

Полуабелевость и самосовмещение в терминах векторов n -арных групп

Ю.И. Кулаженко

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

n -Арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности $x_i^n \in X^n$ справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1)$$

Последовательность r элементов из X называют r -угольником G . Четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ называют параллелограммом G , если

$$(ab^{[-2]^{2n-4}}bc) = d$$

Упорядоченную пару $\langle a, b \rangle$ называют направленным отрезком G и обозначают \overline{ab} . Если $\overline{ab} = \overline{cd}$, то четырехугольник $\langle a, c, d, b \rangle$ – параллелограмм G . Пусть \overline{V} – множество всех направленных отрезков G . Под вектором \overline{ab} n -арной группы G понимают класс

$$K(\overline{ab}) = \{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in \overline{V}, \overline{uv} = \overline{ab}\}, \text{ т.е. } \overline{ab} = K(\overline{ab}).$$

Получены новые критерии полуабелевости n -арной группы G (теоремы 1.2), выраженные через свойства векторов G .

Ключевые слова: n -арная группа, вектора n -арных групп, полуабелева n -арная группа.

Semicommutativity and congruence motion in terms of vectors of n -ary groups

Yu.I. Kulazhenko

Educational establishment «Francisk Skorina Gomel State University»

Summary. The article specifies the new criteria of semicommutativity of the n -ary group « G », expressed by properties of « G » vector.

Понятие полуабелевости, которое ввел Дертте в [1], «красной нитью» проходит через работы математиков, труды которых принято относить к разряду классических в области n -арных групп [1–5]. Поэтому установление новых критериев полуабелевости было и остается достаточно актуальной задачей.

В представляемой работе критерии полуабелевости n -арной группы $G = \langle X, (\cdot)^{[-2]} \rangle$ выражены через свойства векторов G . Отметим также, что результаты устанавливают факты самосовмещения произвольной точки $p \in X$. Это также является важным, поскольку, как известно, самосовмещения используются для построения различных типов групп [6].

Напомним, что n -арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности $x_i^n \in X^n$ справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

В дальнейшем элементы n -арной группы G будем называть точками. Точку

$$S_a(b) = (ab^{[-2]^{2n-4}} b a)$$

называют точкой, симметричной точке b относительно точки a . Последовательность k элементов из X – k -угольником G . Четырехуголь-

ник $\langle a, b, c, d \rangle$ называется параллелограммом G , если

$$(ab^{[-2]^{2n-4}} b c) = d.$$

Будем говорить, что точка $p \in X$ самосовмещается, если существует последовательность симметрий этой точки относительно других точек из X , в результате которых точка p отображается в себя.

Упорядоченную пару $\langle a, b \rangle$ точек $a, b \in X$ называют направленным отрезком n -арной группы G и обозначают \overline{ab} .

Если $a, b, c, d \in X$, то говорят, что направленные отрезки \overline{ab} и \overline{cd} равны и пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$, если четырехугольник $\langle a, c, d, b \rangle$ – параллелограмм G .

Пусть \overline{V} – множество всех направленных отрезков n -арной группы G . Согласно предложению 1 из [5] бинарное отношение $=$ на множестве \overline{V} является отношением эквивалентности и разбивает множество \overline{V} на непересекающиеся классы. Класс, порожденный направленным отрезком \overline{ab} , имеет вид

$$K(\overline{ab}) = \{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in \overline{V}, \overline{uv} = \overline{ab}\}.$$

Под вектором \overline{ab} n -арной группы G понимают класс $K(\overline{ab})$, т.е. $\overline{ab} = K(\overline{ab})$.

Другие обозначения определения и результаты, используемые в работе, можно найти в [4–5].

Изложим теперь полученные результаты.

