УДК 512.547

Унипотентность образа представления $F_2(x,y)$ в $GL(n,C)$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы с клетками Жордана малых размерностей

О.И. Тавгень, Ян Синьсун
Белорусский государственный университет

Пусть $F_2(x,y)$ – свободная группа с образующими x и y. Рассмотрим представление этой группы $\rho: F_2(x,y) \to GL(n,C)$, при этом образующие и все примитивные элементы группы F_2 переходят в унипотентные матрицы. Элемент свободной группы называется *примитивным*, если он может быть включен в некоторое множество свободных образующих этой группы [1]. Известным открытым вопросом является вопрос о том, будет ли при этих условиях унипотентным весь образ $\rho(F_2)$. В работах [2–3] дан утвердительный ответ на этот вопрос для матриц порядка $n \le 5$. В настоящей работе мы даем утвердительный ответ на этот вопрос для любого n при условии $(\rho(p)-E)^3 = 0$ для любого примитивного элемента p.

Адрес для корреспонденции: 220040, г. Минск, ул. Некрасова, д. 20, e-mail: tavgen@academy.edu.by – Тавгень О.И.

Теорема. *Образ* $F_2(x,y)$ *относительно представления* $\rho: F_2(x,y) \to GL(n,C)$ *– унипотентная подгруппа в* $GL(n,C)$ *при условии отображения образующих и примитивных элементов в унипотентные матрицы и выполнении тождества* $(\rho(p)-E)^3=0$ *для любого примитивного элемента* p.

Для доказательства теоремы 1 используются следующие леммы.

Лемма 1 [1]. *Пусть* p *и* q *– два ассоциированных примитивных элемента группы* F_2. *Тогда все примитивные элементы, ассоциированные с* p, *имеют вид* $p^{\alpha}q^{\varepsilon}p^{\beta}$, *где* $\alpha,\beta\in\mathbf{Z},\ \ \varepsilon=\pm1$.

В дальнейшем обозначим $\rho(x)=A=H+E, \rho(y)=B=T+E$, где E – единичная матрица, $L(W)$ – длина слова W.

Лемма 2. *Пусть* $(\rho(p)-E)^3=0$ *для любого примитивного элемента* p. *Тогда* $trW(A,B)=n+\sum a_j trW_j(H,B)$, *где* $W_j(H,B)\ =H^{i_1}B^{s_1}\dots H^{i_k}B^{s_k}$, $i_r,s_r\in\{1,\ 2\}$, $a_j\in\mathbf{Z}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$trW(A,B)=tr(A^{l_1}B^{v_1}\dots A^{l_m}B^{v_m})=tr((E+H)^{l_1}B^{v_1}\dots(E+H)^{l_m}B^{v_m})=$$
$$=trB^{v_1+\dots+v_k}+\sum tr(H^{l'_1}B^{v'_1}\dots H^{l'_m}B^{v'_m}).$$

Из $(B-E)^3=0$ получаем $B^3=3B^2-3B+E$. Тогда $B^{v'_i}=aB^2-bB+cE$, $a,\ b,\ c\in\mathbf{Z}$. Поэтому $trW(A,B)=trB^{v_1+\dots+v_k}+\sum tr(H^{l'_1}B^{v'_1}\dots H^{l'_m}B^{v'_m})=$ $=n+\sum a_j trW_j(H,B)$, *где* $W_j(H,B)=H^{i_1}B^{s_1}\dots H^{i_k}B^{s_k}$, $i_r,s_r\in\{1,\ 2\}$, $a_j\in\mathbf{Z}$. Лемма доказана.

Используя лемму 2, можно считать, что для любых образов ассоциированных примитивных элементов $P=E+X,\ Q$ выполняется $trW(P,Q)=n+\sum a_j trW_j(X,Q)$, *где* $W_j(X,Q)=X^{i_1}Q^{s_1}\dots X^{i_k}Q^{s_k}$, $i_r,s_r\in\{1,\ 2\}$, $a_j\in\mathbf{Z}$.

