gruppen I. Grundeigenschaften, Math. Z. – 1924. – Bd. 20. – S. 165–187.
4. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1992. – 264 с.
5. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 182 с.
6. Александров, П.С. Введение в теорию групп / П.С. Александров. – М.: Наука, 1980. – 144 с.
7. Кулаженко, Ю.И. Геометрия параллелограммов / Вопросы алгебры и прикладной математики: сб. науч. тр. / под ред. С.А. Русакова. – Гомель, 1995. – С. 47–64.
8. Кулаженко, Ю.И. Полуабелевость и самосовмещение точек n -арных групп относительно элементов последовательностей вершин четырехугольников / Ю.И. Кулаженко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 2(53). – С. 150–156.

Поступила в редакцию 29.04.2010
Адрес для корреспонденции: 246019, г. Гомель, ул. Советская, д. 104, УО «ГГУ им. Ф. Скорины» – Кулаженко Ю.И.