Теорема 1. Пусть a, b, c – произвольные точки из X , а точка d из X такая, что четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ – параллелограмм G . n -арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\overline{pa + S_a(p)S_b(a) + S_{S_b(a)}(S_a(p))S_c(d)} + \overline{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p)))d} = \vec{0}. \quad (1)$$

Доказательство. 1. Пусть G – полуабелева n -арная группа. Установим справедливость равенства (1). Для этого будем последовательно суммировать векторы из левой части равенства, применяя теорему 8 из [7], определение 4 из [5], равенство 3.28 из [4], предложение 1 из [7]. Имеем

$$\overline{pa + S_a(p)S_b(a)} = \overline{p(a(S_a(p)))^{[-2]} \underbrace{S_a(p) \dots S_b(a)}_{2n-4}} = p(a(ap^{[-2]} p a)^{[-2]} \underbrace{(ap^{[-2]} p a) \dots (ba^{[-2]} a b)}_{2n-4}) =$$

$$= \overline{p(aa^{[-2]} a pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a b) = p(pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a b). \quad (2)$$

Упростим выражение $S_{S_b(a)}(S_a(p))$, используя определение 4 из [1], равенство 3.28 из [2], предложение 1 из [3].

$$\begin{aligned} S_{S_b(a)}(S_a(p)) &= (S_b(a)(S_a(p))^{[-2]} \underbrace{S_a(p) \dots S_b(a)}_{2n-4}) = \\ &= ((ba^{[-2]} a b)(ap^{[-2]} p a)^{[-2]} \underbrace{(ap^{[-2]} p a) \dots (ba^{[-2]} a b)}_{2n-4}) = \\ &= (ba^{[-2]} a ba^{[-2]} a pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a b). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \overline{pa + S_a(p)S_b(a) + S_{S_b(a)}(S_a(p))S_c(d)} + \overline{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p)))d} &= \\ &= \overline{p(ab^{[-2]} b ab^{[-2]} b cd^{[-2]} d c) +} \\ &+ \overline{(cd^{[-2]} d cb^{[-2]} b ab^{[-2]} b ap^{[-2]} p ab^{[-2]} b ab^{[-2]} b cd^{[-2]} d c)d} = \\ &= \overline{p(ab^{[-2]} b ab^{[-2]} b c(ab^{[-2]} b c)^{[-2]} \underbrace{(ab^{[-2]} b c) \dots c}_{2n-4}) +} \\ &+ \overline{(c(ab^{[-2]} b c)^{[-2]} \underbrace{(ab^{[-2]} b c) \dots cb^{[-2]} b ab^{[-2]} b ap^{[-2]} p}_{2n-4})} \\ &= \overline{ab^{[-2]} b ab^{[-2]} b c(ab^{[-2]} b c)^{[-2]} \underbrace{(ab^{[-2]} b c) \dots c}_{2n-4}d} = \\ &= \overline{p(ab^{[-2]} b ab^{[-2]} b cc^{[-2]} c ba^{[-2]} a c) +} \overline{(cc^{[-2]} c (ba^{[-2]} a c)b^{[-2]} b ab^{[-2]} b ap^{[-2]} p}_{2n-4}} \\ &= \overline{ab^{[-2]} b ab^{[-2]} b cc^{[-2]} c ba^{[-2]} a c)d} = \\ &= \overline{p(ab^{[-2]} b c) + ((cd^{[-2]} a b)b^{[-2]} b ab^{[-2]} b ap^{[-2]} p (ab^{[-2]} b c))d} = \end{aligned}$$

С учетом равенств (2), (3), теоремы 8 из [7], определения 4 из [5], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7] имеем

$$\begin{aligned} \overline{pa + S_a(p)S_b(a) + S_{S_b(a)}(S_a(p))S_c(d)} &= \\ &= \overline{p(pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a b) +} \\ &+ \overline{(ba^{[-2]} a ba^{[-2]} a pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a b)(cd^{[-2]} d c) =} \\ &= \overline{p((pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a b)(ba^{[-2]} a ba^{[-2]} a pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a b)^{[-2]} =} \\ &\underbrace{(ba^{[-2]} a ba^{[-2]} a pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a b) \dots (cd^{[-2]} d c))}_{2n-4} = \\ &= \overline{p(pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a bb^{[-2]} b a} \\ &\overline{b^{[-2]} b ap^{[-2]} p ab^{[-2]} b ab^{[-2]} b cd^{[-2]} d c) =} \\ &= \overline{p(ab^{[-2]} b ab^{[-2]} b cd^{[-2]} d c). \quad (4)} \end{aligned}$$

