УДК 521.1

Метод собственного времени в задаче двух тел в параболическом и гиперболическом случае

Ю.В. Трубников
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В данной статье получено параметрическое представление решений задачи двух тел в терминах параметра, который естественно назвать собственным временем данной динамической системы. Найденные соотношения позволяют в удобном аналитическом виде находить радиальную составляющую и декартовы координаты гравитирующих тел.

Полученная явная зависимость декартовых координат от параметра дает возможность находить в явном виде различные характеристики движения: скорость, ускорение, кривизну орбиты, а в гиперболическом случае угол между асимптотами, что представляет интерес в теории рассеяния.

Система дифференциальных уравнений, описывающая кеплеровское движение двух тел в прямоугольных декартовых координатах с центром в точке с массой m_0, имеет следующий вид [1]:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3}, \tag{1}$$

где $\mu = f\left(m_0 + m_1\right), m_0, m_1$ – массы гравитирующих тел, f – гравитационная постоянная, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Основные классические методы аналитического интегрирования системы (1) – это метод Клеро–Лапласа и метод Бине. Метод Клеро–Лапласа состоит в переходе к цилиндрической системе координат

$$x = \rho \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \lambda, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

что приводит к системе уравнений [1, с. 430]

Адрес для корреспонденции: 210026, г. Витебск, ул. Коммунистическая, д. 12/23, кв. 16 – Трубников Ю.В.

$$\begin{cases} u''_{\lambda\lambda} + u = \dfrac{\mu}{c^2}\left(1+s^2\right)^{-\frac{3}{2}}, \\ s''_{\lambda\lambda} + s = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $u = \dfrac{1}{\rho}$, $\quad s = \dfrac{z}{\rho}$, $\quad c$ – некоторая постоянная.

Система (2) представляет собой систему из двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями u и s, после интегрирования которой и время t определяется квадратурой в зависимости от долготы λ.

В методе Бине ([1], с.464) в качестве параметра берется величина

$$\omega = \omega_0 + c\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^2}. \tag{3}$$

Такой подход приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} + u = \frac{\mu}{c^2},$$

где $u = \dfrac{1}{r}$, $\quad c$ – некоторая постоянная.

Однако, и в этом цель настоящей статьи, можно получить более удобное параметрическое представление решений системы (1), если в качестве параметра выбрать параметр τ следующим образом:

$$\frac{dt}{d\tau} = r\left[t(\tau)\right]. \tag{4}$$

Замена времени в задаче двух тел с произвольным потенциалом. Рассмотрим задачу движения двух тел с массами m_0 и m_1 в силовом поле с потенциалом $U(r)$, $\quad r = \sqrt{\left(x_1 - x_0\right)^2 + \left(y_1 - y_0\right)^2 + \left(z_1 - z_0\right)^2}$, зависящим лишь от расстояния между телами в абсолютной декартовой системе координат.

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение в абсолютных декартовых координатах, будет иметь вид:

$$m_0\ddot{x}_0 = \frac{\partial U(r)}{\partial x_0} = \frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_0} = -\frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{1}{r}\cdot\left(x_1 - x_0\right),$$

$$m_1\ddot{x}_1 = \frac{\partial U(r)}{\partial x_1} = \frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{1}{r}\cdot\left(x_1 - x_0\right).$$

Аналогичные уравнения получаются и для переменных y_0, y_1, z_0, z_1.

Таким образом,

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_0 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_0}\right)\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot\left(x_1 - x_0\right).$$

Это уравнение дает возможность перейти к относительной системе координат; положив

$$x = x_1 - x_0, \quad y = y_1 - y_0, \quad z = z_1 - z_0,$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{dU(r)}{dr} \cdot x, & (5.1) \\ \ddot{y} = \dfrac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{dU(r)}{dr} \cdot y, & (5.2) \\ \ddot{z} = \dfrac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{dU(r)}{dr} \cdot z. & (5.3) \end{cases}$$

Заметим, что квадратичная аппроксимация потенциала $U(r)$ приводит систему (5.1–5.3) к системе линейных дифференциальных уравнений, но это направление исследований отражено в работах [2–7].

