УДК 517.936:977.1

Задача континуум-управляемости линейных стационарных систем Пфаффа

О.В. Храмцов

Учреждение образования «Витебский государственный

университет им. П.М. Машерова»

В данной работе продолжается изучение свойства управляемости для линейных стационарных систем Пфаффа. В работе [1] получен критерий двухточечной полной управляемости в случае, когда заданы произвольные постоянные: начальный вектор состояния и конечный вектор состояния. В настоящей работе выделен класс систем Пфаффа, для которого требование на конечное состояние можно усложнить, заменив произвольный вектор на произвольную ограниченную аналитическую вектор-функцию. Доказан критерий наличия свойства континуум-управляемости. Этот критерий носит ранговый характер от некоторой матрицы, составленной по известным матрицам исходной системы Пфаффа.

Рассматривается процесс, описываемый линейной системой Пфаффа Θ:

$$\Theta : dx = (A_1 x + B_1 u(s))ds_1 + (A_2 x + B_2 u(s))ds_2, \quad s = (s_1, s_2) \in R^2, \qquad (1)$$

где $x \in R^n$ – выход, состояние системы, $u \in R^r$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая функция, $r \le n,$ A_1, A_2, B_1, B_2 – постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей. Условия полной интегрируемости системы (1) имеют вид [1]:

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 \qquad (2)$$

$$B_1 \frac{\partial u}{\partial s_2} - B_2 \frac{\partial u}{\partial s_1} = Pu, \quad P = A_1 B_2 - A_2 B_1. \qquad (3)$$

При выполнении этих условий для заданного вектора u система (1) имеет единственное решение с начальным условием

$$x(s^0) = x^0. \qquad (4)$$

В работе [2] рассматривалась двухточечная управляемость систем Пфаффа (1) в смысле следующего определения.

Адрес для корреспонденции: 210015, г. Витебск, ул. Чкалова, д. 29, корп. 2, кв. 20 – Храмцов О.В.

Определение 1. Система (1) называется вполне управляемой, если для любых состояний $x^0, x^1 \in R^n$ существуют точка $s^1 = (s_1^1, s_2^1), 0 < s_1^1, s_2^1 < \infty$ и непрерывно дифференцируемое управление $u = u(s, x^0, x^1)$ такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняется условие

$$x(s^1) = x^1. \quad (5)$$

В данной работе изучается возможность управления системой (1) при конечном условии

$$x(s_1, s_2^0) = \phi(s_1), \;\; s_1 \in I = (a,b), \quad (6)$$

где ϕ – ограниченная аналитическая вектор-функция.

Определение 2. Система (1) называется вполне континуум-управляемой, если для любого состояния $x^0 \in R^n$ и любой аналитической ограниченной функции ϕ существует интервал I и непрерывно дифференцируемое управление $u = u(s, x^0, \phi)$ такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняется условие (6).

Рассмотрим системы (1) класса Θ_1, то есть такие, что для матриц системы которых выполняются условия [2]

$$rank[B_1, B_2] = rank[B_1, B_2, P] = m, \;\; m \le r, \quad (7)$$

$$\exists \alpha \in R^1 : rank[\alpha B_1 + (1-\alpha) B_2] = m. \quad (8)$$

Континуум-управляемость для класса Θ_{11}. К классу Θ_{11} относятся те системы Пфаффа Θ_1, для которых наряду с условиями (7), (8) выполнено условие $m = r$, где m число из (7), а r – размерность вектора управления.

Предложение 1. Система Пфаффа класса Θ_{11} в случае $m = r$ не являются вполне континуум-управляемыми ни при каких условиях.

Действительно, в работе [2] получен критерий полной управляемости систем Пфаффа класса Θ_1.

Теорема 1. *Система Пфаффа класса Θ_1 вполне управляема тогда и только тогда, когда*

$$\exists \alpha \in R^1 : rank Q(\alpha) = n, \;\; Q(\alpha) = [B(\alpha), A(\alpha)B(\alpha), \ldots, A^{n-1}(\alpha)B(\alpha)],$$

$$B(\alpha) = \alpha B_1 + (1-\alpha) B_2, \;\; A(\alpha) = \alpha A_1 + (1-\alpha) A_2,$$

если $m = r$, то свобода вектора управления заключается в силу системы (3) только в выборе начального состояния $u(t_1, 0)$. Этот ресурс полностью используется на решение задачи полной управляемости и поэтому возможностей для удовлетворения условия (6) не существует.

