на расширение функционала тренажёра за счёт добавления других измерительных приборов (линейка, штангенциркуль, микрометр) и внедрения адаптивной системы подбора заданий на основе анализа индивидуальных результатов обучающегося. Планируется апробация разработанного программного комплекса в учебном процессе ВГУ имени П.М. Машерова в рамках учебных дисциплин «Информационные технологии в образовании» и «Методика обучения физике».

1 Образовательная платформа "Электронная физика" [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://efizika.ru (дата обращения: 01.03.2026). – Текст: электронный.

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА КАК ИНСТРУМЕНТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Горбачев Д.Н., Скоромец И.С.,
студенты 4 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Чернявский М.М., ст. преподаватель

Современное развитие науки и техники требует создания точных математических моделей сложных физических процессов. Колебательные явления занимают особое место, встречаясь в механике, акустике, электродинамике. Математически такие процессы описываются системами линейных дифференциальных уравнений с краевыми условиями. Метод функций Грина является эффективным способом решения подобных задач, позволяя свести дифференциальную задачу к интегральному уравнению, что упрощает аналитическое и численное исследование [1–3].

Цель исследования – демонстрация возможностей метода функций Грина для моделирования периодических колебаний, анализ его свойств и практическая реализация.

Материал и методы. Материалами для исследования послужили научные и учебно-методические публикации по теории дифференциальных уравнений, методам функций Грина и математическому моделированию колебательных процессов, а также учебные пособия по работе в среде математического моделирования Maple [4].

Результаты и их обсуждение. Функция Грина $G(x, s)$ для линейного дифференциального оператора L определяется решением уравнения $LG(x, s) = \delta(x - s)$ с однородными краевыми условиями, где δ – дельта-функция Дирака. Физический смысл функции Грина – отклик системы в точке x на единичное импульсное воздействие в точке s. Зная функцию Грина, решение неоднородного уравнения $Ly = f(x)$ находится в виде интегральной свертки:

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds.$$

В контексте математического моделирования метод позволяет исследовать реакцию сложной структуры на произвольное внешнее воздействие $f(x)$, что ценно при проектировании и анализе устойчивости конструкций.

Для системы дифференциальных уравнений второго порядка метод обобщается на векторный случай. Рассмотрим систему, описывающую вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы:

$$\begin{cases} y_1'' + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = f_1(x), \\ y_1'' + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = f_2(x). \end{cases}$$

Решение может быть найдено с помощью матрицы функций Грина, где каждый элемент $G_{ij}(x,s)$ представляет влияние источника в j-й компоненте на i-ю компоненту решения.

Особый интерес для теории колебаний представляет случай комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Функция Грина приобретает осцилляторный характер:

$$G(x,s) \sim e^{\alpha(x-s)} \sin(\beta(x-s)),$$

что отражает наличие в системе собственных колебаний с частотой β, которые могут затухать (при α < 0) или нарастать (при α > 0). Анализ функции Грина позволяет сделать вывод об устойчивости моделируемой системы.

В качестве иллюстрации рассмотрим краевую задачу для уравнения второго порядка, моделирующего вынужденные колебания струны:

$$-u''(x)+u(x) = f(x), \quad u(0)=0,\ u(1)=0.$$

Решение реализовано в среде Maple. Функция Грина построена аналитически, получено решение в интегральной форме. На рисунке 1 представлен график решения для заданной правой части f(x), демонстрирующий характер колебаний под действием внешней силы.

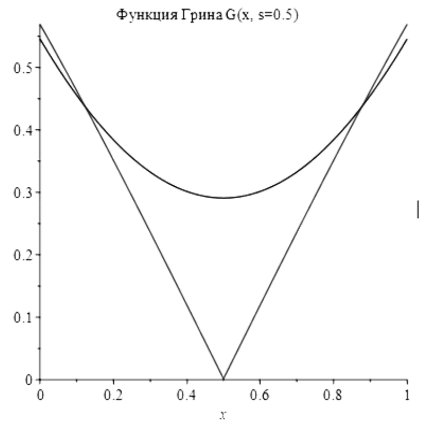

Рисунок 1 – График решения краевой задачи, полученный методом функций Грина в среде Maple

Заключение. Проведенное исследование подтверждает, что метод функций Грина является гибким инструментом математического моделирования. Его основные преимущества: универсальность: применим к широкому классу линейных систем, включая задачи с распределенными параметрами; физическая наглядность: функция Грина имеет ясный физический смысл, что облегчает интерпретацию результатов; конструктивность: позволяет получать решение в замкнутой интегральной форме, удобной для анализа и численных расчетов; алгоритмизация: метод легко реализуется в пакетах символьных вычислений (Maple, Mathematica), что делает его доступным для инженерной практики и образования.

Использование метода способствует формированию у студентов понимания связи между математическим описанием и физической сущностью процессов, что важно для подготовки специалистов в области прикладной математики и инженерии. Перспективы дальнейших исследований связаны с применением метода для нестационарных и нелинейных задач, а также для оптимизации параметров динамических систем.

1 Трубников, Ю. В. Уравнения математической физики. Методы операционного исчисления и функции Грина : курс лекций / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский. – Текст : электронный // Репозиторий ВГУ имени П. М. Машерова. – URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/44196 (дата обращения: 05.03.2026). – Электрон. копия печ. изд. : Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2024. – 2024. – 91, [1] с. : ил. – Библиогр.: с. 91.

2 Волков, В. Е. Функция Грина самосопряженной краевой задачи второго порядка : учеб.-мет. пособие / В. Е. Волков, Е. В. Сумин. – Москва : НИЯУ МИФИ, 2012. – 20 с.

3 Луценко, А. В. Функция Грина и ее применение : метод. пособие / А. В. Луценко, В. А. Скорик. – Харьков : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2013. – 28 с.

4 Корольков, О. Г. Maple: теория и практика : моногр. / О. Г. Корольков. – Воронеж : ВГУ, 2006. – 47 с.