МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ БАЛКИ

Турок В.Н.,
студент 4 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Буевич А.Э., канд. техн. наук, доцент

Проблема вибрационных нагрузок на конструкции при работе оборудования является одной из ключевых в современном машиностроении. Механический резонанс возникает при совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой колебаний системы, что приводит к резкому росту амплитуды колебаний и может вызвать разрушение конструкции.

Цель работы – разработка математической модели механического резонанса горизонтальной балки при воздействии неуравновешенной массы, закреплённой на оси двигателя с переменной частотой вращения.

Материал и методы. Рассматривается горизонтальная балка длиной L с двумя шарнирными опорами. На балке в точке x=a установлен электродвигатель с неуравновешенной массой m_0, закреплённой на расстоянии r от оси вращения. Частота вращения двигателя ω(t) является функцией времени. Схема расчётной модели приведена на рисунке 1.

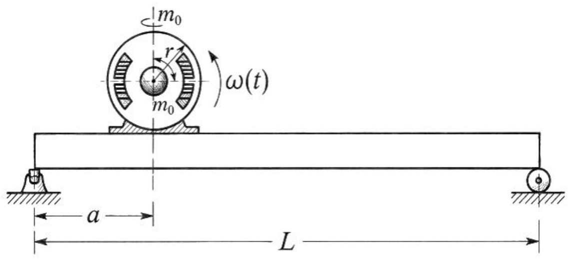

Рисунок 1 – Схема расчётной модели

Схема расчётной модели описывается следующими допущениями:
– балка считается упругим элементом с распределённой массой;
– демпфирование вязкое, пропорциональное скорости;
– деформации подчиняются закону Гука;
– перемещения малы по сравнению с размерами балки.

Уравнение поперечных колебаний балки записывается в виде:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+c\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}=F(x,t),$$

где E – модуль упругости материала, I – момент инерции поперечного сечения, ρ – плотность материала, A – площадь поперечного сечения, c – коэффициент вязкого демпфирования, w(x,t) – функция прогиба балки.

Возмущающая сила от неуравновешенной массы определяется как:

$$F(x,t)=m_0 r\omega^2(t)\sin(\phi(t))\cdot\delta(x-a),$$

где φ(t) – угол поворота вала двигателя, δ(x-a) – дельта-функция Дирака, локализующая силу в точке установки двигателя.

Результаты и их обсуждение. Анализ полученных выражений позволяет выявить следующие закономерности.

1) Условие резонанса. Резонанс наступает при $\omega \approx \omega_n$, ω_n – одна из собственных частот балки В окрестности резонансной частоты знаменатель выражения для Q_n стремится к минимуму, что вызывает резкий рост амплитуды колебаний.

2) Влияние демпфирования. При $\zeta_n \to 0$ амплитуда в резонансе стремится к бесконечности. При наличии демпфирования максимальная амплитуда ограничена:

$$Q_{n,max} = \frac{F_n}{2\zeta_n \omega_n^2}$$

3) Влияние положения двигателя. Амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна sin(nπa/L). При установке двигателя в узле n-й моды (a = L/n, 2L/n, ...) возбуждение этой моды отсутствует.

4) Переменная частота вращения. При разгоне двигателя частота ω(t) изменяется во времени. Уравнение для обобщённой координаты принимает вид:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{2m_0 r}{\rho AL}\cdot\omega^2(t)\sin\left(\int_0^t \omega(\tau)d\tau\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

При линейном законе разгона ω(t) = εt, где ε — угловое ускорение, получаем:

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{2m_0 r\varepsilon^2 t^2}{\rho AL}\sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon t^2\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

Данное уравнение не имеет аналитического решения в замкнутой форме и требует численного интегрирования.

5) Амплитудно-частотная характеристика. Безразмерная амплитуда колебаний определяется соотношением:

$$A(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

где $\Omega = \omega/\omega_n$ — безразмерная частота.

6) Фазовая характеристика. При $\omega << \omega_n$ фаза $\psi \approx 0$ (колебания в фазе с силой). При $\omega >> \omega_n$ фаза $\psi \approx \pi$ (колебания в противофазе). В резонансе $\psi = \pi/2$ независимо от величины демпфирования.

7) Добротность системы. Добротность Q характеризует остроту резонанса:

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{\omega_n}{\Delta\omega}$$

где Δω – ширина резонансной кривой на уровне 0,707 от максимума.

Заключение. Разработана математическая модель вынужденных колебаний горизонтальной балки под действием неуравновешенной вращающейся массы с вязким демпфированием.

Установлено, что резонанс наступает при совпадении частоты вращения двигателя с одной из собственных частот балки ω_n.

Для режима переменной частоты вращения получено дифференциальное уравнение, найдено численное решение при линейном разгоне.

Результаты моделирования могут быть использованы для расчёта допустимых режимов работы оборудования с вращающимися элементами, выбора параметров виброзащиты и оценки динамической прочности конструкций.

СИСТЕМА МОНИТОРИНГА И ДОСТУПНОСТИ ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЙ

Тын-Лай-Си А.С.

студентка 4 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Никитин А.И., канд. физ.-мат. наук, доцент

В условиях активного развития цифровых технологий и роста числа веб-приложений и API их стабильная работа становится критически важной для бизнеса, образовательных платформ и государственных сервисов. Сбои и простои веб-сервисов приводят к финансовым потерям, ухудшению пользовательского опыта и снижению доверия к платформам. Согласно аналитическим отчётам ведущих облачных провайдеров, среднегодовое время недоступности даже крупных сервисов может достигать нескольких