Континуум-управляемость для класса Θ_{12}. К классу Θ_{12} относятся те системы Пфаффа Θ_1, для которых наряду с условиями (7), (8) выполнено условие $m<r$, где m число из (7), а r – размерность вектора управления. Вначале рассмотрим случай, когда управление u размерности $r=2$ и, следовательно, $m=1$. Условие (7) и (8) эквивалентны одному

$$rank[b^{[11]},b^{[12]},b^{[21]},b^{[22]},A_2b^{[11]}-A_1b^{[21]},A_2b^{[12]}-A_1b^{[22]}]=1. \qquad (9)$$

Равенство (9) означает линейную зависимость входящих в него векторов. Если для определенности $b^{[11]}\neq 0$, то существуют вещественные числа r,k,p,l,c с условием

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & k\\ r & p\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (10)$$

такие, что

$$b^{[11]}=b,b^{[12]}=kb,b^{[21]}=rb,b^{[22]}=pb,A_2b^{[11]}-A_1b^{[21]}=lb,A_2b^{[12]}-A_1b^{[22]}=cb.(11)$$

Невыполнение условия (10), т.е. $\Delta=0$, означает, что возможно введение вместо двумерного управления v одномерного управления $V=v_1+kv_2$, что противоречит рассматриваемому случаю $r=2$.

Дифференциальное ограничение (3) на управление u силу (11) из векторного уравнения превратится в скалярное

$$\frac{\partial u_1}{\partial s_2}-r\frac{\partial u_1}{\partial s_1}=lu_1+p\frac{\partial u_2}{\partial s_1}-k\frac{\partial u_2}{\partial s_2}+cu_2. \qquad (12)$$

Имеет место

Теорема 2. *Система Пфаффа (1) класса* Θ_{12} *в случае* $r=2$ *и* $m=1$ *вполне континуум-управляема тогда и только тогда, когда*

$$\exists\alpha\in R^1: rankQ_1(\alpha)=n,\ Q_1(\alpha)=[b,A(\alpha)b,...,A^{n-1}(\alpha)b],\ A(\alpha)=\alpha A_1+A_2. \qquad (13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. В системе (1) сделаем замену аргумента

$$s_1=t_1+\alpha t_2,\ s_2=t_2. \qquad (14)$$

После обозначений $x(s) = y(t),\ u(s) = v(t)$ система (1) примет вид

$$dy = (A_1 y + B_1 v(t))dt_1 + (A(\alpha)y + B(\alpha)v(t))dt_2,\ t = (t_1, t_2) \in R^2, \qquad (15)$$

$$A(\alpha) = \alpha A_1 + A_2,\ B(\alpha) = \alpha B_1 + B_2. \qquad (16)$$

Новые вектора при управлении v в силу (10) и (16) после вычислений имеют вид

$$b^{[11]} = b, b^{[12]} = kb, b^{[21]}(\alpha) = (\alpha + r)b, b^{[22]}(\alpha) = (\alpha k + p)b, \qquad (17)$$

$$A(\alpha)b^{[11]} - A_1 b^{[21]}(\alpha) = lb, A(\alpha)b^{[12]} - A_1 b^{[22]}(\alpha) = cb.$$

Условие, аналогичное (9), выполняется, а дифференциальное ограничение (12) на управление v имеет вид

$$.\frac{\partial v_1}{\partial t_2} - (\alpha + r)\frac{\partial v_1}{\partial t_1} = l v_1 + (\alpha k + p)\frac{\partial v_2}{\partial t_1} - k\frac{\partial v_2}{\partial t_2} + c v_2. \qquad (18)$$

С учетом (16) и (17) система (15) подробно имеет вид

$$dy = (A_1 y + bf(t))dt_1 + (A(\alpha)y + bw(t))dt_2,\ t = (t_1, t_2) \in R^2, \qquad (19)$$

$$f \equiv v_1(t) + kv_2(t),\ w \equiv (\alpha + r)v_1(t) + (\alpha k + p)v_2(t). \qquad (20)$$