Лемма 3. *Пусть* $(\rho(p)-E)^3=0$ *для любого примитивного элемента* p. *Тогда* $trW(H,B)=0$, *где* $L(W)\geq 8$ и в слове $W(H,B)$ имеется элемент H^2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $H^3=T^3=0$. Для примитивного элемента BA^n также $(BA^n-E)^3=0$. Отсюда $(2(B-E)+2nBH+n(n-1)BH^2)^3=0$. Из этого получаем $(a_0+a_1n+a_2n^2)^3=0$, где $a_0=2T=2B-2E$, $a_1=2BH-BH^2$, $a_2=BH^2$. Из $(a_0+a_1n+a_2n^2)^3=0$ имеем $G_0+G_1n+G_2n^2+G_3n^3+G_4n^4+G_5n^5+G_6n^6=0$, где $G_0=8T^3$, $G_1=a_0^2a_1+a_1a_0^2+a_0a_1a_0$, $G_6=a_2^3$. Если взять $n=n_i,\ \ i=\overline{1,7}$ не равными, то получим $G_i=0,\ \ i=\overline{0,6}$. Из $G_6=0,$ имеем $(BH^2)^3=0,$ отсюда

$$H^2BH^2BH^2=0. \qquad (1)$$

Из $G_1=0$ получаем $T^2a_1+a_1T^2+Ta_1T=0$. Умножив это равенство на T^2, получим $T^2a_1T^2=0$. Тогда $T^2(2H-H^2)T^2=0$. Аналогично, для AB *и* B имеем $T^2(2(H+T+HT)-(H+T+HT)^2)T^2=0$.

Из $T^2(2H-H^2)T^2=0$, $T^2(2(H+T+HT)-(H+T+HT)^2)T^2=0$ получаем $T^2HTHT^2=0.$ Следовательно, $T^2ATAT^2=0.$ Аналогично, $H^2BHBH^2=0.$ Из $T^2(2H-H^2)T^2=0$, получаем $T^2(4A-A^2)T^2=0$, т.е. $4T^2AT^2=T^2A^2T^2$. Аналогично,

$$4H^2BH^2=H^2B^2H^2. \tag{2}$$

Из $G_5=0$ получаем $a_2^2a_1+a_1a_2^2+a_2a_1a_2=0$. Из этого и (1) получаем

$$H^2BH^2BH+H^2BHBH^2+HBH^2BH^2=0. \tag{3}$$

Из $G_4=0$, (1), (2), (3) получаем

$$BH^2BH^2+H^2BH^2+H^2BH^2B+2(HBHBH^2+HBH^2BH+H^2BHBH)=0. \tag{4}$$

Умножив (4) на H (справа), получим

$$H^2BH^2BH+2HBH^2BH^2+2H^2BHBH^2=0.$$

Отсюда и из (3) получаем $H^2BH^2BH=0$. Аналогично, $HBH^2BH^2=0$. Поэтому $H^2BH^2BH=HBH^2BH^2=H^2BHBH^2=0$. (5)

Вычитая $G_3=0$ и используя (2) и (5), получаем

$$\begin{aligned}&2HBHBH-[HBHBH^2+HBH^2BH+H^2BHBH]-\\&-[BH^2BH^2+H^2BH^2B+H^2B^2H^2]-3[HBH^2+H^2BH]+\\&+[BHBH^2+BH^2BH+HB^2H^2+HBH^2B+H^2B^2H+H^2BHB]=0.\end{aligned} \tag{6}$$

Умножив (6) на H (используется также (1), (2), (5)), получим

$$2HBHBH^2+BH^2BH^2+H^2BH^2+HBH^2BH+H^2BHBH=0. \tag{7}$$

Из (4) и (7) получаем

$$H^2BH^2B+HBH^2BH+H^2BHBH=0. \tag{8}$$

Аналогично, (умножив (4) на H (слева))

$$BH^2BH^2+HBH^2BH+HBHBH^2=0. \tag{9}$$

Из (7), (9) получаем $H^2BH^2+HBHBH^2+H^2BHBH=0$. (10)

