

УДК 512.542

О свойствах \mathfrak{S} -абнормальных максимальных подгрупп с ограничениями на индексы

Р.В. Бородич, М.В. Селькин

*Учреждение образования «Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины»*

В данной работе изучаются свойства пересечений \mathfrak{S} -абнормальных максимальных подгрупп заданного индекса, выделяемых подгрупповым m -функтором. Необходимые определения и обозначения можно найти в работах [1–3]. В дальнейшем π – некоторое множество простых чисел, все рассматриваемые классы групп содержат единичные группы.

В настоящее время развитие теории пересечений максимальных подгрупп связано с введением функторного метода [3], позволяющего строить новые обобщения подгруппы Фраттини и исследовать влияние свойств этих подгрупп на строение группы.

Согласно [3] m -функтором называется функция Θ , которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G ; при этом предполагается, что если $M \in \Theta(G)$, то $M^x \in \Theta(G)$ для всех $x \in G$.

Пусть P – множество всех простых чисел. Если $p \in P$ и $\pi \subseteq P$, то $\pi' = P \setminus \pi$; $p' = P \setminus \{p\}$. Подгруппа H группы G называется S_π -подгруппой, если $|G:H|$ не делится на числа из π .

Через $O_\pi(G)$ обозначают наибольшую нормальную π -подгруппу группы G .

Максимальная подгруппа, не являющаяся нормальной, называется абнормальной.

Напомним, что если \mathfrak{S} – непустая формация, то максимальная подгруппа M группы G называется \mathfrak{S} -нормальной (\mathfrak{S} -абнормальной), если $G^{\mathfrak{S}}$ содержится (соответственно не содержится) в M , где $G^{\mathfrak{S}}$ – \mathfrak{S} -кордикал груп-

Адрес для корреспонденции: 246019, г. Гомель, ул. Советская, д. 104, e-mail: Borodich@gsu.by – Бородич Р.В.

пы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Согласно [3] на множестве m -функторов можно определить операции пересечения следующим образом: $(\Theta_1 \cap \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cap \Theta_2(G)$.

Согласно работе [4] m -функтор Θ будем называть

1) тривиальным, если $\Theta(G) \setminus \{G\}$ – множество всех максимальных подгрупп группы G для любой группы G ;

2) абнормально полным, если для любой группы G , множество $\Theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы группы G , вместе с самой группой G ;

3) \mathfrak{F} -абнормальным, если в каждой группе G m -функтор $\Theta(G)$ выделяет все \mathfrak{F} -абнормальные максимальные подгруппы вместе с самой группой G , где \mathfrak{F} – непустая формация.

Подгрупповой m -функтор Θ называется регулярным [3], если выполняются следующие условия:

1) из $N \triangleleft G$ и $M \in \Theta(G)$ следует $MN/N \in \Theta(G/N)$;

2) из $M/N \in \Theta(G/N)$ следует $M \in \Theta(G)$.

Если Θ – m -функтор и $M \in \Theta(G)$, то M будем называть Θ -подгруппой группы G . Для пересечения всех Θ -подгрупп группы G будем использовать обозначение $\Phi_{\Theta}(G)$.

Определение. Пусть \mathfrak{F} – формация. Обозначим через $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех \mathfrak{F} -абнормальных максимальных Θ -подгрупп группы G ;

$\Phi_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)$ ($\Phi_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)$) – пересечение всех тех \mathfrak{F} -абнормальных максимальных Θ -подгрупп группы G , индекс каждой из которых не является (является) π -числом;

$\overline{\Phi}_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех \mathfrak{F} -абнормальных максимальных Θ -подгрупп группы G , не принадлежащих \mathfrak{F} , индекс каждой из которых не является π -числом. В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны G .

Если m -функтор Θ является тривиальным, то будем использовать ставшими традиционными обозначения $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$, $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$, $\overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Теорема 1. Пусть \mathfrak{F} – формация, Θ – абнормально полный регулярный m -функтор и $\overline{\Phi}_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Если в группе G подгруппа $\Phi_{\Theta_{\pi}}(G)$ обладает свойством C_{π} , то

$$\overline{\Phi}_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)/O_{\pi}(G) = \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G/O_{\pi}(G)).$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$K = \overline{\Phi}_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\Theta_{\pi}}(G).$$

