

# Задача континуум-управляемости линейных стационарных систем Пфаффа

**О.В. Храмцов**

*Учреждение образования «Витебский государственный  
университет им. П.М. Машерова»*

В данной работе продолжается изучение свойства управляемости для линейных стационарных систем Пфаффа. В работе [1] получен критерий двухточечной полной управляемости в случае, когда заданы произвольные постоянные: начальный вектор состояния и конечный вектор состояния. В настоящей работе выделен класс систем Пфаффа, для которого требование на конечное состояние можно усложнить, заменив произвольный вектор на произвольную ограниченную аналитическую вектор-функцию. Доказан критерий наличия свойства континуум-управляемости. Этот критерий носит ранговый характер от некоторой матрицы, составленной по известным матрицам исходной системы Пфаффа.

Рассматривается процесс, описываемый линейной системой Пфаффа  $\Theta$ :

$$\Theta: dx = (A_1x + B_1u(s))ds_1 + (A_2x + B_2u(s))ds_2, \quad s = (s_1, s_2) \in R^2, \quad (1)$$

где  $x \in R^n$  – выход, состояние системы,  $u \in R^r$  – вход, управление, непрерывно дифференцируемая функция,  $r \leq n$ ,  $A_1, A_2, B_1, B_2$  – постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей. Условия полной интегрируемости системы (1) имеют вид [1]:

$$A_1A_2 = A_2A_1 \quad (2)$$

$$B_1 \frac{\partial u}{\partial s_2} - B_2 \frac{\partial u}{\partial s_1} = Pu, \quad P = A_1B_2 - A_2B_1. \quad (3)$$

При выполнении этих условий для заданного вектора  $u$  система (1) имеет единственное решение с начальным условием

$$x(s^0) = x^0. \quad (4)$$

В работе [2] рассматривалась двухточечная управляемость систем Пфаффа (1) в смысле следующего определения.

**Определение 1.** Система (1) называется вполне управляемой, если для любых состояний  $x^0, x^1 \in R^n$  существуют точка  $s^1 = (s_1^1, s_2^1), 0 < s_1^1, s_2^1 < \infty$  и непрерывно дифференцируемое управление  $u = u(s, x^0, x^1)$  такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняется условие

$$x(s^1) = x^1. \quad (5)$$

В данной работе изучается возможность управления системой (1) при конечном условии

$$x(s_1, s_2^0) = \phi(s_1), \quad s_1 \in I = (a, b), \quad (6)$$

где  $\phi$  – ограниченная аналитическая вектор-функция.

**Определение 2.** Система (1) называется вполне континуум-управляемой, если для любого состояния  $x^0 \in R^n$  и любой аналитической ограниченной функции  $\phi$  существует интервал  $I$  и непрерывно дифференцируемое управление  $u = u(s, x^0, \phi)$  такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняется условие (6).

Рассмотрим системы (1) класса  $\Theta_1$ , то есть такие, что для матриц системы которых выполняются условия [2]

$$\text{rank}[B_1, B_2] = \text{rank}[B_1, B_2, P] = m, \quad m \leq r, \quad (7)$$

$$\exists \alpha \in R^1 : \text{rank}[\alpha B_1 + (1 - \alpha)B_2] = m. \quad (8)$$

**Континуум-управляемость для класса  $\Theta_{11}$ .** К классу  $\Theta_{11}$  относятся те системы Пфаффа  $\Theta_1$ , для которых наряду с условиями (7), (8) выполнено условие  $m = r$ , где  $m$  число из (7), а  $r$  – размерность вектора управления.

**Предложение 1.** Система Пфаффа класса  $\Theta_{11}$  в случае  $m = r$  не являются вполне континуум-управляемыми ни при каких условиях.

Действительно, в работе [2] получен критерий полной управляемости систем Пфаффа класса  $\Theta_1$ .

**Теорема 1.** Система Пфаффа класса  $\Theta_1$  вполне управляема тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in R^1 : \text{rank} Q(\alpha) = n, \quad Q(\alpha) = [B(\alpha), A(\alpha)B(\alpha), \dots, A^{n-1}(\alpha)B(\alpha)], \\ B(\alpha) = \alpha B_1 + (1 - \alpha)B_2, \quad A(\alpha) = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2, \end{aligned}$$

если  $m = r$ , то свобода вектора управления заключается в силу системы (3) только в выборе начального состояния  $u(t_1, 0)$ . Этот ресурс полностью используется на решение задачи полной управляемости и поэтому возможностей для удовлетворения условия (6) не существует.

