Секция 4
НАУКА ЮНЫХ

П.И. АЛЬШАНИКОВ
Научный руководитель – А.А. Гриневская
Республика Беларусь, Витебск, Лицей ВГУ имени П.М. Машерова

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ШПРАГА-ГРАНДИ ДЛЯ ПОЛЕЙ N×N

Введение. Теорема Шпрага-Гранди была сформулирована в 1930-х годах независимо Р. Шпрагом и П. М. Гранди. Она описывает так называемые равноправные игры двух игроков, т. е. игры, в которых соблюдаются следующие условия:

1; Игра конечна.

2; В игре победа одного игрока означает поражение другого.

3; Игроки обладают всей информацией о состоянии соперника.

В качестве примера таких игр можно привести игру Ним, Баше и прочие. В классическом случае игры Шпрага-Гранди полоска из n клеток делится на две независимые игры с меньшим, чем n количеством клеток, после каждого хода любого из игроков.

Данная работа рассматривает классические случай игры Шпрага-Гранди, расчеты для нескольких первых n, а так же представляет решение для расширенной версии указанной игры, в которой игроки играют на двумерном поле размером n×n. Вместо линейных полосок мы рассматриваем квадратную решетку, где ход игрока заключается в размещении фишек в некоторой клетке (i; j), после чего становятся недоступны для хода следующего игрока клетки (i+1; j), (i-1; j), (i; j+1), (i; j-1), т.е. клетки, с которыми выбранная позиция имеет общую сторону.

Основная часть. Перед рассмотрением двумерной модели игры необходимо ввести несколько фундаментальных понятий и рассмотреть более простой случай игры, игру $n \times n$.

Напомним, что в рассматриваемых играх проигравший игрок определяется отсутствием позиции для следующего хода. Будем в дальнейшем называть такие игры играми Шпрага-Гранди. Позиции в играх такого типа можно классифицировать следующим образом: позиция считается выигрышной, если из нее можно сделать ход в проигрышную позицию, и проигрышная в противном случае. По этому правилу можно однозначно классифицировать позиции. Каждой позиции поставим в соответствие некое неотрицательное число (правило присваивания числа будет описано позднее). В частности, позиции, в которых вообще нельзя сделать ход, получают нулевую оценку. Легко видеть, что позиция считается проигрышной, если из нее нельзя сделать ход в проигрышную позицию.

Лемма 1 [1, с.38].

Позиция имеет оценку 0 тогда и только тогда, когда она является проигрышной.

Ранее было сказано, что после каждого хода игра разделяется на две независимые игры. Определим сумму двух игр.

Определение 1 [2, с. 7].

Сумма двух игр g и h – это игра, позиции в которой суть пары (позиция в g и позиция в h), а каждый ход является либо ходом в игре g, либо ходом в игре h.

Таким образом, позиция в игре-сумме представляет собой пару (P, Q), где P – позиция в первой игре-сумме g, а Q – в игре-сумме h. Из позиции (P, Q) можно перейти в позицию (P', Q) для любой позиции P', в которую можно пойти из P, а также в позицию (P, Q') для любой позиции Q', в которую можно перейти из Q.

Теорема 1 [1, с.40].

Оценка позиции (P, Q) в сумме двух игр равна побитовой сумме оценок позиций P и Q.

Иначе говоря, если позиция P в игре g имеет оценку p, а позиция Q в игре h имеет оценку p, то позиция (P, Q) в сумме игр будет иметь оценку $p \oplus q$.

Рассмотрим свойства введенной операции.

Лемма 2 [1, 39].

Для операции $\oplus$ справедливы следующие свойства:

1; Если $m' \neq m$, то $m \oplus n \neq m' \oplus n$ для любого n.

2; Если $n' \neq n$, то $m \oplus n \neq m \oplus n'$ при любом m.

3; Если $k < m \oplus n$, то $k = m' \oplus n$ для некоторого $m' < m$ или $k = m \oplus n'$ для некоторого $n' < n$.

Следствие 1 [1, с.41].

Позиция (P, Q) в сумме игр является проигрышной тогда и только тогда, когда $p=q$, где p – оценка позиции P в игре g, а q – оценка позиции Q в игре h.

Действительно, $p \oplus q = 0$ равносильно $p=q$.

В частности, если мы играем на обеих досках одну и ту же игру, то симметричная позиция будет являться проигрышной. Таким образом позиция игрока, оценка которой не ровна 0, является выигрышной.