Пусть $K \not\subseteq \Phi_{\Theta_\pi}(G)$. Тогда в G найдется такая максимальная Θ -подгруппа M , индекс которой не делится на простое число из π , что $G = KM$. Понятно, что M не содержит $G^\mathfrak{S}$. Если $M \notin \mathfrak{S}$, то $K \subseteq \overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G) \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $M \in \mathfrak{S}$. Отсюда

$$G/K = MK/KM/M \cap K \in \mathfrak{S},$$

а это значит, что $G^\mathfrak{S} \subseteq K \subseteq \overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)$. Это противоречит существованию в группе G \mathfrak{S} -абнормальной максимальной Θ -подгруппы, индекс которой не делится на простые числа из π . Итак, $K \subseteq \Phi_{\Theta_\pi}(G)$.

Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. Тогда ввиду того, что

$$\Phi_{\Theta_\pi}(G)/O_\pi = \Phi(G/O_\pi(G)),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G/O_\pi(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G/O_\pi(G))/O_\pi(G/O_\pi(G)) = \Phi_\Theta^\mathfrak{S}(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G))).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$ и

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G/O_\pi(G)) = \overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)/O_\pi(G),$$

то

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)/O_\pi(G) = \Phi_\Theta^\mathfrak{S}(G/O_\pi(G)).$$

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. Тогда

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G) \cap G^\mathfrak{S} \subseteq \Phi_{\Theta_\pi}(G) = \Phi_\Theta(G).$$

Пусть K/N – главный фактор группы G , причем

$$\Phi_\Theta(G) \subseteq N \subseteq K \subseteq \overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G).$$

Так как

$$K \cap G^\mathfrak{S} \subseteq \overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G) \cap G^\mathfrak{S} \subseteq \Phi_\Theta(G),$$

то

$$N = N(K \cap G^\mathfrak{S}) = K \cap NG^\mathfrak{S}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^\mathfrak{S}/NG^\mathfrak{S}K/K \cap NG^\mathfrak{S} = K/N(K \cap G^\mathfrak{S}) = K/N.$$

Так как $G/NG^\mathfrak{S} \in \mathfrak{S}$, то главный фактор $KG^\mathfrak{S}/NG^\mathfrak{S}$ является \mathfrak{S} -центральным в G . Следовательно, главный фактор K/N также является \mathfrak{S} -центральным в G . Таким образом, $\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)/\Phi_\Theta(G)$ – \mathfrak{S} -гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_\Theta(G)$. Поэтому

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)/\Phi_\Theta(G) \subseteq Z_\infty^\mathfrak{S}(G/\Phi_\Theta(G)).$$

С другой стороны, на основании леммы 4 из [4]

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)/\Phi_\Theta(G) \supseteq \Phi_\Theta^\mathfrak{S}(G)/\Phi_\Theta(G) = Z_\infty^\mathfrak{S}(G/\Phi_\Theta(G)).$$

Значит,

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/\Phi_\Theta(G) = Z_\infty^{\mathfrak{S}}(G/\Phi_\Theta(G)).$$

Следовательно,

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/\Phi_\Theta(G) = \Phi_\Theta^{\mathfrak{S}}(G)/\Phi_\Theta(G),$$

то есть $\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G) = \Phi_\Theta^{\mathfrak{S}}(G)$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. Пусть \mathfrak{S} – нормально наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, Θ – абнормально полный регулярный t -функтор и $\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$. Если подгруппа $\Phi_{\Theta_\pi}(G)$ обладает свойством C_π , то

$$\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/O_\pi(G) \in \mathfrak{S}.$$

Так как в любой группе G подгруппа $\Phi_{\Theta_p}(G)$ обладает свойством C_p , то при $\pi = \{p\}$ получаем следующий результат.

Следствие 1.2. Пусть \mathfrak{S} – формация, Θ – абнормально полный регулярный t -функтор, $\overline{\Phi}_{\Theta_p}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$. Тогда

$$\overline{\Phi}_{\Theta_p}^{\mathfrak{S}}(G)/O_p(G) = \Phi_\Theta^{\mathfrak{S}}(G/O_p(G)).$$

Следствие 1.3. Пусть Θ – абнормально полный регулярный t -функтор, $\overline{\Phi}_{\Theta_p}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$. Если \mathfrak{S} – нормально наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\overline{\Phi}_{\Theta_p}^{\mathfrak{S}}(G)/O_p(G) \in \mathfrak{S}$.