Теорема 1. *Подстановка (4) приводит уравнение для радиальной составляющей к виду*

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = hr + \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left[r^2 U(r) \right], \tag{6}$$

в котором постоянная энергии h *определяется равенством*

$$h = \dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0) + \dot{z}^2(0) - \frac{2(m_0 + m_1)}{m_0 m_1} \cdot U\left[r(0) \right]. \tag{7}$$

При этом уравнения для координат будут иметь вид:

$$r(\tau) x''(\tau) - r'(\tau) x'(\tau) - \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot r^2(\tau) \cdot \frac{dU(r)}{dr} \cdot x(\tau) = 0; \tag{8.1}$$

$$r(\tau) y''(\tau) - r'(\tau) y'(\tau) - \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot r^2(\tau) \cdot \frac{dU(r)}{dr} \cdot y(\tau) = 0; \tag{8.2}$$

$$r(\tau) z''(\tau) - r'(\tau) z'(\tau) - \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot r^2(\tau) \cdot \frac{dU(r)}{dr} \cdot z(\tau) = 0. \tag{8.3}$$

Штрихом здесь обозначена производная по параметру τ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим обе части уравнения (5.1) на $\dot{x}$ (соответственно (5.2) на $\dot{y}$, (5.3) на $\dot{z}$) и сложим полученные равенства, тогда

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dU(r)}{dr} \cdot \left(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \right) = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot \frac{dU\left[r(t) \right]}{dt},$$

т.е.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot \frac{dU\left[r(t) \right]}{dt}.$$

Таким образом, интеграл энергии будет иметь вид

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2(m_0 + m_1)}{m_0 m_1} \cdot U\left[r(t) \right] + h. \tag{9}$$

В терминах параметра τ данное равенство запишется в виде

$$\frac{1}{r^2(\tau)} \cdot \left[x'^2(\tau) + y'^2(\tau) + z'^2(\tau) \right] = \frac{2(m_0 + m_1)}{m_0 m_1} \cdot U\left[r(\tau) \right] + h. \tag{10}$$

Далее из системы (5.1–5.3) получаем

$$x\ddot{x}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot x^2;\qquad y\ddot{y}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot y^2;$$
$$z\ddot{z}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot z^2.$$

Сложим эти три уравнения, тогда

$$x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot r\cdot\frac{dU(r)}{dr}. \tag{11}$$

Из (9) и (11) получаем следующее уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(r^2\right)=\frac{d}{dt}\left(2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}\right)=2\left(x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}\right)+2\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)=$$
$$=\frac{2\left(m_0+m_1\right)}{m_0m_1}\cdot\frac{rdU(r)}{dr}+\frac{4\left(m_0+m_1\right)}{m_0m_1}\cdot U(r)+2h,$$

т.е.

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(r^2\right)=\frac{2\left(m_0+m_1\right)}{m_0m_1}\cdot\left[r\frac{dU}{dr}+2U(r)\right]+2h. \tag{12}$$

С другой стороны

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(r^2\right)=2\left(\dot{r}\right)^2+2r\ddot{r}. \tag{13}$$

Приравнивая правые части равенств (12) и (13) найдем, что

$$\left(\dot{r}\right)^2+r\ddot{r}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\left[r\frac{dU(r)}{dr}+2U(r)\right]+h. \tag{14}$$

Далее заметим, что

$$r'(\tau)=\frac{dr}{d\tau}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}=\dot{r}r,$$
$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=\ddot{r}r^2+\left(\dot{r}\right)^2r=r\left[\ddot{r}r+\left(\dot{r}\right)^2\right]. \tag{15}$$

Из равенств (14) и (15) получаем:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=r\left[\ddot{r}r+\left(\dot{r}\right)^2\right]=r\left\{\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\left[r\frac{dU(r)}{dr}+2U(r)\right]+h\right\}=hr+\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\left[r^2\cdot\frac{dU(r)}{dr}+2rU(r)\right]=$$
$$=hr+\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{d}{dr}\left[r^2\cdot U(r)\right],$$

т.е. имеет место уравнение (6).