**Континуум-управляемость для класса  $\Theta_{12}$ .** К классу  $\Theta_{12}$  относятся те системы Пфаффа  $\Theta_1$ , для которых наряду с условиями (7), (8) выполнено условие  $m < r$ , где  $m$  число из (7), а  $r$  – размерность вектора управления. Вначале рассмотрим случай, когда управление  $u$  размерности  $r = 2$  и, следовательно,  $m = 1$ . Условие (7) и (8) эквивалентны одному

$$\text{rank}[b^{[11]}, b^{[12]}, b^{[21]}, b^{[22]}, A_2 b^{[11]} - A_1 b^{[21]}, A_2 b^{[12]} - A_1 b^{[22]}] = 1. \quad (9)$$

Равенство (9) означает линейную зависимость входящих в него векторов. Если для определенности  $b^{[11]} \neq 0$ , то существуют вещественные числа  $r, k, p, l, c$  с условием

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & k \\ r & p \end{vmatrix} \neq 0 \quad (10)$$

такие, что

$$b^{[11]} = b, b^{[12]} = kb, b^{[21]} = rb, b^{[22]} = pb, A_2 b^{[11]} - A_1 b^{[21]} = lb, A_2 b^{[12]} - A_1 b^{[22]} = cb. \quad (11)$$

Невыполнение условия (10), т.е.  $\Delta = 0$ , означает, что возможно введение вместо двумерного управления  $v$  одномерного управления  $V = v_1 + kv_2$ , что противоречит рассматриваемому случаю  $r = 2$ .

Дифференциальное ограничение (3) на управление  $u$  силу (11) из векторного уравнения превратится в скалярное

$$\frac{\partial u_1}{\partial s_2} - r \frac{\partial u_1}{\partial s_1} = lu_1 + p \frac{\partial u_2}{\partial s_1} - k \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + cu_2. \quad (12)$$

Имеет место

**Теорема 2.** Система Пфаффа (1) класса  $\Theta_{12}$  в случае  $r = 2$  и  $m = 1$  вполне континуум-управляема тогда и только тогда, когда

$$\exists \alpha \in R^1 : \text{rank} Q_1(\alpha) = n, Q_1(\alpha) = [b, A(\alpha)b, \dots, A^{n-1}(\alpha)b], A(\alpha) = \alpha A_1 + A_2. \quad (13)$$

Доказательство. 1. В системе (1) сделаем замену аргумента

$$s_1 = t_1 + \alpha t_2, s_2 = t_2. \quad (14)$$

После обозначений  $x(s) = y(t)$ ,  $u(s) = v(t)$  система (1) примет вид

$$dy = (A_1 y + B_1 v(t)) dt_1 + (A(\alpha) y + B(\alpha) v(t)) dt_2, t = (t_1, t_2) \in R^2, \quad (15)$$

$$A(\alpha) = \alpha A_1 + A_2, B(\alpha) = \alpha B_1 + B_2. \quad (16)$$

Новые вектора при управлении  $v$  в силу (10) и (16) после вычислений имеют вид

$$b^{[11]} = b, b^{[12]} = kb, b^{[21]}(\alpha) = (\alpha + r)b, b^{[22]}(\alpha) = (\alpha k + p)b, \quad (17)$$

$$A(\alpha) b^{[11]} - A_1 b^{[21]}(\alpha) = lb, A(\alpha) b^{[12]} - A_1 b^{[22]}(\alpha) = cb.$$

Условие, аналогичное (9), выполняется, а дифференциальное ограничение (12) на управление  $v$  имеет вид

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_2} - (\alpha + r) \frac{\partial v_1}{\partial t_1} = lv_1 + (\alpha k + p) \frac{\partial v_2}{\partial t_1} - k \frac{\partial v_2}{\partial t_2} + cv_2. \quad (18)$$

С учетом (16) и (17) система (15) подробно имеет вид

$$dy = (A_1 y + bf(t)) dt_1 + (A(\alpha) y + bw(t)) dt_2, t = (t_1, t_2) \in R^2, \quad (19)$$

$$f \equiv v_1(t) + kv_2(t), w \equiv (\alpha + r)v_1(t) + (\alpha k + p)v_2(t). \quad (20)$$

