

Применение асимптотических методов для решения дифференциальных уравнений, описывающих устойчивость слоистых композитных цилиндрических оболочек при кручении

Е.А. Корчевская*, Г.И. Михасев**, А.С. Шибут*

*Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

** Белорусский государственный университет

Введение. Тонкие слоистые композитные оболочки, сочетающие в себе высокую прочность и относительно малый вес, нашли широкое применение в качестве составляющих элементов различных инженерных сооружений, в машино- и судостроении, в авиационной и ракетно-космической технике и т.п. В последнее время происходит стремительное развитие в этих отраслях. Появляются новые материалы, новые технологии и вслед за ними интенсивно разрабатываются методы их расчета. Применение многослойных конструкций при их рациональном проектировании позволяет обеспечить достижение высокой удельной жесткости и прочности, требуемых звуко- и теплоизоляционных свойств, демпфирующих и вибропоглощающих характеристик.

Наряду с этим локальная потеря устойчивости относится к наименее изученному в теории слоистых тонких оболочек. Практически отсутствуют работы, в которых рассматриваются вопросы устойчивости с учетом неоднородного в направлении круговой координаты характера нагружения. Также мало внимания уделяется слоистым оболочкам, имеющим переменные физические и геометрические характеристики материала. Это обусловлено, во-первых, тем, что такого рода задачи стали актуальными относительно недавно, и, во-вторых, их математической сложностью, связанной с громоздкостью и высоким порядком разрешающих уравнений теории многослойных оболочек. В подавляющем большинстве публикаций геометрические характеристики оболочки (длина, радиус кривизны, толщина) предполагались независимыми от криволинейных координат. Как следствие, в таких задачах потеря устойчивости сопровождается образованием волн, покрывающих всю поверхность оболочки.

Поэтому исследования, предназначенные для расширения знаний в области устойчивости тонких слоистых композитных оболочек в случае неоднородности геометрических характеристик, с учетом наличия на поверхности оболочки слабых мест, являются актуальными.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку длины L , состоящую из N изотропных слоев, характеризующихся толщиной h_k , модулем Юнга E_k , плотностью ρ_k и коэффициентом Пуассона

Адрес для корреспонденции: 210000, г. Витебск, ул. П. Бровки, д. 7, корп. 1, кв. 93, тел.: +37529 591-09-35 – Корчевская Е.А.

$\nu_k, k=1,2,\dots,N$. В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-либо k -ого слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = R s, \alpha_2 = R \varphi$. Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, φ и s – окружная и продольная координаты соответственно.

В качестве исходных используем уравнения, основанные на гипотезах, сформулированных Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [1], которые отличаются от классических уравнений полубезмоментной теории тонких оболочек наличием дополнительных слагаемых, учитывающих поперечные сдвиги слоев. Отбрасывание последних приводит к уравнениям для изотропной оболочки с физическими характеристиками, равными осредненным по толщине параметрам слоистой исходной оболочки и может давать существенные погрешности при расчетах:

$$\frac{Eh^3\eta_3}{12(1-\nu^2)}\left(1-\frac{\theta h^2}{b}\Delta\right)\Delta^2\chi^* + \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 F^*}{\partial\alpha_1^2} - 2T_{12}^0\frac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} = 0,$$

$$\Delta^2 F^* = \frac{Eh}{R_2}\frac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1^2}, \quad W^* = \left(1-\frac{h^2}{b}\Delta\right)\chi^*.$$

(1)

Здесь Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат α_1, α_2 , E, ν, ρ – осредненные модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала соответственно, h – толщина оболочки, F^*, χ^* – функции напряжений и перемещений, W^* – нормальный прогиб, T_{12}^0 – усилие сдвига, вызванное кручением оболочки, R_2 – радиус кривизны, параметры η_3, θ, b , определяются по формулам [1].

Уравнения (1) описывают состояние оболочки в окрестности безмоментного напряженно-деформированного состояния, характеризующегося усилием сдвига T_{12}^0 .

В уравнениях (1) перейдем к безразмерной системе координат s, φ :

$$\varphi = \alpha_2/R, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

$$s = \alpha_1/R, \quad 0 \leq s \leq l(\varphi) = L(\varphi)/R. \quad (2)$$

При таком выборе координат первая квадратичная форма срединной поверхности имеет вид:

$$d\sigma^2 = R^2 (ds^2 + d\varphi^2),$$

а радиус кривизны

$$R_2 = R k^{-1}(\varphi). \quad (3)$$

Переменность физических и геометрических характеристик материала, из которого изготовлена оболочка, непостоянство радиуса кривизны (3), зависимость длины оболочки от окружной координаты (2) являются причиной появления на поверхности оболочки «наиболее слабых» областей, которые приводят к сильной локализации форм потери устойчивости.