Для вывода уравнения (8.1) заметим, что

$$\frac{dx\left[t(\tau)\right]}{d\tau}=\frac{dx\left[t(\tau)\right]}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}=\dot{x}r(\tau),$$

и

$$\frac{d^2x\left[t(\tau)\right]}{d\tau^2}=\ddot{x}r^2(\tau)+\dot{x}r'(\tau)=r^2(\tau)\cdot\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r(\tau)}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot x(\tau)+\dot{x}r'(\tau)=$$
$$=r(\tau)\cdot\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot x(\tau)+\frac{x'(\tau)r'(\tau)}{r(\tau)}.$$

Умножив обе части последнего уравнения на $r(\tau)$, получим уравнение (8.1).

Аналогично выводятся уравнения (8.2) и (8.3).

Теорема доказана.

Следствие 1. Если

$$U(r)=\frac{fm_0m_1}{r},$$

то уравнение (6) приводится к виду

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=hr+f\left(m_0+m_1\right). \tag{16}$$

При этом уравнения для координат преобразуются следующим образом:

$$r(\tau)x''(\tau)-r'(\tau)x'(\tau)+\mu x(\tau)=0, \tag{17.1}$$

$$r(\tau)y''(\tau)-r'(\tau)y'(\tau)+\mu y(\tau)=0, \tag{17.2}$$

$$r(\tau)z''(\tau)-r'(\tau)z'(\tau)+\mu z(\tau)=0. \tag{17.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в этом случае

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=hr+\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{d}{dr}\cdot\left[r^2\cdot\frac{fm_0m_1}{r}\right]=hr+f\left(m_0+m_1\right).$$

Далее из (8.1)

$$rx''-r'x'-\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot r^2\left(-\frac{fm_0m_1}{r^2}\right)\cdot x=rx''-r'x'+f\left(m_0+m_1\right)\cdot x=0.$$

Уравнения (17.1)–(17.3) представляют собой линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Следствие доказано.

Случай параболического движения. В случае параболического движения $h=0$ и, таким образом, уравнение (16) будет иметь вид

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=\mu. \tag{18}$$

Теорема 2. *В параболическом случае решение двухточечной краевой задачи будет иметь вид*

$$r(\tau)=\frac{\mu\tau^2}{2}+\left[\frac{r_1-r_0}{\tau_1-\tau_0}-\frac{\mu}{2}\left(\tau_1+\tau_0\right)\right]\tau+$$
$$+\frac{r_0\tau_1-r_1\tau_0}{\tau_1-\tau_0}+\frac{1}{2}\mu\tau_0\tau_1. \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из уравнения (18) следует, что

$$\frac{dt}{d\tau}=r(\tau)=\frac{\mu\tau^2}{2}+\mu_1\tau+\mu_0, \tag{20}$$

где постоянные μ_0,μ_1 определяются из системы уравнений

$$\begin{cases}\mu_1\tau_0+\mu_0=r_0-\dfrac{\mu\tau_0^2}{2},\\ \mu_1\tau_1+\mu_0=r_1-\dfrac{\mu\tau_1^2}{2}.\end{cases} \tag{21}$$