Одним из простейших примеров описываемых выше игр является игра Ним. Её суть заключается в следующем. Есть несколько кучек, в каждой из которых по нескольку камней. За один ход игрок может взять из какой-нибудь одной кучки любое ненулевое число камней и выбросить их. Соответственно, проигрыш наступает, когда ходов больше не осталось, т. е. все кучки пусты.

Решение этой игры опубликовал в 1901 году Чарльз Бутон.

Теорема 2.

Текущий игрок имеет выигрышную стратегию тогда и только тогда, когда побитовая сумма размеров кучек отлична от нуля. В противном случае текущий игрок находится в проигрышном состоянии.

Теорема Шпрага-Гранди.

Рассмотрим любое состояние v некоторой равноправной игры двух игроков. Пусть из него есть переходы в некоторые состояния v_i $(i=1 \dots k)$ (где k≥0). Утверждается, что состоянию v этой игры можно поставить в соответствие кучку нима некоторого размера x. Число x называется значением Шпрага-Гранди состояния v.

Более того, это число x можно находить следующим рекурсивным образом: посчитаем значение Шпрага-Гранди x_i по каждому переходу (v, v_i), и тогда выполняется:

$x = mex\{x_1 \dots x_k\}$

где функция mex от множества чисел возвращает наименьшее неотрицательное число, не встречающееся в этом множестве.

Обобщение теоремы Шпрага-Гранди для игры на поле 1×n

Рассмотрим следующую игру. Игроки играют на клетчатой полоске размера 1×n клеток. За один ход игроку надо поставить один крестик, но при этом запрещено ставить два крестика рядом (в соседние клетки). Проигрывает тот, кто не может совершить ход.

Когда игрок ставит крестик в какую-либо клетку, можно считать, что вся полоска распадается на 2 независимые половины: слева от крестика и справа от неё. При этом сама клетка, в которой находится крестик, а также 1 клетка справа и 1 клетка слева «уничтожаются».

Пронумеруем клетки от 1 до n, крестик ставится в позиции 1<i<n – полоска распадается на 2 отрезка, длины которых i-2 и n-i-1. Мы переходим в сумму двух игр i-2 и n-i-1. Если же монетку ставят в позицию 1 или n – мы переходим к состоянию n-2.

Таким образом функция Шпрага-Гранди принимает вид:

$g[n] = mex\ \{g[n\text{-}2], i{=}2n\text{-}1(g[i\text{-}2] \oplus g[n\text{-}i\text{-}1])\}, n \geq 3$

Если g[n]≠0, то выиграет первый игрок, если g[n]=0, то первый игрок проиграет, значит выиграет второй игрок.

Легко видеть, что

$g[0] = 0,$

$g[1] = 1,$

$g[2] = 1,$

Рассчитаем несколько первых значений функции Шпрага-Гранди.

$g[3]{=}mex\{g[1], |\quad |i{=}2| \quad |2(g[i\text{-}2]{+}g[n\text{-}i\text{-}1])\}{=}$

$=mex\{g[1], g[0] \oplus g[0]\}{=}mex\{1{,}0\}{=}\ 2 \neq 0$ – выиграет первый игрок.

$g[4]{=}mex\{g[2], |\quad |i{=}2| \quad |3(g[i\text{-}2] \oplus g[n\text{-}i\text{-}1])\}{=}$

$=mex\{g[2], g[0] \oplus g[1], g[1] \oplus g[0]\}{=}mex\{1, 1, 1\}{=}\ 0$– выиграет второй игрок.

$g[5]{=}mex\{g[3], |\quad |i{=}2| \quad |4(g[i\text{-}2] \oplus g[n\text{-}i\text{-}1])\}{=}$

$=mex\{g[3], g[0] \oplus g[2], g[1] \oplus g[1], g[2] \oplus g[0]\}{=}mex\{2, 1, 0, 1\}{=}$

$= 3 \neq 0$– выиграет первый игрок.

$g[6]$=$mex\{g[4],|\quad|i$=2$|\quad|5(g[i$-2$] \oplus g[n$-i-1$])\}$=

=$mex\{g[4], g[0] \oplus g[3], g[1] \oplus g[2], g[2] \oplus g[1], g[3] \oplus g[0]\}$=

=$mex\{0,1,0,1\} = 2 \neq 0$– выиграет первый игрок.