Еще раз, используя $G_1=0$, получаем

$$\begin{aligned}&2(B^2H+BHB+HB^2)-6(BH+HB)-3H^2+6H\\&-(B^2H^2+H^2B^2+BH^2B)+3(BH^2+H^2B)=0.\end{aligned} \tag{11}$$

Умножив (11) на H^2 слева и умножив (11) на H справа, получаем

$$H^2BH^2+H^2BHBH=0. \tag{12}$$

Из (10) и (12) получаем $HBHBH^2=0$. Аналогично, $H^2BHBH=0$. Поэтому

$$H^2BH^2=H^2BHBH=HBHBH^2=HBH^2BH=0. \tag{13}$$

Умножив (11) на H^2 слева, получаем

$$2H^2B^2H+2H^2BHBH-6H^2BH=0. \tag{14}$$

Умножив (14) на HB слева, получаем $HB^2H^2BH = 0$. Аналогично, $HB^2H^2BH = 0$.

Аналогично, для A и B^{-1} получаем $HB^{-1}H^2B^{-1}H = 0$. Из этого и $HBH^2B^2H = 0$, $HB^2H^2BH = 0$, получаем $HB^2H^2B^2H = 0$. Поэтому

$$HB^2H^2B^2H = HBH^2B^2H = HB^2H^2BH = HBH^2BH = 0. \qquad (15)$$

Пусть $W(H,B)$ – слово с $L(W) \geq 8$ и в $W(H,B)$ имеется элемент H^2. Тогда $trW(H,B) = tr(\cdots BH^2B\cdots) = tr(\cdots HBH^2BH\cdots)$ либо $tr(\cdots HB^2H^2B^2H\cdots)$, либо $tr(\cdots HB^2H^2BH\cdots)$, либо $tr(\cdots HBH^2B^2H\cdots)$. Из (15) получаем $trW(H,B) = tr(\cdots BH^2B\cdots) = 0$.

Лемма 4. *Пусть* $(\rho(p)-E)^3 = 0$ *для любого примитивного элемента* p. *Тогда* $trW(\rho(p),\rho(q)-E) = 0$, *когда в слове* $W(\rho(p),\rho(q)-E)$ *встречается не более трех элементов вида* $\rho(q)-E$ (*либо не более трех элементов вида* $\rho(p)$), *где* p *и* q *– два ассоциированных примитивных элемента группы* F_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из $trB^mA = n$ (лемма 1) легко докажем, что $trT^mA = 0$. Из $trBABA = n$ (лемма 1) и $trT^mA = 0$ получаем $trTATA = 0$. Из $trB^{-1}A^2 = n$ и $trBA^2 = n$ получаем $trT^2A^2 = trTA^2 = 0$. Из $trBABA = n$, $trB^2ABA = n$ и $trB^2AB^2A = n$ получаем $trT^2ATA = trT^2AT^2A = 0$.

Таким образом, $trW(T,A) = 0$, когда в слове $W(T,A)$ встречаются не более двух элементов A. Тогда

$$trT^pHT^qH = trT^pAT^qA - trT^pAT^q - trT^pT^qH - trT^pT^q =$$
$$= trT^pAT^qA - trT^pAT^q - trT^pT^qA = 0.$$

Следовательно, $trW(T,H) = 0$, когда в слове $W(T,H)$ встречаются не более двух элементов *H*. Поэтому $trB^pHB^qH = \sum trW(T,H) = 0$. То есть $trW(B,H) = 0$, когда в слове $W(B,H)$ имеется не более двух элементов H. Аналогично, $trW(T,A) = 0$, когда в слове $W(T,A)$ имеется не более двух элементов *A*.

Из (13) имеем $tr(\cdots H^2B^iH^2\cdots) = 0$.

Так как

$$n = tr(AB)^3 = tr(B+HB)^3 = trB^3 + \sum trW(H,B) + tr(HB)^3 = n + tr(HB)^3,$$

где в $W(T,H)$ не более двух H. Поэтому $tr(HB)^3 = 0$.