Преобразуем выражение $S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p)))$ с учетом предыдущих рассуждений и равенства (3)

$$\begin{aligned} S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p))) &= S_{S_c(d)}(ba^{[-2]} a ba^{[-2]} a pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a b) = \\ &= (S_c(d)(ba^{[-2]} a ba^{[-2]} a pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a b)^{[-2]} = \\ &\underbrace{(ba^{[-2]} a ba^{[-2]} a pa^{[-2]} a ba^{[-2]} a b) \dots S_c(d)}_{2n-4} = \\ &= ((cd^{[-2]} d c)b^{[-2]} b ab^{[-2]} b ap^{[-2]} p} \\ &\overline{ab^{[-2]} b ab^{[-2]} b (cd^{[-2]} d c)}). \quad (5) \end{aligned}$$

С учетом равенств (4), (5), свойства полуабелевости группы G и того, что $\langle a, b, c, d \rangle$ – параллелограмм G , имеем

$$\begin{aligned}
 &= \overline{p(ab^{[-2]}^{2n-4} b c) + (cb^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p(ab^{[-2]}^{2n-4} b c))d} = \\
 &= \overline{p((ab^{[-2]}^{2n-4} b c)(cb^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p ab^{[-2]}^{2n-4} b c)^{[-2]}} \\
 &\quad \underbrace{(cb^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p ab^{[-2]}^{2n-4} b c) \dots d}_{2n-4} = \\
 &= \overline{p(ab^{[-2]}^{2n-4} b cc^{[-2]}^{2n-4} c ba^{[-2]}^{2n-4} a pa^{[-2]}^{2n-4} a bc^{[-2]}^{2n-4} c (ab^{[-2]}^{2n-4} b c))} = \\
 &= \overline{p(pa^{[-2]}^{2n-4} a bc^{[-2]}^{2n-4} c cb^{[-2]}^{2n-4} b a)} = \overline{pp} = \vec{0}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Следовательно, равенство (1) справедливо.
 2. Пусть равенство (1) выполняется. Докажем, что G – полуабелева n -арная группа.
 Поскольку свойство полуабелевости группы G в первом пункте доказательства нами исполь-

зовалось только в равенстве (6), то считаем, что все рассуждения до равенства (6) справедливы.
 Преобразуем (4) и (5) с учетом того, что четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ – параллелограмм G .
 Имеем:

$$\begin{aligned}
 &\overline{p(ab^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b cd^{[-2]}^{2n-4} d c)} = \\
 &= \overline{p(ab^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b c(ab^{[-2]}^{2n-4} b c)^{[-2]} (ab^{[-2]}^{2n-4} b c) \dots c}_{2n-4}} = \\
 &= \overline{p(ab^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b cc^{[-2]}^{2n-4} c ba^{[-2]}^{2n-4} a c)} = \overline{p(ab^{[-2]}^{2n-4} b c)}, \tag{7} \\
 S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p))) &= \overline{(cd^{[-2]}^{2n-4} d cb^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p ab^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b cd^{[-2]}^{2n-4} d c)} = \\
 &= \overline{(c(ab^{[-2]}^{2n-4} b c)^{[-2]} (ab^{[-2]}^{2n-4} b c) \dots cb^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p}_{2n-4}} \\
 &\quad \overline{ab^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b c(ab^{[-2]}^{2n-4} b c)^{[-2]} (ab^{[-2]}^{2n-4} b c) \dots c}_{2n-4}} = \\
 &= \overline{(cc^{[-2]}^{2n-4} c ba^{[-2]}^{2n-4} a cb^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p}_{2n-4}} \\
 &\quad \overline{ab^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b cc^{[-2]}^{2n-4} c ba^{[-2]}^{2n-4} a c)} = \\
 &= \overline{(ba^{[-2]}^{2n-4} a cb^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p ab^{[-2]}^{2n-4} b c)}. \tag{8}
 \end{aligned}$$

С учетом (1), (7) и (8) имеем

$$\begin{aligned}
 &\overline{pa + S_a(p)S_b(a) + S_{S_b(a)}(S_a(p))S_c(d) + S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_a(p)))d} = \\
 &= \overline{p(ab^{[-2]}^{2n-4} b c) + (ba^{[-2]}^{2n-4} a cb^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p ab^{[-2]}^{2n-4} b c)d} = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