Для описания локальной бифуркации безмоментного напряженного состояния используем систему полубезмоментных уравнений слоистых оболочек, записанную в безразмерном виде [1–3]:

$$\begin{cases} \mu^4(1-\mu^3\tau\Delta)\Delta^2\chi + k(\varphi)\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \lambda 2\mu_3^0 \frac{\partial^2}{\partial s \partial \varphi}(\chi - \mu^2\kappa\Delta\chi) = 0, \\ \mu^4\Delta^2 F - k(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\chi - \mu^2\kappa\Delta\chi) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $F = F^*/EhR^2\mu^4$, $\chi = \chi^*/R$ – безразмерные функции напряжений и перемещений, Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат φ, s , $\lambda > 0$ – параметр нагружения, который связан с усилием сдвига $T_{12}^0 = \lambda Eh\mu^5 t_3^0$, μ – малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки, и имеет вид [2]:

$$\mu^8 = h^2\eta_3 / \left[12R^2(1-\nu^2) \right]. \quad (5)$$

Здесь τ, κ – параметры, учитывающие осредненные эффекты поперечных сдвигов и вводятся по формулам [2]:

$$K/\pi^2 = \mu^2\kappa, \quad K\theta/\pi^2 = \mu^3\tau, \quad \kappa, \tau \sim 1 \text{ при } \mu \rightarrow 0, \quad (6)$$

где $K = \pi^2 h^2 / (bR^2)$.

Предположим, что функция $k(\varphi)$ достаточное число раз дифференцируема по переменной φ и вместе со своими производными по φ имеют порядок $O(1)$ при $\mu \rightarrow 0$.

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания.

При построении основного напряженного состояния с точностью до величины порядка μ^2 при $s=0, s=l(\varphi)$ нужно удовлетворить условиям [4]:

$$F = \chi = 0, \text{ при } s = 0, l(\varphi). \quad (7)$$

Задача состоит в определении наименьшего $\lambda > 0$, для которого краевая задача (4), (7) имеет ненулевое решение.

Задача (4)–(7) отличается от уравнений, рассмотренных в работе [5], учетом поперечных сдвигов уже в нулевом приближении, что позволяет избежать погрешности для вычисления критического усилия сдвига.

2. Асимптотическое решение. Считаем, что вследствие переменности геометрических параметров оболочка теряет устойчивость локально, в окрестности некоторой «наиболее слабой» образующей $\varphi = \varphi_0$.

Согласно методу, предложенному в [4], выполним растяжение масштаба в окрестности линии $\varphi = \varphi_0$:

$$\varphi = \varphi_0 + \mu^{1/2}\xi. \quad (8)$$

Решение задачи (7), (7) будем искать в виде [4]:

$$\chi(s, \varphi, \mu) = \chi^{**} \exp \left\{ i \left(\mu^{-1/2} q \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\},$$

$$F(s, \varphi, \mu) = F^{**} \exp \left\{ i \left(\mu^{-1/2} q \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\},$$

$$\chi^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} \chi_j(\xi, s), \quad F^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} f_j(\xi, s), \quad (9)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \dots, \quad (10)$$

где $\chi_j(\xi, s), f_j(\xi, s)$ – полиномы по ξ , имеющие достаточное число раз диф-

ференцируемые по s коэффициенты. Параметр q характеризует изменяемость решения в окружном направлении и должен быть вещественным, а мнимая часть числа a , характеризующего скорость затухания амплитуды волн при удалении от линии $\varphi = \varphi_0$, должна быть положительной: $q > 0$, $\text{Im} a > 0$.

Функция $k(\varphi)$ раскладывается в ряды по степеням $\mu^{1/2} \xi$ в окрестности образующей $\varphi = \varphi_0$.