Из $n = tr(AB)^2AB^2 = trB^4 + \sum trW(B,H) + tr(HB)^3B = n + tr(HB)^3B$, где в $W(B,H)$ не более двух H, получаем $tr(HB)^3B = 0$.

Поскольку $n = tr(AB^2)^2AB = trB^4 + \sum trW(B,H) + tr(HB^2)^2HB = n + tr(HB^2)^2HB$, где в $W(B,H)$ не более двух H, тогда $tr(HB^2)^2HB = 0$.

Из $n = tr(AB^2)^3 = tr(B^2+HB^2)^3 = trB^6 + \sum trW(H,B) + tr(HB^2)^3 = n + tr(HB^2)^3$, где в $W(B,H)$ не более двух H, получаем $tr(HB^2)^3 = 0$.

Т.е.

$$\mathrm{tr}\, HBHBHB^2 = \mathrm{tr}\, HBHB^2HB^2 = \mathrm{tr}\, HB^2HB^2HB^2 = trHBHBHB = 0 \quad (16).$$

Из $trH^2B^{-1}HB^{-1} = 0$ (потому что B встречается 2 раза) и $B^{-1} = B^2 - 3B + 3E$ получаем

$tr(H^2B^2HB^2) - 3tr(H^2B^2HB) - 3tr(H^2BHB^2) + \sum trW(B,H) = 0$, где в слове $W(B,H)$ не более двух H. Поэтому $tr(H^2B^2HB^2) - 3tr(H^2B^2HB) - 3tr(H^2BHB^2) = 0$. Из $n = trB^3AB^3AB^2A$ и (16) получаем $6tr(H^2B^2HB^2) - 3tr(H^2B^2HB) - 3tr(H^2BHB^2) = 0$. Из $n = trB^3AB^3AB^2A$ и $n = trB^3AB^3AB^2A$ получаем $0 = trB^3AB^3A(E-3B)A$. Из этого и (16) получаем $9tr(H^2B^2HB^2) - 9tr(H^2B^2HB) - 18tr(H^2BHB^2) = 0$.

$$rank\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -3 \\ 9 & -9 & -18 \end{pmatrix} = 3,$$

поэтому $\mathrm{tr}\, H^2B^2HB^2 = \mathrm{tr}\, H^2B^2HB = trH^2BHB^2 = 0$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $(\rho(p) - E)^3 = 0$ *для любого примитивного элемента* p. *Тогда* $trW(H,B) = 0$, *где* $L(W) < 8$.

Лемма 5. *Пусть* $(\rho(p) - E)^3 = 0$ *для любого примитивного элемента* p. *Тогда* $trW(\rho(p),\rho(q)) = n$, *где* p *и* q *– два ассоциированных примитивных элемента группы* F_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\rho(p) = P = X + E,\ \rho(q) = Q$, $W(\rho(p),\rho(q)) = W(P,Q)$ – произвольное слово. Тогда $trW(\rho(p),\rho(q)) = n + \sum a_j trW_j(X,Q)$, *где* $W_j(X,Q) = X^{i_1}Q^{s_1}\ldots X^{i_k}Q^{s_k}$, $i_r, s_r \in \{1,\ 2\}$, $a_j \in \mathbf{Z}$.

Доказательства будем вести индукцией по k.

Если $k = 1$, то $trW_j(X,Q) = 0$ (следствие 1, лемма 2). Предположим, что если $k < m$, то $trW_j(X,Q) = 0$. Докажем, что если $k = m$, то $trW_j(X,Q) = 0$.