Таким образом,

$$\mu_0=\frac{r_0\tau_1-r_1\tau_0}{\tau_1-\tau_0}+\frac{1}{2}\mu\tau_0\tau_1,\quad \mu_1=\frac{r_1-r_0}{\tau_1-\tau_0}-\frac{\mu}{2}\left(\tau_1+\tau_0\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие*

$$\mu\left(\tau_1+\tau_0\right)^2-2\left(r_0+r_1\right)\neq 0. \qquad (22)$$

Тогда решение краевой задачи

$$x\left(\tau_0\right)=x_0,\quad x\left(\tau_1\right)=x_1$$

в параболическом случае будет иметь вид

$$x\left(\tau\right)=a\tau^2+b\tau+c, \qquad (23)$$

где

$$a=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad b=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad c=\frac{\Delta_3}{\Delta}, \qquad (24)$$

$$\Delta=\frac{1}{2}\left(\tau_1+\tau_0\right)\left[\mu\left(\tau_1+\tau_0\right)^2-2\left(r_0+r_1\right)\right], \qquad (25)$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & -\mu_1 & \mu\\ x_0 & \tau_0 & 1\\ x_1 & \tau_1 & 1\end{vmatrix},\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}2\mu_0 & 0 & \mu\\ \tau_0^2 & x_0 & 1\\ \tau_1^2 & x_1 & 1\end{vmatrix},\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}2\mu_0 & -\mu_1 & 0\\ \tau_0^2 & \tau_0 & x_0\\ \tau_1^2 & \tau_1 & x_1\end{vmatrix},$$

$$\mu_0=\frac{r_0\tau_1-r_1\tau_0}{\tau_1-\tau_0}+\frac{1}{2}\mu\tau_0\tau_1,\quad \mu_1=\frac{r_1-r_0}{\tau_1-\tau_0}-\frac{\mu}{2}\left(\tau_1+\tau_0\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя выражение

$$x\left(\tau\right)=a\tau^2+b\tau+c$$

в уравнение

$$r\left(\tau\right)x''\left(\tau\right)-r'\left(\tau\right)x'\left(\tau\right)+\mu x\left(\tau\right)=0,$$

получаем

$$2a\left(\frac{\mu\tau^2}{2}+\mu_1\tau+\mu_0\right)-\left(\mu\tau+\mu_1\right)\left(2a\tau+b\right)+\mu\left(a\tau^2+b\tau+c\right)=a\mu\tau^2+2a\mu_1\tau+2a\mu_0-$$

$$-2a\mu\tau^2-\mu b\tau-2a\mu_1\tau-\mu_1 b+a\mu\tau^2+\mu b\tau+\mu c=2\mu_0 a-\mu_1 b+\mu c.$$

Таким образом, система для нахождения коэффициентов b,c,β будет иметь вид:

$$\begin{cases}2\mu_0 a-\mu_1 b+\mu c,\\ a\tau_0^2+b\tau_0+c=x_0,\\ a\tau_1^2+b\tau_1+c=x_1.\end{cases}$$

Найдем определитель Δ этой системы.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2\mu_0 & -\mu_1 & \mu\\ \tau_0^2 & \tau_0 & 1\\ \tau_1^2 & \tau_1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\mu_0 & -\mu_1 & \mu\\ \tau_0^2 & \tau_0 & 1\\ \tau_1^2-\tau_0^2 & \tau_1-\tau_0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\tau_1-\tau_0\right)\begin{vmatrix}2\mu_0 & -\mu_1 & \mu\\ \tau_0^2 & \tau_0 & 1\\ \left(\tau_0+\tau_1\right) & 1 & 0\end{vmatrix}=\left(\tau_1-\tau_0\right)\left(\mu\begin{vmatrix}\tau_0^2 & \tau_0\\ \tau_0+\tau_1 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2\mu_0 & -\mu_1\\ \tau_0+\tau_1 & 1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(\tau_1-\tau_0\right)\left[\mu\left(\tau_0^2-\tau_0^2-\tau_0\tau_1\right)-\left(2\mu_0+\mu_1\tau_0+\mu_1\tau_1\right)\right]=-\left(\tau_1-\tau_0\right)\left[\mu\tau_0\tau_1+2\mu_0+\mu_1\left(\tau_0+\tau_1\right)\right]=$$

