УДК 539.3

Применение асимптотических методов для решения дифференциальных уравнений, описывающих устойчивость слоистых композитных цилиндрических оболочек при кручении

Е.А. Корчевская*, Г.И. Михасев, А.С. Шибут***

**Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»*

*** Белорусский государственный университет*

Введение. Тонкие слоистые композитные оболочки, сочетающие в себе высокую прочность и относительно малый вес, нашли широкое применение в качестве составляющих элементов различных инженерных сооружений, в машино- и судостроении, в авиационной и ракетно-космической технике и т.п. В последнее время происходит стремительное развитие в этих отраслях. Появляются новые материалы, новые технологии и вслед за ними интенсивно разрабатываются методы их расчета. Применение многослойных конструкций при их рациональном проектировании позволяет обеспечить достижение высокой удельной жесткости и прочности, требуемых звуко- и теплоизоляционных свойств, демпфирующих и вибропоглощающих характеристик.

Наряду с этим локальная потеря устойчивости относится к наименее изученному в теории слоистых тонких оболочек. Практически отсутствуют работы, в которых рассматриваются вопросы устойчивости с учетом неоднородного в направлении круговой координаты характера нагружения. Также мало внимания уделяется слоистым оболочкам, имеющим переменные физические и геометрические характеристики материала. Это обусловлено, во-первых, тем, что такого рода задачи стали актуальными относительно недавно, и, во-вторых, их математической сложностью, связанной с громоздкостью и высоким порядком разрешающих уравнений теории многослойных оболочек. В подавляющем большинстве публикаций геометрические характеристики оболочки (длина, радиус кривизны, толщина) предполагались независящими от криволинейных координат. Как следствие, в таких задачах потеря устойчивости сопровождается образованием волн, покрывающих всю поверхность оболочки.

Поэтому исследования, предназначенные для расширения знаний в области устойчивости тонких слоистых композитных оболочек в случае неоднородности геометрических характеристик, с учетом наличия на поверхности оболочки слабых мест, являются актуальными.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку длины *L*, состоящую из *N* изотропных слоев, характеризующихся толщиной h_k, модулем Юнга E_k, плотностью ρ_k и коэффициентом Пуассона ν_k, $k=1,2,\ldots,N$. В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-либо *k*-ого слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = Rs$, $\alpha_2 = R\varphi$. Здесь *R* – радиус цилиндра исходной поверхности, φ и *s* – окружная и продольная координаты соответственно.

В качестве исходных используем уравнения, основанные на гипотезах, сформулированных Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [1], которые отличаются от классических уравнений

Адрес для корреспонденции: 210000, г. Витебск, ул. П. Бровки, д. 7, корп. 1, кв. 93, тел.: +37529 591-09-35 – Корчевская Е.А.

полубезмоментной теории тонких оболочек наличием дополнительных слагаемых, учитывающих поперечные сдвиги слоев. Отбрасывание последних приводит к уравнениям для изотропной оболочки с физическими характеристиками, равными осредненным по толщине параметрам слоистой исходной оболочки и может давать существенные погрешности при расчетах:

$$\frac{Eh^3\eta_3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(1-\frac{\theta h^2}{b}\Delta\right)\Delta^2\chi^* + \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 F^*}{\partial\alpha_1^2} - 2T_{12}^0\frac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} = 0,$$
$$\Delta^2 F^* = \frac{Eh}{R_2}\frac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1^2},\ W^* = \left(1-\frac{h^2}{b}\Delta\right)\chi^*. \qquad (1)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат α_1, α_2, *E*, ν, ρ – осредненные модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала соответственно, *h* – толщина оболочки, F^*, χ^* – функции напряжений и перемещений, W^* – нормальный прогиб, T_{12}^0 – усилие сдвига, вызванное кручением оболочки, R_2 – радиус кривизны, параметры η_3, θ, b, определяются по формулам [1].

Уравнения (1) описывают состояние оболочки в окрестности безмоментного напряженно-деформированного состояния, характеризующегося усилием сдвига T_{12}^0.

В уравнениях (1) перейдем к безразмерной системе координат *s*, φ:

$$\varphi = \alpha_2/R,\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,$$

$$s = \alpha_1/R,\ \ 0 \le s \le l(\varphi) = L(\varphi)/R. \qquad (2)$$

При таком выборе координат первая квадратичная форма срединной поверхности имеет вид:

$$d\sigma^2 = R^2\,(ds^2 + d\varphi^2),$$

а радиус кривизны

$$R_2 = R\,k^{-1}\,(\varphi). \qquad (3)$$

Переменность физических и геометрических характеристик материала, из которого изготовлена оболочка, непостоянство радиуса кривизны (3), зависимость длины оболочки от окружной координаты (2) являются причиной появления на поверхности оболочки «наиболее слабых» областей, которые приводят к сильной локализации форм потери устойчивости.