Общее решение для системы (19) записывается в виде

$$y(t) = \exp(A_1 t_1 + A(\alpha) t_2) \left[ y^0 + \int_0^{t_1} \exp(-A_1 t_1 - A(\alpha) t_2) b(f(t) dt_1 + w(t) dt_2) \right]. \quad (21)$$

Начальное условие (4) выполняется:  $y(0) = x(0) = x^0$ . В правой части (21) стоит криволинейный интеграл второго рода, который в силу условий (2) и (18) не зависит от пути интегрирования. Поэтому решение (21) можно представить в виде

$$y(t) = \exp(A_1 t_1 + A(\alpha) t_2) \left[ y^0 + \int_0^{t_1} \exp(-A_1 t_1) b f(t_1, 0) dt_1 + \int_0^{t_2} \exp(-A_1 t_1 - A(\alpha) t_2) b w(t) dt_2 \right]. \quad (22)$$

Если в (22) положить  $t_2 = 0$ , то получится равенство

$$h(t_1, 0) = \int_0^{t_1} \exp(-A_1 t_1) b f(t_1, 0) dt_1, \quad h(t_1, 0) \equiv \exp(-A_1 t_1) y(t_1, 0) - y^0. \quad (23)$$

В случае заданной произвольной аналитической ограниченной функции  $f(t_1, 0)$  при  $t_2 = t_2^0$  из решения (22) конечное условие (6) принимает вид

$$H(t_1, t_2^0) = \int_0^{t_2^0} \exp(-A(\alpha) t_2) b w(t) dt_2, \quad (24)$$

$$H \equiv \exp(A_1 t_1) \left[ \exp(-A_1 t_1 - A(\alpha) t_2^0) \phi(t_1) - y^0 - \int_0^{t_1} \exp(-A_1 t_1) b f(t_1, 0) dt_1 \right].$$

Так как функции  $f, w$  содержат компоненты вектора  $v$ , то требуют согласования при  $t_2 = 0$

$$v_1(t_1, 0) + k v_2(t_1, 0) = f(t_1, 0), \quad (\alpha + r) v_1(t_1, 0) + (\alpha k + p) v_2(t_1, 0) = w(t_1, 0). \quad (25)$$

Определитель матрицы коэффициентов в линейной системе (25) в силу (10) не равен нулю. Положим  $w(t_1, 0) \equiv 0$ . Тогда система (25) имеет решение

$$v_1(t_1, 0) = \frac{\alpha k + p}{p - kr} f(t_1, 0), \quad v_2(t_1, 0) = -\frac{\alpha + r}{p - kr} f(t_1, 0). \quad (26)$$

В качестве промежуточного вспомогательного управления теперь используется аналитическая ограниченная функция

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t_1^i z_i(t_2), \quad z_i(0) = 0. \quad (27)$$

Аналитическая функция  $H$  в (24) раскладывается в ряд

$$H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t_1^i, \quad a_i \in R^n. \quad (28)$$

В силу (27) и (28) задача (24) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t_1^i = \int_0^{t_2^0} \exp(-A(\alpha)t_2) b \sum_{i=0}^{\infty} t_1^i z_i(t_2) dt_2. \quad (29)$$

В результате сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $t_1^i$  получается счетное множество проблем моментов

$$a_i = \int_0^{t_2^0} \exp(-A(\alpha)t_2) b z_i(t_2) dt_2, \quad z_i(0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

Каждая из проблем моментов в (30) имеет решение  $z_i(t_2)$  тогда и только тогда, когда [3, с. 42] выполняется условие (13) теоремы 2. Решений каждой проблемы моментов бесконечное множество и при этом и в классе аналитических функций [3, с. 51], [4]. Чтобы выполнялось условие  $z_i(0) = 0$ , достаточно искать ответ, например [4], в классе многочленов  $z_i = c_1^i t_2 + \dots + c_n^i t_2^n$ . Выберем в каждой проблеме моментов такое решение  $z_i$ , чтобы ряд (27) сходил для  $(t_1, t_2)$  из области  $G = I_1 \times I_2 = (a_1, b_1) \times [0, t_2^0]$ . Выразив из (20) координату