Общее решение для системы (19) записывается в виде

$$y(t) = \exp(A_1 t_1 + A(\alpha)t_2)[y^0 + \int_0^{t_1} \exp(-A_1 t_1 - A(\alpha)t_2)b(f(t)dt_1 + w(t)dt_2)]. \ (21)$$

Начальное условие (4) выполняется: $y(0) = x(0) = x^0$. В правой части (21) стоит криволинейный интеграл второго рода, который в силу условий (2) и (18) не зависит от пути интегрирования. Поэтому решение (21) можно представить в виде

$$y(t) = \exp(A_1 t_1 + A(\alpha)t_2)[y^0 + \int_0^{t_1} \exp(-A_1 t_1)bf(t_1, 0)dt_1 +$$

$$+ \int_0^{t_2} \exp(-A_1 t_1 - A(\alpha)t_2)bw(t)dt_2]. \qquad (22)$$

Если в (22) положить $t_2 = 0$, то получится равенство

$$h(t_1,0)=\int_0^{t_1}\exp(-A_1t_1)bf(t_1,0)dt_1,\;\; h(t_1,0)\equiv\exp(-A_1t_1)y(t_1,0)-y^0. \quad (23)$$

В случае заданной произвольной аналитической ограниченной функции $f(t_1,0)$ при $t_2=t_2^0$ из решения (22) конечное условие (6) принимает вид

$$H(t_1,t_2^0)=\int_0^{t_2^0}\exp(-A(\alpha)t_2)bw(t)dt_2\,, \quad (24)$$

$$H\equiv\exp(A_1t_1)[\exp(-A_1t_1-A(\alpha)t_2^0)\phi(t_1)-y^0-\int_0^{t_1}\exp(-A_1t_1)bf(t_1,0)dt_1\,.$$

Так как функции f,w содержат компоненты вектора v, то требуют согласования при $t_2=0$

$$v_1(t_1,0)+kv_2(t_1,0)=f(t_1,0),\;(\alpha+r)v_1(t_1,0)+(\alpha k+p)v_2(t_1,0)=w(t_1,0). \quad (25)$$

Определитель матрицы коэффициентов в линейной системе (25) в силу (10) не равен нулю. Положим $w(t_1,0)\equiv 0$. Тогда система (25) имеет решение

$$v_1(t_1,0)=\frac{\alpha k+p}{p-kr}f(t_1,0),\; v_2(t_1,0)=-\frac{\alpha+r}{p-kr}f(t_1,0)\,. \quad (26)$$

В качестве промежуточного вспомогательного управления теперь используется аналитическая ограниченная функция

$$w(t)=\sum_{i=0}^{\infty}t_1^iz_i(t_2),\;\; z_i(0)=0\,. \quad (27)$$

Аналитическая функция H в (24) раскладывается в ряд

$$H(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_it_1^i,\;\; a_i\in R^n\,. \quad (28)$$

В силу (27) и (28) задача (24) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_it_1^i=\int_0^{t_2^0}\exp(-A(\alpha)t_2)b\sum_{i=0}^{\infty}t_1^iz_i(t_2)dt_2\,. \quad (29)$$

В результате сравнения коэффициентов при одинаковых степенях t_1^i получается счетное множество проблем моментов

$$a_i = \int_0^{t_2^0} \exp(-A(\alpha)t_2)bz_i(t_2)dt_2\ ,\ z_i(0)=0,\ \ i=0,1,2,... \qquad (30)$$

Каждая из проблем моментов в (30) имеет решение $z_i(t_2)$ тогда и только тогда, когда [3, с. 42] выполняется условие (13) теоремы 2. Решений каждой проблемы моментов бесконечное множество и при этом и в классе аналитических функций [3, с. 51], [4]. Чтобы выполнялось условие $z_i(0)=0,$ достаточно искать ответ, например [4], в классе многочленов $z_i = c_1^i t_2 + ... + c_n^i t_2^n$. Выберем в каждой проблеме моментов такое решение z_i , чтобы ряд (27) сходился для (t_1,t_2) из области $G = I_1 \times I_2 = (a_1,b_1)\times[0,t_2^0].$ Выразив из (20) координату

$$v_1(t) = qw(t) + gv_2(t)\ ,\ q = 1/(\alpha + r),\ \ g = -(\alpha k + p)/(\alpha + r),\ \ \alpha + r \neq 0\ , \ (31)$$