Для описания локальной бифуркации безмоментного напряженного состояния используем систему полубезмоментных уравнений слоистых оболочек, записанную в безразмерном виде [1–3]:

$$\begin{cases}\mu^4\left(1-\mu^3\tau\Delta\right)\Delta^2\chi + k(\varphi)\dfrac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \lambda 2\mu t_3^0\dfrac{\partial^2}{\partial s\partial\varphi}\left(\chi-\mu^2\kappa\Delta\chi\right) = 0,\\ \mu^4\Delta^2 F - k(\varphi)\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\chi-\mu^2\kappa\Delta\chi\right) = 0,\end{cases} \qquad (4)$$

где $F = F^*/EhR^2\mu^4$, $\chi = \chi^*/R$ – безразмерные функции напряжений и перемещений, Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат φ, s, $\lambda > 0$ – параметр нагружения, который связан с усилием сдвига $T_{12}{}^0 = \lambda Eh\mu^5 t_3^0$, μ – малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки, и имеет вид [2]:

$$\mu^8 = h^2\eta_3 \Big/ \left[12R^2\left(1-\nu^2\right)\right]. \qquad (5)$$

Здесь τ , κ – параметры, учитывающие осредненные эффекты поперечных сдвигов и вводятся по формулам [2]:

$$K\big/\pi^2 = \mu^2\kappa\,,\ K\theta\big/\pi^2 = \mu^3\tau\,,\ \kappa,\tau \sim 1 \text{ при } \mu \to 0\,, \qquad (6)$$

где $K = \pi^2 h^2 \Big/ \left(bR^2\right)$.

Предположим, что функция $k(\varphi)$ достаточное число раз дифференцируема по переменной φ и вместе со своими производными по φ имеют порядок $O(1)$ при $\mu \to 0$.

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания.

При построении основного напряженного состояния с точностью до величины порядка μ^2 при s=0, s=$l(\varphi)$ нужно удовлетворить условиям [4]:

$$F = \chi = 0\,, \text{ при } s = 0,\ l(\varphi)\,. \qquad (7)$$

Задача состоит в определении наименьшего $\lambda > 0$, для которого краевая задача (4), (7) имеет ненулевое решение.

Задача (4)–(7) отличается от уравнений, рассмотренных в работе [5], учетом поперечных сдвигов уже в нулевом приближении, что позволяет избежать погрешности для вычисления критического усилия сдвига.

2. Асимптотическое решение. Считаем, что вследствие переменности геометрических параметров оболочка теряет устойчивость локально, в окрестности некоторой «наиболее слабой» образующей $\varphi = \varphi_0$.

Согласно методу, предложенному в [4], выполним растяжение масштаба в окрестности линии $\varphi = \varphi_0$:

$$\varphi = \varphi_0 + \mu^{1/2}\xi\,. \qquad (8)$$

Решение задачи (7), (7) будем искать в виде [4]:

$$\chi(s,\varphi,\mu) = \chi^{**}\exp\left\{i\left(\mu^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}a\xi^2\right)\right\},\ F(s,\varphi,\mu) = F^{**}\exp\left\{i\left(\mu^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}a\xi^2\right)\right\},$$

$$\chi^{**} = \sum_{j=0}^{\infty}\mu^{j/2}\chi_j(\xi,s),\quad F^{**} = \sum_{j=0}^{\infty}\mu^{j/2}f_j(\xi,s), \qquad (9)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \ldots\,, \qquad (10)$$

где $\chi_j(\xi,s)$, $f_j(\xi,s)$ – полиномы по ξ, имеющие достаточное число раз дифференцируемые по s коэффициенты. Параметр q характеризует изменяемость решения в окружном направлении и должен быть вещественным, а мнимая часть числа a, характеризующего скорость затухания амплитуды волн при удалении от линии $\varphi = \varphi_0$, должна быть положительной: q>0, $\mathrm{Im}\,a > 0$.

Функция $k(\varphi)$ раскладывается в ряды по степеням $\mu^{1/2}\xi$ в окрестности образующей $\varphi = \varphi_0$.