Откуда, с учетом теоремы 8 из [7],

$$\begin{aligned}
 &\overline{p((ab^{[-2]}^{2n-4} b c)(ba^{[-2]}^{2n-4} a cb^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p ab^{[-2]}^{2n-4} b c)^{[-2]}} \\
 &\quad \underbrace{(ba^{[-2]}^{2n-4} a cb^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p ab^{[-2]}^{2n-4} b c) \dots d}_{2n-4}} = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

Преобразовывая это равенство получим

$$\begin{aligned}
 &\overline{p(ab^{[-2]}^{2n-4} b cc^{[-2]}^{2n-4} c ba^{[-2]}^{2n-4} a p^{[-2]}^{2n-4} p a^{[-2]}^{2n-4} a}_{2n-4}} \\
 &\quad \overline{b^{[-2]}^{2n-4} b a^{[-2]}^{2n-4} a bc^{[-2]}^{2n-4} c ab^{[-2]}^{2n-4} b d)} = \vec{0},
 \end{aligned}$$

или

$$\overline{p(pa^{[-2]}^{2n-4} a ba^{[-2]}^{2n-4} a bc^{[-2]}^{2n-4} c ab^{[-2]}^{2n-4} b (ab^{[-2]}^{2n-4} b c))} = \overline{pp},$$

Откуда

$$(pa^{[-2]}^{2n-4} a ba^{[-2]}^{2n-4} a bc^{[-2]}^{2n-4} c ab^{[-2]}^{2n-4} b (ab^{[-2]}^{2n-4} b c)) = p. \tag{9}$$

Умножим обе части равенства (9) слева на выражение $cb^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p$. Имеем

$$\begin{aligned}
 &(cb^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p pa^{[-2]}^{2n-4} a b \\
 &\quad a^{[-2]}^{2n-4} a bc^{[-2]}^{2n-4} c ab^{[-2]}^{2n-4} b (ab^{[-2]}^{2n-4} b c)) = \\
 &= (cb^{[-2]}^{2n-4} b ab^{[-2]}^{2n-4} b ap^{[-2]}^{2n-4} p p).
 \end{aligned}$$

Откуда

$$(ab^{[-2]^{2n-4}} b (ab^{[-2]^{2n-4}} b c)) = ((cb^{[-2]^{2n-4}} b a)b^{[-2]^{2n-4}} b a),$$

или

$$((ab^{[-2]^{2n-4}} b a)b^{[-2]^{2n-4}} b c) = (cb^{[-2]^{2n-4}} b (ab^{[-2]^{2n-4}} b a)),$$

или

$$(S_a(b)b^{[-2]^{2n-4}} b c) = (cb^{[-2]^{2n-4}} b S_a(b)). \quad (10)$$

На основании (10) и предложения 1 из [8] заключаем, что G – полуабелева n -арная группа.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть a, b, c – произвольные точки из X , а точка $d \in X$ такая, что четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ – параллелограмм G . n -арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\overrightarrow{pd} + \overrightarrow{S_d(p)S_b(a)} + \overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_d(p))S_c(d)} + \overrightarrow{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_d(p)))S_d(a)} = \vec{0}. \quad (11)$$

Доказательство. 1. Пусть G – полуабелева n -арная группа. Докажем справедливость равенства (11).

Поскольку четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ – параллелограмм G , то, согласно определению 2 из [5],