Обобщение теоремы Шпрага-Гранди для поля n×n

Рассмотрим усложнение приведенной выше задачи. Пусть теперь два человека играют на поле размера n×n клеток. При этом, если игрок ставит крестик в позицию (i; j), при том $1<i<n$, $1<j<n$, то «уничтожается» сама клетка, клетки справа, слева, снизу и сверху от нее. Так же присутствуют краевые позиции:

1; При постановке крестика в позицию (1; 1) «уничтожаются» правая и нижняя клетки;

2; При постановке в позицию (1; n) «уничтожается» левая и нижняя клетки;

3; При постановке в позицию (n; 1) «уничтожаются» верхняя и правая клетки;

4; При постановке в позицию (n; n) «уничтожаются» верхняя и левая клетки;

5; Для клеток (1; j), где $1<j<n$, «уничтожаются» нижняя, правая и левая клетки;

6; Для клеток (n; j), где $1<j<n$, «уничтожаются» верхняя, правая и левая клетки;

7; Для клеток (i; 1), где $1<i<n$, «уничтожаются» верхняя, нижняя и правая клетки;

8; Для клеток (i; n), где $1<i<n$, «уничтожаются» верхняя, нижняя и левая клетки;

Представив данную задачу при помощи таблицы, легко видеть (рисунок 1), что при четном n данную задачу можно разбить на 4 задачи размерности $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$.

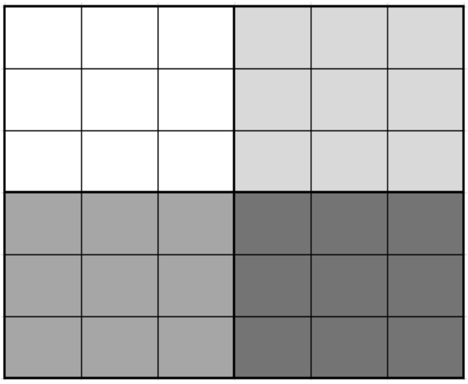

Рисунок 1. – Разбиение игры равномерности n×n, где n – четное

Таким образом у второго игрока всегда есть возможность сделать ход, который будет симметричен ходу первого игрока относительно центра поля. Таким образом последний ход всегда будет совершен игроком 2, а значит первого игрока ждет проигрыш.

Аналогично, если n является нечетным (рис2), то мы получаем ситуацию, в которой клетки симметричны относительно центральной клетки ($\frac{n+1}{2}$; $\frac{n+1}{2}$), а значит теперь у первого игрока появляется возможность поставить первый крестик в центральную клетку, а затем ходить симметрично ходам второго игрока. Таким образом, последний ход делает первый игрок, а значит второй игрок проигрывает.

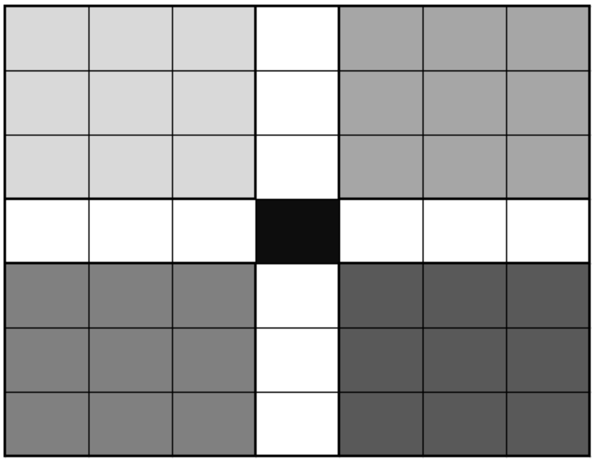

Рисунок 2. – Разбиение игры равномерности n×n, где n – нечетное

Из вышесказанного можно сделать вывод, что при четном n всегда стратегия есть у второго игрока, а при нечетном n стратегия есть у первого игрока.

Заключение. В ходе данной исследовательской работы были рассмотрены две модели игр. Для одномерной игры была рассмотрена теорема Шпрага-Гранди и рассчитаны некоторые значения функции для разных n. Для двумерной игры $n \times n$ были описаны две стратегии игры ведущие в случае $n=2k$ к победе второго игрока, а в случае $n=2k+1$ к победе первого игрока.

Следующим расширением этой игры являются случаю поля n×m, где $n \neq m$, а также случай, когда изменены условия постановки крестиков. Например: удаляются не только по одной соседствующей клетке, но и те, что находятся накрест или же на некотором расстоянии от выбранного положения.

Список использованных источников

1. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики / А. Шень. – М.: МЦНМО, 2022. – 56 с.
2. Деорнуа П. Комбинаторная теория игр / П. Деорнуа. – М.: МЦНМО, 2017. – 40 с.