Если $L(W) < 8$, то $trW_j(X,Q) = 0$ (следствие 1). Поэтому можно считать, что $L(W) \geq 8$. И, по лемме 3, что в $W(X,Q)$ нет элементов X^2. Таким образом,

$$trW_j(X,Q) = tr(XQ^{s_1}\ldots XQ^{s_m}) =$$
$$= tr((P-E)Q^{s_1}XQ^{s_2}\ldots XQ^{s_m}) =$$
$$= tr(PQ^{s_1}XQ^{s_2}\ldots XQ^{s_m}) + tr(EQ^{s_1}XQ^{s_2}\ldots XQ^{s_m}) =$$
$$= tr(PQ^{s_1}XQ^{s_2}\ldots XQ^{s_m}).$$

По лемме 2 $tr(EQ^{s_1}XQ^{s_2}\dots XQ^{s_m}) = tr(XQ^{s'_1}XQ^{s'_2}\dots XQ^{s'_{m-1}})$, где $s'_r \in \{1,\ 2\}$. Поэтому, $tr(EQ^{s_1}XQ^{s_2}\dots XQ^{s_m}) = 0$. Тогда $trW_j(X,Q) = tr(PQ^{s_1}XQ^{s_2}\dots XQ^{s_m})$. Аналогично, получаем

$$trW_j(X,Q) = tr(PQ^{s_1}PQ^{s_2}\dots PQ^{s_m}) - tr(PQ^{s_1}PQ^{s_2}\dots PQ^{s_{m-1}+s_m}). \quad (17)$$

По лемме 2 $tr(PQ^{s_1}PQ^{s_2}\dots PQ^{s_{m-1}+s_m}) = n + \sum a_j tr(X^{i_1}Q^{s_1}\dots X^{i_k}Q^{s_k})$, $k \le m-1$. Следовательно,

$$tr(PQ^{s_1}PQ^{s_2}\dots PQ^{s_{m-1}+s_m}) = n. \quad (18)$$

Так как $s_r \in \{1,\ 2\}$, $tr(PQ^{s_1}PQ^{s_2}\dots PQ^{s_m}) = trW''(PQ,PQ^2)$. Если все $s_r = 1$, то $tr(PQ^{s_1}PQ^{s_2}\dots PQ^{s_m}) = n$. Если это не так, то в $W''(PQ,PQ^2)$ встречаются не больше $m-1$ элементов вида PQ. Тогда по лемме 2

$$trW''(PQ,PQ^2) = n + \sum a_j tr[(PQ-E)^{i_1}(PQ^2)^{s_1}\dots(PQ-E)^{i_t}(PQ^2)^{s_t}],$$

$i_r, s_r \in \{1,\ 2\}$, $t < m$.

Поэтому,

$$tr(PQ^{s_1}PQ^{s_2}\dots PQ^{s_m}) = trW''(PQ,PQ^2) = n. \quad (19)$$

Из (17), (18), (19) получаем

$$trW_j(X,Q) = tr(PQ^{s_1}PQ^{s_2}\dots PQ^{s_m}) - tr(PQ^{s_1}PQ^{s_2}\dots PQ^{s_{m-1}+s_m}) = n - n = 0.$$

Тогда $trW(\rho(p),\rho(q)) = n + \sum a_j trW_j(X,Q) = n + 0 = n$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Берем любую матрицу C в подгруппе $\rho(F_2)$. Тогда по лемме 5 $\mathrm{tr}\,C = n$. Так как это равенство справедливо для любой матрицы C, то $\mathrm{tr}\,C = \mathrm{tr}\,C^2 = \dots = \mathrm{tr}\,C^n = n$. Отсюда следует, что C – унипотентная матрица. Теорема доказана.

Авторы благодарны профессору В.В. Беняш-Кривцу за помощь в проверке вычислений и написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Магнус, В.*** Комбинаторная теория групп: представление групп в терминах образующих и соотношений / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. – М.: Наука, 1974.
2. ***Самсонов, Ю.Б., Тавгень, О.И***. // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 6.
3. ***Тавгень О.И., Синьсун Ян*** // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2009. – № 3. – С. 74–79.

S U M M A R Y

Let $\rho : F_2(x, y) \to GL(n,C)$ be a matrix representation of F_2, where F_2 is a free group of rank two with generators x and y. If the image of any primitive element from F_2 is an unipotent Jordan matrix of small dimension, then $\rho F_2)$ is a unipotent subgroup in GL(n,C).

Поступила в редакцию 22.04.2010 г.