$$d = (ab^{[-2]^{2n-4}} b c). \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pd} + \overrightarrow{S_d(p)S_b(a)} + \overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_d(p))S_c(d)} &= p(\overrightarrow{pc^{[-2]^{2n-4}} c ba^{[-2]^{2n-4}} a ba^{[-2]^{2n-4}} a b} + \\ &+ \overrightarrow{(ba^{[-2]^{2n-4}} a bd^{[-2]^{2n-4}} d pd^{[-2]^{2n-4}} d ba^{[-2]^{2n-4}} a b)(cd^{[-2]^{2n-4}} d c)} = \\ &= p(\overrightarrow{(pc^{[-2]^{2n-4}} c ba^{[-2]^{2n-4}} a ba^{[-2]^{2n-4}} a b)(ba^{[-2]^{2n-4}} a bd^{[-2]^{2n-4}} d pd^{[-2]^{2n-4}} d ba^{[-2]^{2n-4}} a b)^{[-2]^{2n-4}}} \\ &\quad \overrightarrow{(ba^{[-2]^{2n-4}} a ba^{[-2]^{2n-4}} d pd^{[-2]^{2n-4}} d ba^{[-2]^{2n-4}} a b) \dots (cd^{[-2]^{2n-4}} d c)} = \\ &= p(\overrightarrow{pc^{[-2]^{2n-4}} c ba^{[-2]^{2n-4}} a ba^{[-2]^{2n-4}} a bb^{[-2]^{2n-4}} b ab^{[-2]^{2n-4}} b d} \\ &\quad \overrightarrow{p^{[-2]^{2n-4}} p db^{[-2]^{2n-4}} b ab^{[-2]^{2n-4}} b (cd^{[-2]^{2n-4}} d c)} = \\ &= p(\overrightarrow{pc^{[-2]^{2n-4}} c ba^{[-2]^{2n-4}} a (ab^{[-2]^{2n-4}} b c)p^{[-2]^{2n-4}} p (ab^{[-2]^{2n-4}} b c)b^{[-2]^{2n-4}} b ab^{[-2]^{2n-4}} b} \\ &\quad \overrightarrow{c(ab^{[-2]^{2n-4}} b c)^{[-2]^{2n-4}} (ab^{[-2]^{2n-4}} b c) \dots c} = p(\overrightarrow{ab^{[-2]^{2n-4}} b cb^{[-2]^{2n-4}} b ab^{[-2]^{2n-4}} b cc^{[-2]^{2n-4}} c ba^{[-2]^{2n-4}} a c} = \\ &= p(\overrightarrow{ab^{[-2]^{2n-4}} b cb^{[-2]^{2n-4}} b c}). \end{aligned} \quad (15)$$

Преобразуем выражение $S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_d(p)))$ с учетом равенства (14), определения 4 из [5], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7]

$$\begin{aligned} S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_d(p))) &= S_{S_c(d)}(ba^{[-2]^{2n-4}} a bd^{[-2]^{2n-4}} d pd^{[-2]^{2n-4}} d ba^{[-2]^{2n-4}} a b) = \\ &= (S_c(d)(ba^{[-2]^{2n-4}} a bd^{[-2]^{2n-4}} d pd^{[-2]^{2n-4}} d ba^{[-2]^{2n-4}} a b)^{[-2]^{2n-4}} \\ &\quad \underbrace{(ba^{[-2]^{2n-4}} a bd^{[-2]^{2n-4}} d pd^{[-2]^{2n-4}} d ba^{[-2]^{2n-4}} a b) \dots S_c(d)}_{2n-4}) = \end{aligned}$$

Тогда с учетом теоремы 8 из [7], определения 4 из [5], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7] имеем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pd} + \overrightarrow{S_d(p)S_b(p)} &= \overrightarrow{p(d(S_d(p))^{[-2]^{2n-4}} S_d(p) \dots S_b(a))} = \\ &= \overrightarrow{p(d(dp^{[-2]^{2n-4}} p d)^{[-2]^{2n-4}} (dp^{[-2]^{2n-4}} p d) \dots (ba^{[-2]^{2n-4}} a b))} = \\ &= \overrightarrow{p(dd^{[-2]^{2n-4}} d pd^{[-2]^{2n-4}} d ba^{[-2]^{2n-4}} a b) = p(pd^{[-2]^{2n-4}} d ba^{[-2]^{2n-4}} a b)} = \\ &= \overrightarrow{p(p(ab^{[-2]^{2n-4}} b c)^{[-2]^{2n-4}} (ab^{[-2]^{2n-4}} b c) \dots ba^{[-2]^{2n-4}} a b)} = \\ &= \overrightarrow{p(pc^{[-2]^{2n-4}} c ba^{[-2]^{2n-4}} a ba^{[-2]^{2n-4}} a b)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Преобразуем выражение $S_{S_b(a)}(S_d(p))$ с учетом определения 4 из [5], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7]. Имеем