$v_1(t) = qw(t) + gv_2(t)$ ,  $q = 1/(\alpha + r)$ ,  $g = -(ak + p)/(\alpha + r)$ ,  $\alpha + r \neq 0$ , (31) и подставив в дифференциальное ограничение (18), получим задачу

$$l_1 \frac{\partial v_2}{\partial t_2} - l_2 v_2 = W(t), \quad v_2(t_1, 0) = -\frac{\alpha + r}{p - kr} f(t_1, 0) \quad (32)$$

$$W \equiv \frac{\partial w}{\partial t_1} - q \frac{\partial w}{\partial t_2} + lqw, \quad l_1 = \frac{kr - p}{\alpha + r}, \quad l_3 = gl + c.$$

Здесь  $l_1 \neq 0$  в силу (10). Задача (32) всегда имеет единственное решение  $v_2$  в области  $G$ , а из (31) найдется координата  $v_1$ . В результате замены, обратной к (14), из вектора  $v$  и интервала  $I_1$  получаются искомые управление  $u$  и интервал  $I$ . Таким образом, задача континуум-управляемости разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (13) теоремы 2. Теорема доказана.

Замечание. Условие (13) на самом деле достаточно проверять для конечного множества значений  $\alpha$ . Действительно: определитель  $\det Q_1(\alpha)$  матрицы  $Q_1(\alpha)$  является многочленом от  $\alpha$  со старшим показателем степени не больше числа  $N = (n+1)n/2$ . Для проверки условия (13) достаточно взять произвольное множество  $M$  вещественных чисел  $M = \{\alpha_i, i = 1, \dots, N+1\}$ . Если хотя бы для одного  $\alpha_i$  будет  $\det Q_1(\alpha) \neq 0$ , то условие (13) выполняется для любых  $\alpha$ , за исключением, возможно, некоторого конечного множества значений. Если же для всех  $\alpha_i \in M$  будет  $\det Q_1(\alpha) = 0$ , то условие (12) не выполняется ни для одного  $\alpha \in R^1$ .

В доказательстве теоремы 2 в равенстве (22) функция  $f$  была выбрана произвольно. Поэтому эту свободу выбора можно использовать для управления системой (1).

**Определение 3.** Система (1) называется вполне максимально управляемой, если для любых состояний  $x^0, x^1 \in R^n$  и любой аналитической ограниченной функции  $\phi$  существуют точка  $s^1 = (s_1^1, s_2^1), 0 < s_1^1, s_2^1 < \infty$ , момент  $s_2^0$ , интервал  $I = (a, b)$  и непрерывно дифференцируемое управление  $u = u(s, x^0, x^1, \phi)$  такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняются условия (5) и (6).

Имеет место

**Теорема 3.** Система Пфаффа (1) класса  $\Theta_{12}$  в случае  $r=2$  и  $m=1$  вполне максимально управляема, если выполняются условие (13) и условие

$$\text{rank} Q_2 = n, \quad Q_2 = [b, A_1 b, \dots, A_1^{n-1} b]. \quad (33)$$

Доказательство следует из доказательства теоремы 2 и теоремы 1. Условие (4) выполняется в силу формулы общего решения. Условие (13) обеспечивает выполнимость требования (6). Условие (33) обеспечивает в силу теоремы 1 ( $\alpha=1$ ) разрешимость получаемой из равенства (21) при  $t_1 = t_1^0$  проблемы моментов

$$h^1 = \int_0^{t_1^0} \exp(-A_1 t_1) b f(t_1, 0) dt_1, \quad h^1 = h(t_1^0, 0) = \exp(-A_1 t_1^0) y(t_1^0, 0) - y^0.$$

Все требования определения 3 при выполнении условий теоремы 3 имеют место, поэтому система (1) в рассматриваемом случае является вполне максимально управляемой.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Гайшун, И.В.** Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – Минск, 1983. – С. 22–44.
2. **Храмцов, О.В.** К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 11. – С. 1933–1939.
3. **Калман, Р.** Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М., 1971.
4. **Шкляр, Б.Ш.** Об управляемости в классах простейших функций / Б.Ш. Шкляр // Вестник БГУ. – 1972. – Сер. 1, № 1. – С. 91–93.

### S U M M A R Y

*Criterion of the continuum controllability of the linear stationary Pfaff systems has been proved.*

*Поступила в редакцию 13.04.2010*