КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Горстукова Е.С., Юферов К.К.,
студенты 3 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Иванова Ж.В., канд. физ.-мат. наук, доцент

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -3kx + y + 2kx^2 = P(x,y), \\ \dot{y} = -6x - 3ky + 6x^2 + 3kxy = Q(x,y), \end{cases} \quad (1)$$

где $k \neq 0, x, y \in R$.

Качественное исследование систем вида (1) имеет большое значение в анализе динамических процессов, возникающих в прикладных науках, которые описывают эволюцию объектов без явной зависимости от времени. Полученные результаты дают возможность понять текущее поведение системы и прогнозировать дальнейшее развитие процесса.

Целью исследования является качественный анализ автономной системы дифференциальных уравнений вида (1): рассмотрение условия, при котором функция $F(x,y) = 0$ является частным интегралом системы; поиск состояния равновесия системы и определение их характера.

Материал и методы. Материал исследования – автономные системы дифференциальных уравнений. Методами исследования являются методы качественного анализа систем дифференциальных уравнений, изложенные в [1; 2].

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим функцию

$$F(x,y) = y^2 - 2x^2(2x-3) = 0. \quad (2)$$

Функция (2) является частным интегралом системы (1), если выполняется равенство

$$F_x^{'} \cdot P(x,y) + F_y^{'} \cdot Q(x,y) = F(x,y) \cdot L(x,y), \quad (3)$$

где $L(x,y) = 0$ – некоторая прямая $ax + by + c = 0$ (a, b, c – коэффициенты, выраженные через коэффициенты системы).

Действительно,

$$F_x^{'} \cdot P(x,y) + F_y^{'} \cdot Q(x,y) = (-12x^2 + 12x)(-3kx + y + 2kx^2) +$$
$$+2y(-6x - 3ky + 6x^2 + 3kxy) = 6k\big(y^2 - 2x^2(2x-3)\big)(x-1) =>$$
$$=> L(x,y) = 6k(x-1).$$

Равенство (3) выполняется. Следовательно, функция (2) – частный интеграл системы (1).

Найдём состояния равновесия системы (1). Это точки, для которых $P(x,y) = 0$ и $Q(x,y) = 0$. Получим: O (0; 0), A (1; k), $B\left(\frac{3k^2+2}{2k^2}; -\frac{3k^2+2}{k^3}\right)$. Определим их тип с помощью характеристического уравнения

$$\det(J - \lambda I) = 0, \quad (4)$$

где I – единичная матрица, J – матрица Якоби

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3k + 4kx & 1 \\ -6 + 12x + 3ky & -3k + 3kx \end{pmatrix}.$$

Для точки O (0; 0) уравнение (4) имеет вид:

$$\lambda^2 + 6k\lambda + 9k^2 + 6 = 0,$$

корни которого $\lambda_{1,2} = -3k \pm i\sqrt{6}$ являются комплексными числами. Так как $\operatorname{Re}\lambda = -3k$, $\operatorname{Im}\lambda = \pm\sqrt{6}$, то при $k > 0$ точка O будет устойчивым фокусом, при $k < 0$ – неустойчивым фокусом.

Для точки A (1; k) получим следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - k\lambda - (3k^2 + 6) = 0,$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{24 + 13k^2}}{2}.$$

Так как $\lambda_{1,2}$ – действительные числа и $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ для всех значений параметра k, то точка A является седлом.

Для точки $B\left(\frac{3k^2+2}{2k^2}; -\frac{3k^2+2}{k^3}\right)$ получим:

$$\lambda^2 - \frac{9k^2 + 14}{2k}\lambda + \frac{9k^4 + 24k^2 + 12}{2k^2} = 0.$$

Это квадратное уравнение. Вычислим его дискриминант:

$$D = \left(\frac{9k^2 + 14}{2k}\right)^2 - 4 \cdot \frac{9k^4 + 24k^2 + 12}{2k^2} = \frac{9k^4 + 60k^2 + 24}{k^2} = \frac{9k^2}{4} + 15 + \frac{25}{k^2}.$$

Поскольку $D > 0$ при всех $k \neq 0$, то собственные значения λ_1 и λ_2 – вещественные числа. Через теорему Виета узнаем знаки корней и их сумму

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{9k^4+24k^2+12}{2k^2} > 0, \quad (5)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{9k^2+14}{2k}. \quad (6)$$

Из неравенства (5) получаем, что корни одного знака. Из равенства (6) следует, что $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ при $k > 0$ и точка B будет являться неустойчивым узлом, $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ при $k < 0$ и точка будет устойчивым седлом.

Заключение. В предоставленной работе найдены состояния равновесия, лежащие в конечной части плоскости, и частный интеграл системы (1); определен характер состояний равновесия.

1 Андронов, А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. — М.: Наука, 1996. – 568 с.

2 Иванова, Ж.В. Качественное исследование одной автономной системы дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными правыми частями / Ж.В. Иванова, А.В. Перхальский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. -2025. - №4 (129). – С. 5-12.

ТОЖДЕСТВА РЕШЕТОК КРАТНО ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РАЗБИЕНИЯМИ МНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Гриневская А.А., Лятос А.И.,

магистранты 2 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Воробьёв Н.Н., доктор физ.-мат. наук, профессор

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–3]. Напомним, что класс групп называется *формацией*, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Символом σ обозначают некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Если G – группа, то $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \mathrm{p}(G) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\sigma(G)$.

Группа G называется *σ-примарной* [3], если G является σ_i-группой для некоторого i; *σ-разрешимой* [3], если $G = 1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор группы G является σ-примарным. Главный фактор H/K группы G называется: *σ-центральным* в группе G, если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарным. Группа G называется *σ-нильпотентной* [3], если каждый главный фактор группы G является σ-центральным; σ_i*-нильпотентной* [3], если каждый главный фактор H/K группы G такой, что $\sigma_i \cap \sigma(H/K) \neq \emptyset$ является σ-центральным. Символ $F_{\sigma_i}(G)$ обозначает произведение всех нормальных $\{\sigma_i\}$-нильпотентных подгрупп группы G.

Всякая функция f вида

$$f\colon \sigma \to \{\text{формации групп}\}$$