$$\begin{aligned} S_{S_b(a)}(S_d(p)) &= (S_b(a)(S_d(p))^{[-2]^{2n-4}} S_d(p) \dots S_b(a)) = \\ &= ((ba^{[-2]^{2n-4}} a b)(dp^{[-2]^{2n-4}} p d)^{[-2]^{2n-4}} (dp^{[-2]^{2n-4}} p d) \dots (ba^{[-2]^{2n-4}} a b)) = \\ &= (ba^{[-2]^{2n-4}} a bd^{[-2]^{2n-4}} d pd^{[-2]^{2n-4}} d ba^{[-2]^{2n-4}} a b). \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом равенств (13), (14), теоремы 8 из [7], определения 4 из [5], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7] имеем

$$\begin{aligned}
 &= ((cd^{[-2]^{2n-4}} d^{[-2]^{2n-4}} c)^{b^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} dp^{[-2]^{2n-4}} p^{[-2]^{2n-4}} db^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} (cd^{[-2]^{2n-4}} d^{[-2]^{2n-4}} c)) = \\
 &= ((c(ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)^{[2n-4]} \underbrace{(ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} \dots c)^{b^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} (ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)}_{2n-4}} p^{[-2]^{2n-4}} p^{[-2]^{2n-4}}) = \\
 &\quad (ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)^{b^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} (c(ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)^{[2n-4]} \underbrace{(ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} \dots c)}_{2n-4}) = \\
 &= ((cc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} c)^{b^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cp^{[-2]^{2n-4}} p^{[-2]^{2n-4}}) = \\
 &\quad ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} (cc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} c)) = \\
 &= (ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cp^{[-2]^{2n-4}} p^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c). \tag{16}
 \end{aligned}$$

С учетом равенств (15), (16), свойства полуабелевости группы G и предыдущих рассуждений имеем

$$\begin{aligned}
 &\overrightarrow{pd} + \overrightarrow{S_d(p)S_b(a)} + \overrightarrow{S_{S_b(a)}(S_d(p))S_c(d)} + \overrightarrow{S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_d(p)))S_d(a)} = \\
 &= \overrightarrow{p(ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)} + \overrightarrow{(ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}})} = \\
 &= \overrightarrow{ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cp^{[-2]^{2n-4}} p^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c} \overrightarrow{(da^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} d)} = \\
 &= p(\overrightarrow{(ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)(ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cp^{[-2]^{2n-4}} p^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)} \dots) = \\
 &\quad \overrightarrow{(ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cp^{[-2]^{2n-4}} p^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)} \dots) = \\
 &\quad \overrightarrow{(da^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} d)} = p(\overrightarrow{ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} bc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}})} = \\
 &= \overrightarrow{pc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} bc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} (ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ca^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)} = \\
 &= p(\overrightarrow{pc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} (ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} (ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} (bc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} a) b^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} a) b^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c) b^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)} = \\
 &= p(\overrightarrow{pc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ca^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} aa^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} ac^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} bb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} bb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} bb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)} = \overrightarrow{pp} = \vec{0}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Справедливость равенства (11) установлена.

2. Пусть равенство (11) выполняется. Докажем, что G – полуабелева n -арная группа.

В первой части доказательства свойства полуабелевости мы использовали только в равенстве (17). Поэтому без повторения рассуждений считаем, что равенства (15) и (16) справедливы.

Из (1), (15) и (16) имеем

$$\begin{aligned}
 &\overrightarrow{p(ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)} + \overrightarrow{(ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}})} = \\
 &\overrightarrow{cp^{[-2]^{2n-4}} p^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c} \overrightarrow{(da^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} d)} = \vec{0}. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть равенства (18) с учетом теоремы 8 из [7], равенства 3.28 из [4], предложения 1 из [7]. Имеем

$$\begin{aligned}
 &\overrightarrow{p((ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)(ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}})} = \\
 &\overrightarrow{ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cp^{[-2]^{2n-4}} p^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c} = \overrightarrow{pp}.
 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{p(pc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} bc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)} = \overrightarrow{pp}.$$

$$\overrightarrow{(ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cp^{[-2]^{2n-4}} p^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)} \dots) = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{(da^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} d)} = \vec{0}$$

или

$$\begin{aligned}
 &\overrightarrow{p(ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cb^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} cc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} bc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} pc^{[-2]^{2n-4}} c)} = \\
 &\overrightarrow{ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} bc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} (da^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} d)} = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