Подставим (9) в систему уравнений (4). Для определения неизвестных функций $f_j(s,\xi)$, $\chi_j(s,\xi)$ и чисел q, a, φ_0, λ_n приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\mu^{1/2}$. В результате получим рекуррентную последовательность дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=0}^{j} H_k \chi_{j-k} = 0\,,\ \ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{11}$$

и последовательность соответствующих граничных условий:

$$\sum_{k=0}^{j} \Gamma_k^i \chi_{j-k} = 0\,,\ \ i = 0{,}1\,,\ \ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \ \text{ при } \ s = 0,\ l(\varphi)\,. \tag{12}$$

Здесь

$$H_0\chi_0 = q^4\chi_0 + \frac{k^2(\varphi_0)\left(1+\kappa q^2\right)}{q^4}\frac{\partial^4\chi_0}{\partial s^4} - 2it_3^0\lambda_0 q\left(1+\kappa q^2\right)\frac{\partial\chi_0}{\partial s}\,,$$

а операторы H_k (k>0) выражаются через производные k-ого порядка от оператора H_0 по окружной и продольной координатам [4].

Нулевое приближение. Рассмотрим краевую задачу, возникающую в нулевом приближении:

$$q^4\chi_0 + \frac{k^2(\varphi_0)\left(1+\kappa q^2\right)}{q^4}\frac{\partial^4\chi_0}{\partial s^4} - 2it_3^0\lambda_0 q\left(1+\kappa q^2\right)\frac{\partial\chi_0}{\partial s} = 0\,, \tag{13}$$

$$\chi_0 = \frac{\partial^2\chi_0}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при} \ \ s = 0\,,\ \ s = l(\varphi)\,. \tag{14}$$

Очевидно, что наименьшему значению критической нагрузки оболочки соответствует наименьшее положительное собственное значение λ_0 краевой задачи (13)–(14).

Положим

$$\lambda_0^0 = \min_{q,\varphi_0} \lambda_0(q,\varphi_0) = \lambda_0\left(q^0,\varphi_0^0\right), \tag{15}$$

где параметры q^0, φ_0^0 будут определяться из соотношений:

$$\frac{\partial\lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial\lambda_0}{\partial\varphi_0} = 0 \ \text{ при } \ q = q^0\,,\ \varphi = \varphi_0^0\,. \tag{16}$$

Решение краевой задачи нулевого приближения осуществляется согласно методу, описанному в [4], и сводится к решению системы четырех уравнений, решение которой производится методом простых итераций.

Первое и второе приближения. Решением краевой задачи (13)–(14) будет функция:

$$\chi_0(\xi,s) = P_0(\xi)\chi_0^0(s)\,, \tag{17}$$

где $\chi_0^0(s)$ – собственная функция задачи (13)–(14) при условиях (16), $P_0(\xi)$ – пока неопределенная функция.

При $j=1$ имеем неоднородную краевую задачу. Условие существования решения задачи эквивалентно равенствам (16).

Во втором приближении получаем уравнение, из которого с учетом граничных условий получаем условие существования решения χ_2 :

$$-\frac{1}{2}\lambda_{qq}\frac{d^2P_0}{d\xi^2}+b\xi\frac{dP_0}{d\xi}+\left(\eta-\lambda_1+\frac{1}{2}\sigma+c\xi^2\right)P_0=0\,, \qquad (18)$$

где

$$\eta=\frac{\tau q^6}{\left(1+\kappa q^2\right)}\,,\ \sigma=-i\left(a\lambda_{qq}+\lambda_{q\varphi}\right),\quad 2c=a^2\lambda_{qq}+2a\lambda_{q\varphi}+\lambda_{\varphi\varphi}\,. \qquad (19)$$

Условие $c=0$ необходимо для существования решения уравнения (19) в виде полинома по ξ. Из этого условия находим единственную величину *a* такую, что $\mathrm{Im}\,a>0$:

$$a=i\left(\lambda_{\varphi\varphi}^0\big/\lambda_{qq}^0\right)^{1/2}. \qquad (20)$$

При $c=0$

$$\lambda_1=\lambda_1^{(n)}=\sigma\left(\frac{1}{2}+n\right)+\eta,\quad n=0,1... \qquad (21)$$

уравнение имеет решение $P_0(\xi)=H_n(\xi)$, где $H_n(\xi)$ – полином Эрмита n-ой степени. Величина λ_1 минимальна при $n=0$. В этом случае $H_n(\xi)\equiv 1$. Тогда $\lambda_1^{(0)}=\frac{1}{2}\sigma+\eta$ является наименьшим. Поправка λ_1 учитывает как эксцентриситет поперечного сечения, так и наличие поперечных сдвигов (так как зависит от параметров τ и κ).