и подставив в дифференциальное ограничение (18), получим задачу

$$l_1 \frac{\partial v_2}{\partial t_2} - l_2 v_2 = W(t),\ \ v_2(t_1,0) = -\frac{\alpha + r}{p - kr} f(t_1,0) \qquad (32)$$

$$W \equiv \frac{\partial w}{\partial t_1} - q\frac{\partial w}{\partial t_2} + lqw\ , \quad l_1 = \frac{kr - p}{\alpha + r}\ ,\ l_3 = gl + c\ .$$

Здесь $l_1 \neq 0$ в силу (10). Задача (32) всегда имеет единственное решение v_2 в области G , а из (31) найдется координата v_1 . В результате замены, обратной к (14), из вектора v и интервала I_1 получаются искомые управление u и интервал $I.$ Таким образом, задача континуум-управляемости разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (13) теоремы 2. Теорема доказана.

Замечание. Условие (13) на самом деле достаточно проверять для конечного множества значений α . Действительно: определитель $\det Q_1(\alpha)$ матрицы $Q_1(\alpha)$ является многочленом от α со старшим показателем степени не больше числа $N = (n+1)n/2.$ Для проверки условия (13) достаточно взять произвольное множество M вещественных чисел $M = \{\alpha_i, i = 1,...,N+1\}$. Если хотя бы для одного α_i будет $\det Q_1(\alpha) \neq 0$, то условие (13) выполняется для любых α , за исключением, возможно, некоторого конечного множества значений. Если же для всех $\alpha_i \in M$ будет $\det Q_1(\alpha) = 0$, то условие (12) не выполняется ни для одного $\alpha \in R^1$.

В доказательстве теоремы 2 в равенстве (22) функция f была выбрана произвольно. Поэтому эту свободу выбора можно использовать для управления системой (1).

Определение 3. Система (1) называется вполне максимально управляемой, если для любых состояний $x^0, x^1 \in R^n$ и любой аналитической ограниченной функции ϕ существуют точка $s^1 = (s_1^1, s_2^1), 0 < s_1^1, s_2^1 < \infty,$ момент s_2^0 , интервал $I = (a,b)$ и непрерывно дифференцируемое управление $u = u(s, x^0, x^1, \phi)$ такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняются условия (5) и (6).

Имеет место

Теорема 3. *Система Пфаффа (1) класса* Θ_{12} *в случае* $r=2$ *и* $m=1$ *вполне максимально управляема, если выполняются условие (13) и условие*

$$rankQ_2 = n,\ \ Q_2 = [b, A_1 b, ..., A_1^{n-1} b]. \qquad (33)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из доказательства теоремы 2 и теоремы 1. Условие (4) выполняется в силу формулы общего решения. Условие (13) обеспечивает выполнимость требования (6). Условие (33) обеспечивает в силу теоремы 1 ($\alpha = 1$) разрешимость получаемой из равенства (21) при $t_1 = t_1^0$ проблемы моментов

$$h^1 = \int_0^{t_1^0} \exp(-A_1 t_1) bf(t_1, 0) dt_1,\ \ h^1 = h(t_1^0, 0) = \exp(-A_1 t_1^0) y(t_1^0, 0) - y^0 .$$

Все требования определения 3 при выполнении условий теоремы 3 имеют место, поэтому система (1) в рассматриваемом случае является вполне максимально управляемой.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. ***Гайшун, И.В.*** Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – Минск, 1983. – С. 22–44.
2. ***Храмцов, О.В***. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 11. – С. 1933–1939.
3. ***Калман, Р.*** Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М., 1971.
4. ***Шкляр, Б.Ш.*** Об управляемости в классах простейших функций / Б.Ш. Шкляр // Вестник БГУ. – 1972. – Сер. 1, № 1. – С. 91–93.

S U M M A R Y

Criterion of the continuum controllability of the linear stationary Pfaff systems has been proved.

Поступила в редакцию 13.04.2010