$$=-\left(\tau_1-\tau_0\right)\left[\mu\tau_0\tau_1+\frac{2\left(r_0\tau_1-r_1\tau_0\right)}{\tau_1-\tau_0}+\mu\tau_0\tau_1+\frac{\left(r_1-r_0\right)\left(\tau_0+\tau_1\right)}{\tau_1-\tau_0}-\frac{\mu\left(\tau_0+\tau_1\right)^2}{2}\right]=$$

$$=-\left[2\mu\tau_0\tau_1(\tau_1-\tau_0)+2r_0\tau_1-2r_1\tau_0+r_1\tau_0+r_1\tau_1-r_0\tau_0-r_0\tau_1-\frac{\mu}{2}(\tau_0+\tau_1)^2(\tau_1-\tau_0)\right]=$$

$$=-\left[2\mu\tau_0\tau_1(\tau_1-\tau_0)+(r_0+r_1)(\tau_1-\tau_0)-\frac{\mu}{2}(\tau_0+\tau_1)^2(\tau_1-\tau_0)\right]=\frac{\tau_1-\tau_0}{2}\left[\mu(\tau_1-\tau_0)^2-2(r_0+r_1)\right].$$

Далее применяем правило Крамера.

Теорема доказана.

Случай гиперболического движения. В случае гиперболического движения $h>0,$ но уравнение для радиальной составляющей $r(\tau)$ имеет тот же вид

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=hr+\mu.$$

Теорема 4. *В гиперболическом случае решение двухточечной краевой задачи*

$$r(\tau_0)=r_0,\quad r(\tau_1)=r_1$$

будет иметь вид

$$r(\tau)=c_1e^{\omega\tau}+c_2e^{-\omega\tau}-\frac{\mu}{\omega^2}, \tag{26}$$

где

$$c_1=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[\left(r_1+\frac{\mu}{\omega^2}\right)e^{-\omega\tau_0}-\left(r_0+\frac{\mu}{\omega^2}\right)e^{-\omega\tau_1}\right], \tag{27}$$

$$c_2=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[\left(r_0+\frac{\mu}{\omega^2}\right)e^{\omega\tau_1}-\left(r_1+\frac{\mu}{\omega^2}\right)e^{\omega\tau_0}\right], \tag{28}$$

$$\omega=\sqrt{h}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система для нахождения коэффициентов c_1, c_2 определяется краевыми условиями:

$$\begin{cases} c_1e^{\omega\tau_0}+c_2e^{-\omega\tau_0}=r_0+\dfrac{\mu}{\omega^2}, \\ c_1e^{\omega\tau_1}+c_2e^{-\omega\tau_1}=r_1+\dfrac{\mu}{\omega^2}. \end{cases}$$

Покажем, что определитель Δ этой системы не равен нулю. Действительно,

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{\omega\tau_0} & e^{-\omega\tau_0} \\ e^{\omega\tau_1} & e^{-\omega\tau_1} \end{vmatrix}=2\,\mathrm{sh}\,\omega(\tau_1-\tau_0)\neq 0. \tag{29}$$

Теорема 5. *Пусть выполнено условие*

$$\omega^2(\rho_0+\rho_1)\neq 2\mu\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\right], \tag{30}$$

где

$$\rho_0=r_0+\frac{\mu}{\omega^2},\quad \rho_1=r_1+\frac{\mu}{\omega^2}, \tag{31}$$

тогда решение $x(\tau)$ двухточечной краевой задачи

$$x(\tau_0)=x_0,\quad x(\tau_1)=x_1$$

выражается следующим образом:

$$x(\tau) = ae^{\omega\tau} + be^{-\omega\tau} + c, \tag{32}$$

где $a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad c = \frac{\Delta_3}{\Delta},$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2c_2\omega^2 & 2c_1\omega^2 & \mu \\ e^{\omega\tau_0} & e^{-\omega\tau_0} & 1 \\ e^{\omega\tau_1} & e^{-\omega\tau_1} & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2c_1\omega^2 & \mu \\ x_0 & e^{-\omega\tau_0} & 1 \\ x_1 & e^{-\omega\tau_1} & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2c_2\omega^2 & 0 & \mu \\ e^{\omega\tau_0} & x_0 & 1 \\ e^{\omega\tau_1} & x_1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2c_2\omega^2 & 2c_1\omega^2 & 0 \\ e^{\omega\tau_0} & e^{-\omega\tau_0} & x_0 \\ e^{\omega\tau_1} & e^{-\omega\tau_1} & x_1 \end{vmatrix},$$

c_1, c_2 *определяется равенствами* (27), (28).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5 проводится аналогично доказательству теоремы 3**.**

Заключение. Полученные в статье формулы, дающие координаты движущегося тела в случае параболического и гиперболического движений, могут быть использованы для вычисления траекторий искусственных космических тел, астероидов и метеоритов. Другое эффективное направление линеаризации уравнений задачи многих тел основано на чебышевской аппроксимации потенциала и отражено в работах [2–7]. Метод собственного времени динамической системы будет полезен в космологии, квантовой и небесной механике, в частности, для развития теории движения ИСЗ и т.д. Отметим, что эллиптический случай применения данного метода рассмотрен в работе [8].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. ***Дубошин, Г.Н.*** Небесная механика. Основные задачи и методы / Г.Н. Дубошин. – М.: Наука, 1975. – С. 434.
2. ***Трубников, Ю.В.*** Решение задачи трех тел с предварительной чебышевской аппроксимацией / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: труды Междунар. матем. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. академика Ф.Д. Гахова, Минск, 13–19 сент. 2006 г. / Труды Института математики НАН Беларуси / редкол.: А.А. Килбас, С.В. Рогозин. – Минск, 2006. – С. 134–138.
3. ***Трубников, Ю.В.*** Аппроксимативный метод решения задачи многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2008. – № 2(48). – С. 130–138.
4. ***Трубников, Ю.В.*** Аппроксимация силовой функции общей задачи многих тел в метрике L_2 / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Вестн. Полоцк. государств. ун-та, серия фундаментальных наук (С). – 2008. – № 3. – С. 133–140.
5. ***Трубников, Ю.В.*** Чебышевская аппроксимация силовой функции общей задачи многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания: тезисы 4-й Междунар. матем. конф., Обнинск, 14−18 мая 2008 г. / Российский фонд фундаментальных исследований, Обнинский гос. технич. ун-т атомной энергетики, Матем. инст. им. В.А. Стеклова РАН, Инст. матем. моделирования РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, Инст. прикл. матем. им. Келдыша РАН, Инст. вычислит. матем. РАН; редкол.: В.А. Галкин [и др.]. – Обнинск, 2008. – С. 78–79.
6. ***Трубников, Ю.В.*** Аппроксимативный метод решения задачи многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // X Белорусская математическая конференция: тезисы Междунар. научной конф., Минск, 3–7 ноября 2008 г. / Труды Института математики НАН Беларуси / редкол.: А.А. Килбас, С.В. Рогозин. – Минск, 2006. – С. 134–138.

7. ***Трубников, Ю.В.*** Метод чебышевской аппроксимации потенциала в задаче многих тел: монография / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2009. – 187 с.
8. ***Воронов, А.М.*** Метод собственного времени в задаче двух тел // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2009. – № 3(53). – С. 145–151.

S U M M A R Y

The parametric representation of the solutions is obtained for two-body problem in terms of parameter τ, which can be naturally named as a proper time of the given dynamical system. The found correlations allow to approximate the radial component and Cartesian coordinates of the gravitating bodies with a very convenient analytical expressions. Moreover, the appropriate differential equations make it possible to assert that the elliptic case of the two-body problem is equivalent to the harmonic oscillator problem. The replacement of the right components of the system of differential equations by the polynomials of the best approximation with the following series representation was realized in papers of Trubnikov Yu.V., Voronov A.M.

Поступила в редакцию 15.01.2010