

Называется *формационной σ -функцией* (см. [3]) и полагают

$$LF_{\sigma}(f) = (G \mid G = 1 \text{ либо } G \neq 1 \text{ и } G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$ для некоторой формационной σ -функции f , то \mathfrak{F} называют *σ -локальной формацией с σ -локальным заданием f* (см. [3]).

Полагают, что всякая формация считается *0-кратно σ -локальной*. При $n \geq 1$ формация \mathfrak{F} называется *n -кратно σ -локальной*, если либо $\mathfrak{F} = (1)$ – класс всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$, где $f(\sigma_i)$ является $(n - 1)$ -кратно σ -локальными формациями для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$. Для произвольной n -кратно σ -локальной формации \mathfrak{F} через $L_n^{\sigma}(\mathfrak{F})$ будем обозначать решетку всех n -кратно σ -локальных подформаций из \mathfrak{F} .

Опираясь на результаты работы [4], нами доказана следующая

Теорема. Пусть P – некоторое фиксированное бесконечное подмножество из σ . \mathfrak{S} – такая формация, что $\sigma(\mathfrak{S}) \subseteq P$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_P \mathfrak{S}$. Тогда для любых целых неотрицательных чисел m и n множества тождеств решеток $L_m^{\sigma}(\mathfrak{S})$ и $L_n^{\sigma}(\mathfrak{S})$ совпадают.

Следствие 1 [5]. Пусть n – целое положительное число. Тогда всякое тождество, справедливое в решетке всех формаций l_0^{σ} , выполняется и в решетке всех n -кратно σ -локальных формаций l_n^{σ} .

Согласно [3, теорема 1.15], решетка l_n^{σ} модулярна.

Следствие 2 [5]. Решетка всех n -кратно σ -локальных формаций l_n^{σ} модулярна, но не дистрибутивна для любого целого неотрицательного n .

Следствие 3. Пусть $n \geq 1$. Тогда если σ – бесконечное множество, то системы тождеств решеток l_0^{σ} и l_n^{σ} совпадают.

Следствие 4. Пусть σ – бесконечное множество. Тогда для любых целых неотрицательных m и n решетки l_m^{σ} и l_n^{σ} имеют одну и ту же систему тождеств.

В случае $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ из основного результата получаем два известных результата А.Н. Скибы:

Следствие 5 [2]. При любых целых неотрицательных m и n множества тождеств решеток l_m и l_n совпадают.

Следствие 6 [2]. Решетка всех n -кратно локальных формаций l_n модулярна, но не дистрибутивна для любого целого неотрицательного n .

Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор Ф24У-009 от 2 мая 2024 г.; № гос. регистрации 20241416).

1 Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).

2 Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

3 Chi, Zhang On n -multiply y -local formations of finite groups / Zhang Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol 47, №3. – P. 957–968.

4 Воробьев, Н.Н. Отделимые решетки k -кратно y -локальных формаций / Н.Н. Воробьев, И.И. Стаселько, А.О. Ходжагулыев // Сибирский матем. журн. – 2021. – Т. 62, №4. – С. 721–735.

5 Tsarev, A.A. Laws of the lattices of y -local formations of finite groups / A.A. Tsarev // Mediterr. J. Math. – 2020. – Vol. 17, №3. – Paper №75 (13 pages).

АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЕТА ИНЕРЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗВЕНЬЕВ

Другаков А.О., Пестун Д.А.,

студенты 4 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Бувич Т.В., канд. техн. наук, доцент

Современные задачи проектирования механизмов, включая роботизированные манипуляторы, станки с ЧПУ и приводы энергетического оборудования, требуют учёта пространственной динамики звеньев, особенно при наличии отклонений от симметрии, переменной ориентации и высоких угловых скоростей. Классические подходы, основанные на методе приведения по кинетической энергии, предполагают упрощённое представле-

ние звеньев как симметричных тел или материальных точек, что приводит к пренебрежению моментами инерции и недооценке динамических нагрузок до 18–22%.

Целью исследования является разработка и программная реализация аналитического алгоритма для автоматизированного расчёта моментов инерции и приведённых инерционных параметров многозвенных рычажных механизмов с несимметричными звеньями для повышения точности динамических моделей, используемых при проектировании машин.

Материал и методы. Объектом исследования является плоский рычажный механизм, состоящий из N звеньев, образующих кинематическую цепь с n степенями свободы, где каждое звено характеризуется массой m_i , положением центра масс r_{ci} и тензором инерции J_i , заданным в локальной системе координат, жёстко связанной с центром масс. Задача – определить геометрические параметры звеньев (длины, углы, положения центров масс) и их инерционные свойства (моменты инерции относительно осей, проходящих через центр масс).

Результаты и их обсуждение. Метод основан на последовательном применении принципа кинематического преобразования тензора инерции в глобальную систему координат. Далее перечислены этапы процедуры расчёта.

1) Построение кинематической схемы и определение обобщённых координат. Механизм разбивается на структурные группы Ассура. Для каждого звена i определяются обобщённые координаты q_j , описывающие его положение и ориентацию в глобальной системе координат ОХУ.