Подставим (9) в систему уравнений (4). Для определения неизвестных функций $f_j(s, \xi)$, $\chi_j(s, \xi)$ и чисел q , a , φ_0 , λ_n приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\mu^{1/2}$. В результате получим рекуррентную последовательность дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=0}^j H_k \chi_{j-k} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

и последовательность соответствующих граничных условий:

$$\sum_{k=0}^j \Gamma_k^i \chi_{j-k} = 0, \quad i = 0, 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad \text{при } s = 0, l(\varphi). \quad (12)$$

Здесь

$$H_0 \chi_0 = q^4 \chi_0 + \frac{k^2(\varphi_0)(1 + \kappa q^2)}{q^4} \frac{\partial^4 \chi_0}{\partial s^4} - 2it_3^0 \lambda_0 q (1 + \kappa q^2) \frac{\partial \chi_0}{\partial s},$$

а операторы H_k ($k > 0$) выражаются через производные k -ого порядка от оператора H_0 по окружной и продольной координатам [4].

Нулевое приближение. Рассмотрим краевую задачу, возникающую в нулевом приближении:

$$q^4 \chi_0 + \frac{k^2(\varphi_0)(1 + \kappa q^2)}{q^4} \frac{\partial^4 \chi_0}{\partial s^4} - 2it_3^0 \lambda_0 q (1 + \kappa q^2) \frac{\partial \chi_0}{\partial s} = 0, \quad (13)$$

$$\chi_0 = \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при } s = 0, \quad s = l(\varphi). \quad (14)$$

Очевидно, что наименьшему значению критической нагрузки оболочки соответствует наименьшее положительное собственное значение λ_0 краевой задачи (13)–(14).

Положим

$$\lambda_0^0 = \min_{q, \varphi_0} \lambda_0(q, \varphi_0) = \lambda_0(q^0, \varphi_0^0), \quad (15)$$

где параметры q^0 , φ_0^0 будут определяться из соотношений:

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} = 0 \quad \text{при } q = q^0, \quad \varphi = \varphi_0^0. \quad (16)$$

Решение краевой задачи нулевого приближения осуществляется согласно методу, описанному в [4], и сводится к решению системы четырех уравнений, решение которой производится методом простых итераций.

Первое и второе приближения. Решением краевой задачи (13)–(14) будет функция:

$$\chi_0(\xi, s) = P_0(\xi) \chi_0^0(s), \quad (17)$$

где $\chi_0^0(s)$ – собственная функция задачи (13)–(14) при условиях (16), $P_0(\xi)$ – пока неопределенная функция.

При $j=1$ имеем неоднородную краевую задачу. Условие существования решения задачи эквивалентно равенствам (16).

Во втором приближении получаем уравнение, из которого с учетом граничных условий получаем условие существования решения χ_2 :

$$-\frac{1}{2}\lambda_{qq}\frac{d^2P_0}{d\xi^2} + b\xi\frac{dP_0}{d\xi} + \left(\eta - \lambda_1 + \frac{1}{2}\sigma + c\xi^2\right)P_0 = 0, \quad (18)$$

где

$$\eta = \frac{\tau q^6}{(1 + \kappa q^2)}, \quad \sigma = -i(a\lambda_{qq} + \lambda_{q\varphi}), \quad 2c = a^2\lambda_{qq} + 2a\lambda_{q\varphi} + \lambda_{\varphi\varphi}. \quad (19)$$

Условие $c=0$ необходимо для существования решения уравнения (19) в виде полинома по ξ . Из этого условия находим единственную величину a такую, что $\text{Im} a > 0$:

$$a = i(\lambda_{\varphi\varphi}^0 / \lambda_{qq}^0)^{1/2}. \quad (20)$$

При $c=0$

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(n)} = \sigma\left(\frac{1}{2} + n\right) + \eta, \quad n = 0, 1, \dots \quad (21)$$

уравнение имеет решение $P_0(\xi) = H_n(\xi)$, где $H_n(\xi)$ – полином Эрмита n -ой степени. Величина λ_1 минимальна при $n=0$. В этом случае $H_n(\xi) \equiv 1$. Тогда $\lambda_1^{(0)} = \frac{1}{2}\sigma + \eta$ является наименьшим. Поправка λ_1 учитывает как эксцентриситет поперечного сечения, так и наличие поперечных сдвигов (так как зависит от параметров τ и κ).

3. Анализ результатов. Для примера рассмотрим тонкую трехслойную круговую цилиндрическую оболочку радиуса $R = 150 \text{ мм}$ и длиной $L = 450 \text{ мм}$. Первый и третий слои имеют одинаковую толщину $h_1 = h_3 = 0,3 \text{ мм}$ и изготовлены из алюминия, который характеризуется модулем Юнга 70300 Н/мм^2 , плотностью $2,7 \cdot 10^{-6} \text{ кг/мм}^3$ и коэффициентом Пуассона равным $0,345$. Второй слой толщиной $h_2 = 0,8 \text{ мм}$ изготовлен из эпоксидной смолы с модулем Юнга равным 3450 Н/мм^2 , плотностью $1,2 \cdot 10^{-6} \text{ кг/мм}^3$ и коэффициентом Пуассона равным $0,300$.