3. Анализ результатов. Для примера рассмотрим тонкую трехслойную круговую цилиндрическую оболочку радиуса $R=150\text{мм}$ и длиной $L=450\text{мм}$. Первый и третий слои имеют одинаковую толщину $h_1=h_3=0{,}3\text{мм}$ и изготовлены из алюминия, который характеризуется модулем Юнга $70300\,H/\text{мм}^2$, плотностью $2{,}7\cdot 10^{-6}\,\text{кг}/\text{мм}^3$ и коэффициентом Пуассона равным $0{,}345$. Второй слой толщиной $h_2=0{,}8\,\text{мм}$ изготовлен из эпоксидной смолы с модулем Юнга равным $3450\,H/\text{мм}^2$, плотностью $1{,}2\cdot 10^{-6}\,\text{кг}/\text{мм}^3$ и коэффициентом Пуассона равным $0{,}300$.

На рис. 1 приведен график зависимости собственного значения λ_0 от параметра q.

Функция λ_0 принимает наименьшее значение $\lambda_0=1{,}01012$ при $q=1{,}1249$. Отсюда параметр критической нагрузки λ равен

$$\lambda_{\min}=1{,}07712\,. \qquad (22)$$

В табл. 1 приведен характер зависимости наименьшего собственного значения λ_0 от параметра κ, учитывающего осредненные эффекты поперечных сдвигов.

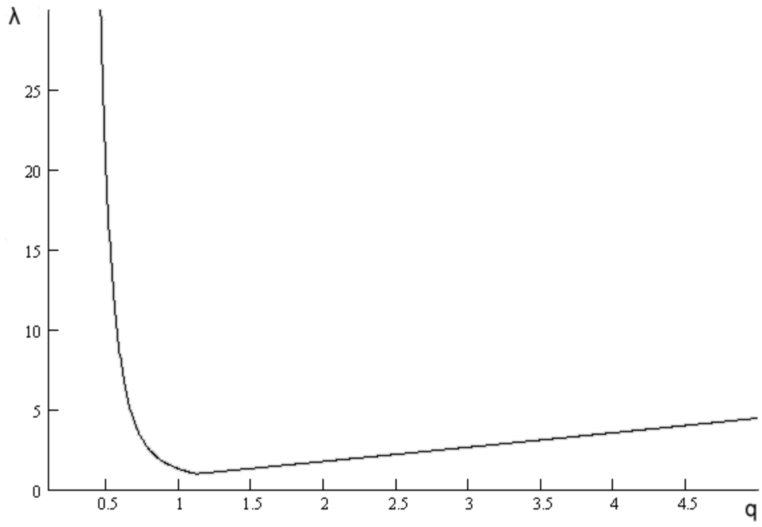

Рис. 1. **Зависимость собственного значения λ_0 от параметра q.**

Таблица 1

Зависимость наименьшего собственного значения λ_0 от параметра κ

κ	0,0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\lambda_{0_{\min}}$	1,00765	1,08837	1,12163	1,17973	1,24940	1,37162	1,46073

Заметим, что при увеличении параметра поперечного сдвига наименьшее собственное значение λ_0 увеличивается. При $\kappa = 0$ получаем наименьшее собственное значение λ_0 для изотропной оболочки с физическими характеристиками, равными осредненным по толщине параметрам слоистой исходной оболочки.

4. Заключение. Установлено, что расчет критического усилия сдвига слоистой цилиндрической оболочки при кручении с учетом поперечных сдвигов в нулевом приближении приводит к значительному уточнению параметра критической нагрузки. Расчет по модели изотропной однослойной оболочки (τ = κ =0) с усредненными модулями упругости может приводить к значительным погрешностям.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. ***Григолюк, Э.И.*** Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
2. ***Mikhasev, G.I.*** Comparison of Analytical and Numerical Methods for the Analysis of Vibration of Composite Shell Structures / G.I. Mikhasev, F. Seeger, U. Gabbert // Entwicklungsmethoden und Entwicklunsprozesse im Maschinenbau: 5 Magdeburger Maschinenbau-Tage. – Berlin: Logos-Verl., 2001. – P. 175–183.
3. ***Korchevskaya, E.*** Buckling and vibrations of composite laminated cylindrical shells under axial load / E. Korchevskaya, G. Mikhasev, D. Marinkovich, U. Gabbert // Die 6. Magdeburger Maschinenbau–Tage: proceedings of the conference, Magdeburg, 24–26 September 2003 / Otto–von–Guericke–Universität Magdeburg; edited by: R. Kasper [et al.]. – Magdeburg, 2003. – P. 183–189.

4. ***Товстик, П.Е.*** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.
5. ***Корчевская, Е.А.*** Потеря устойчивости некруговой слоистой цилиндрической оболочки при кручении / Е.А. Корчевская // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2004. – № 4. – С. 102–106.

S U M M A R Y

The problem on torsion of thin composite laminated cylindrical shell consisting of N isotropic layers is considered. Using the complex WKB–method the two-dimensional boundary-value problem is reduced to the sequence of one-dimensional boundary-value problems. The critical torsion load is found.

Поступила в редакцию 14.04.2010