2) Расчёт локального тензора инерции. Для каждого звена i в его локальной системе координат, связанной с центром масс C_i , вычисляется тензор инерции:

$$\mathbf{J}_i^{\text{local}} = \begin{bmatrix} J_{xx}^i & -J_{xy}^i & -J_{xz}^i \\ -J_{yx}^i & J_{yy}^i & -J_{yz}^i \\ -J_{zx}^i & -J_{zy}^i & J_{zz}^i \end{bmatrix},$$

где $J_{xx}^i, J_{yy}^i, J_{zz}^i$ – главные моменты инерции, а $J_{xy}^i, J_{xz}^i, J_{yz}^i$ – центробежные моменты инерции, рассчитанные для произвольного твёрдого тела по формулам аналитической геометрии.

3) Кинематическое преобразование в глобальную систему координат. Тензор инерции звена i преобразуется в глобальную систему координат с использованием матрицы поворота $\mathbf{R}_i(\mathbf{q})$, зависящей от обобщённых координат.

$$\mathbf{J}_i^{\text{global}}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}_i(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{J}_i^{\text{local}} \cdot \mathbf{R}_i^T(\mathbf{q}),$$

где $\mathbf{R}_i^T(\mathbf{q})$ – ортогональная матрица поворота, формируемая на основе углов ориентации звена, определённых из кинематического анализа.

4) Суммирование вкладов звеньев. Полный тензор инерции системы относительно глобальной системы координат является суммой вкладов всех звеньев:

$$\mathbf{J}_{\text{sys}}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i^{\text{global}}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_{\text{actuator}}^{\text{reflected}},$$

где $\mathbf{J}_{\text{actuator}}^{\text{reflected}}$ – приведённый тензор инерции привода, отражённый через кинематическую цепь.

5) Вычисление приведённых инерционных параметров. Приведённый момент инерции относительно обобщённой координаты определяется через производные скоростей центров масс и угловых скоростей звеньев:

$$J_{\text{red},j}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{Ci}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \cdot m_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{Ci}}{\partial \dot{q}_j} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \cdot \mathbf{J}_i^{\text{global}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j},$$

где v_{Ci} – линейная скорость центра масс звена i , $\boldsymbol{\omega}_i$ – его угловая скорость, выраженные через обобщённые скорости \dot{q}_j .

Для реализации алгоритма использован программный комплекс Maple 2025 с применением символьных вычислений. Вычислительное ядро реализовано в виде модуля, принимающего на вход: геометрические параметры звеньев; массы и моменты инерции; кинематические связи (тип кинематических пар, положение неподвижных опор). На выходе система генерирует: аналитические выражения и численные значения приведённых моментов инерции для любого положения механизма; графики изменения приведенного момента инерции в пределах одного цикла движения.

Верификация проводилась путём сравнения результатов с результатами ручного расчёта по методу планов сил для шести положений механизма. Автоматизированный метод не только повышает точность, но и снижает трудоёмкость расчёта: если ручной расчёт одного положения занимает 2–3 часа с проверкой, то автоматизированная система выдаёт результат для 24-х положений механизма за 12 секунд. Это особенно критично для задач оптимизации конструкции, где требуется анализ сотен вариантов геометрии.

Заключение. Проведённое исследование подтверждает, что автоматизация расчёта инерционных характеристик звеньев механизмов позволяет существенно повысить точность динамических моделей, устраняя систематическую ошибку методов приведения по кинетической энергии. Предложенный алгоритм, реализованный в символьной среде Maple, обеспечивает автоматизированное получение точных аналитических выражений для приведённого момента инерции и тензора инерции системы как функций обобщённых координат, без численного дифференцирования или аппроксимации.

СОЗДАНИЕ ПОЛНОКУПОЛЬНЫХ ФИЛЬМОВ: ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ И СПЕЦИФИКА ВИЗУАЛЬНОГО ЯЗЫКА

Дубницкий И.Ф.,

студент 3 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Денисенко Т.А., ст. преподаватель

Полнокупольные фильмы являются современным элементом образовательных программ планетариев, позволяя достигать более полного погружения в визуальную среду. Подобный формат открывает новые возможности для демонстрации научных материалов и придает большую наглядность учебным и научно-популярным фильмам. В Витебской области функционируют четыре планетария: в ВГУ имени П.М. Машерова; в Гимназии № 1 г. Витебска имени Ж.И. Алфёрова, а также школьные планетарии Новкинской и Кировской средних школ Витебского района. Витебские планетарии активно показывают полнокупольные фильмы, однако почти все они – иностранного производства. Такие видео впечатляют графикой, но их содержание не всегда отвечает образовательным задачам. При этом растёт спрос на отечественную продукцию. Видится перспективным создавать фильмы своими силами и на собственные темы. Чтобы реализовать этот замысел, важно изучить технологии производства: освоить методы и специфику создания полнокупольного видео.

Цель работы – систематизация знаний о технологических и художественных принципах производства полнокупольных фильмов.

Материал и методы. Теоретической базой исследования послужили научные публикации по технологиям сферической проекции, материалы профессиональных сообществ создателей full-dome фильмов, а также техническая документация программных продуктов [1; 2; 3]. В ходе работы применялись методы анализа и обобщения техниче-