На рис. 1 приведен график зависимости собственного значения λ_0 от параметра q .

Функция λ_0 принимает наименьшее значение $\lambda_0 = 1,01012$ при $q = 1,1249$.

Отсюда параметр критической нагрузки λ равен

$$\lambda_{\min} = 1,07712. \quad (22)$$

В табл. 1 приведен характер зависимости наименьшего собственного значения λ_0 от параметра κ , учитывающего осредненные эффекты поперечных сдвигов.

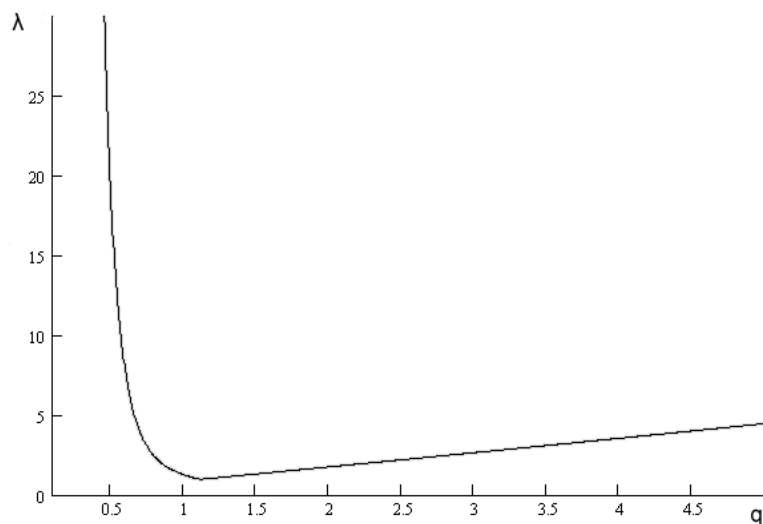


Рис. 1. Зависимость собственного значения λ_0 от параметра q .

Таблица 1

Зависимость наименьшего собственного значения λ_0 от параметра κ

| κ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\lambda_{0\min}$ | 1,00765 | 1,08837 | 1,12163 | 1,17973 | 1,24940 | 1,37162 | 1,46073 |

Заметим, что при увеличении параметра поперечного сдвига наименьшее собственное значение λ_0 увеличивается. При $\kappa = 0$ получаем наименьшее собственное значение λ_0 для изотропной оболочки с физическими характеристиками, равными осредненным по толщине параметрам слоистой исходной оболочки.

4. Заключение. Установлено, что расчет критического усилия сдвига слоистой цилиндрической оболочки при кручении с учетом поперечных сдвигов в нулевом приближении приводит к значительному уточнению параметра критической нагрузки. Расчет по модели изотропной однослойной оболочки ($\tau = \kappa = 0$) с усредненными модулями упругости может приводить к значительным погрешностям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
2. Mikhasev, G.I. Comparison of Analytical and Numerical Methods for the Analysis of Vibration of Composite Shell Structures / G.I. Mikhasev, F. Seeger, U. Gabbert // Entwicklungsmethoden und Entwicklungsprozesse im Maschinenbau: 5 Magdeburger Maschinenbau-Tage. – Berlin: Logos-Verl., 2001. – P. 175–183.
3. Korchevskaya, E. Buckling and vibrations of composite laminated cylindrical shells under axial load / E. Korchevskaya, G. Mikhasev, D. Marinkovich, U. Gabbert // Die 6. Magdeburger Maschinenbau-Tage: proceedings of the conference, Magdeburg, 24–26 September 2003 / Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg; edited by: R. Kasper [et al.]. – Magdeburg, 2003. – P. 183–189.
4. Товстик, П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.

5. **Корчевская, Е.А.** Потеря устойчивости некруговой слоистой цилиндрической оболочки при кручении / Е.А. Корчевская // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2004. – № 4. – С. 102–106.

S U M M A R Y

The problem on torsion of thin composite laminated cylindrical shell consisting of N isotropic layers is considered. Using the complex WKB-method the two-dimensional boundary-value problem is reduced to the sequence of one-dimensional boundary-value problems. The critical torsion load is found.

Поступила в редакцию 14.04.2010

Репозиторий ВГУ