С учетом того, что $\langle a, b, c, d \rangle$ – параллелограмм

G и нейтральности последовательностей

$xx^{[-2]^{2n-4}} x$ и $x^{[-2]^{2n-4}} x x$ для любого $x \in X$, имеем

$$\begin{aligned}
 &\overrightarrow{p(pc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} ba^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} bc^{[-2]^{2n-4}} c^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}})} = \\
 &\overrightarrow{(ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} ca^{[-2]^{2n-4}} a^{[-2]^{2n-4}} ab^{[-2]^{2n-4}} b^{[-2]^{2n-4}} c)} = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

Согласно определению 6 из [5] $\vec{0} = \overrightarrow{pp}$ для любой точки $p \in X$, тогда

Из этого равенства следует, что

$$(pc^{[-2]^{2n-4}} c ba^{[-2]^{2n-4}} a ba^{[-2]^{2n-4}} a bc^{[-2]^{2n-4}} c ab^{[-2]^{2n-4}} b ab^{[-2]^{2n-4}} b cb^{[-2]^{2n-4}} b c) = p. \quad (19)$$

Умножим обе части равенства (19) слева на выражение $cb^{[-2]^{2n-4}} b ab^{[-2]^{2n-4}} b ab^{[-2]^{2n-4}} b cp^{[-2]^{2n-4}} p$. Имеем

$$\begin{aligned} & (cb^{[-2]^{2n-4}} b ab^{[-2]^{2n-4}} b ab^{[-2]^{2n-4}} b cp^{[-2]^{2n-4}} p pc^{[-2]^{2n-4}} c b \\ & a^{[-2]^{2n-4}} a ba^{[-2]^{2n-4}} a bc^{[-2]^{2n-4}} c (ab^{[-2]^{2n-4}} b a)b^{[-2]^{2n-4}} b cb^{[-2]^{2n-4}} b c) = \\ & = (cb^{[-2]^{2n-4}} b ab^{[-2]^{2n-4}} b ab^{[-2]^{2n-4}} b cp^{[-2]^{2n-4}} p p). \quad (20) \end{aligned}$$

Откуда, с учетом нейтральности последовательностей,

$$\begin{aligned} & ((ab^{[-2]^{2n-4}} b a)b^{[-2]^{2n-4}} b cb^{[-2]^{2n-4}} b c) = \\ & = (cb^{[-2]^{2n-4}} b (ab^{[-2]^{2n-4}} b a)b^{[-2]^{2n-4}} b c). \quad (21) \end{aligned}$$

Умножим обе части равенства (21) справа на выражение $c^{[-2]^{2n-4}} c b$. Имеем

$$\begin{aligned} & (S_a(b)b^{[-2]^{2n-4}} b cb^{[-2]^{2n-4}} b cc^{[-2]^{2n-4}} c b) = \\ & = (cb^{[-2]^{2n-4}} b S_a(b)b^{[-2]^{2n-4}} b cc^{[-2]^{2n-4}} c b). \quad (22) \end{aligned}$$

Откуда

$$(S_a(b)b^{[-2]^{2n-4}} b c) = (cb^{[-2]^{2n-4}} b S_a(b)). \quad (23)$$

Поскольку a, b, c – произвольные точки из X , то из равенства (23) и на основании предложения 1 из [8] заключаем, что G – полуабелева n -арная группа.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dornte, W. Untersuchugn über einen verallgemeinerten Gruperbergriff / W. Dornte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
2. Post, E.L. Polgadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Prufer, H. Theorie der Abelschen Gruppen I. Grundeigenschaften, Math. Z. – 1924. – Bd. 20. – S. 165–187.
4. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1992. – 264 с.
5. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 182 с.
6. Александров, П.С. Введение в теорию групп / П.С. Александров. – М.: Наука, 1980. – 144 с.
7. Кулаженко, Ю.И. Геометрия параллелограммов / Вопросы алгебры и прикладной математики: сб. науч. тр. / под ред. С.А. Русакова. – Гомель, 1995. – С. 47–64.
8. Кулаженко, Ю.И. Полуабелевость и самосовмещение точек n -арных групп относительно элементов последовательностей вершин четырехугольников / Ю.И. Кулаженко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 2(53). – С. 150–156.

Поступила в редакцию 29.04.2010

Адрес для корреспонденции: 246019, г. Гомель, ул. Советская, д. 104, УО «ГГУ им. Ф. Скорины» – Кулаженко Ю.И.