В случае, когда t -функтор Θ тривиальный, то из теоремы 1 получаем соответствующий результат из [3].

В теореме 1 одно из условий, что подгруппа $\Phi_{\Theta_\pi}(G)$ обладает свойством C_π . Данное обстоятельство можно обойти, введя следующее определение.

Определение. Обозначим через $\delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)$ – пересечение всех \mathfrak{S} -абнормальных максимальных Θ -подгрупп группы G , содержащих $O_\pi(G)$;

$\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)$ – пересечение всех \mathfrak{S} -абнормальных максимальных Θ -подгрупп группы G , содержащих $O_\pi(G)$ и не принадлежащих \mathfrak{S} ;

$\varphi_{\Theta_\pi}(G)$ – пересечение всех максимальных Θ -подгрупп группы G , содержащих $O_\pi(G)$. В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны G .

Лемма 1. Пусть \mathfrak{S} – формация, Θ – абнормально полный регулярный t -функтор, N – нормальная подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

если $N \subseteq \varphi_{\Theta_\pi}(G)$, то $\varphi_{\Theta_\pi}(G/N) = \varphi_{\Theta_\pi}(G)/N$;

если $N \subseteq \varphi_{\Theta_{\pi}}(G)$, то $\delta_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{S}}(G/N) = \delta_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{S}}(G)/N$;

если $N \subseteq \varphi_{\Theta_{\pi}}(G)$ и $\overline{\delta_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{S}}}(G)/N \neq G/N$, то $\overline{\delta_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{S}}}(G/N) = \overline{\delta_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{S}}}(G)/N$.

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 2. Пусть Θ – абнормально полный регулярный m -функтор. Тогда

- 1) $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G) \supseteq \Phi_{\Theta_{\pi}}(G)$;
- 2) $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G)$ – π -замкнутая подгруппа;
- 3) $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G) = \Phi_{\Theta}(G/O_{\pi}(G))$;
- 4) если $\Phi_{\Theta_{\pi}}(G)$ обладает свойством C_{π} , то $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G) = \Phi_{\Theta_{\pi}}(G)$.

Доказательство. Очевидно, что $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G) \supseteq \Phi_{\Theta_{\pi}}(G)$.

Покажем, что подгруппа $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G)$ π -замкнута. Пусть $O_{\pi}(G)$ – неединичная подгруппа, N – минимальная нормальная подгруппа группы G , $N \subseteq O_{\pi}(G)$. По лемме 1 имеем

$$\varphi_{\Theta_{\pi}}(G/N) = \varphi_{\Theta_{\pi}}(G)/N.$$

Для G/N утверждение теоремы верно по индукции.

Следовательно, группа $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G/N)$ π -замкнута. Так как N – π -группа, то из π -замкнутости $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G)/N$ следует, что $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G)$ – π -замкнутая подгруппа.

Пусть теперь $O_{\pi}(G) = 1$. По определению подгруппы $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G)$ имеем в этом случае, что $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G) = \Phi_{\Theta}(G)$, причем $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G)$ обладает единичной π -холловской подгруппой. Очевидно, $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G)$ – π -замкнутая подгруппа, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что

$$\varphi_{\Theta_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G) = \Phi_{\Theta}(G/O_{\pi}(G)).$$

Пусть M – максимальная Θ -подгруппа группы G и $O_{\pi}(G) \subseteq M$. Так как $O_{\pi}(G)$ – характеристическая подгруппа, то очевидно, что $M/O_{\pi}(G)$ – максимальная Θ -подгруппа группы $G/O_{\pi}(G)$. Следовательно,

$$\Phi_{\Theta_{\pi}}(G/O_{\pi}(G)) \subseteq \varphi_{\Theta_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G) = \varphi_{\Theta_{\pi}}(G/O_{\pi}(G)).$$

С другой стороны, так как $O_{\pi}(G/O_{\pi}(G)) = 1$, то по определению подгруппы $\varphi_{\Theta_{\pi}}(G)$ получаем, что

$$\varphi_{\Theta_{\pi}}(G/O_{\pi}(G)) = \Phi_{\Theta_{\pi}}(G/O_{\pi}(G)).$$

Предположим теперь, что $\Phi_{\Theta_{\pi}}(G)$ обладает свойством C_{π} . По ранее доказанному имеем, что

$$\Phi_{\Theta_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G) = \Phi_{\Theta_{\pi}}(G/O_{\pi}(G)) = \varphi_{\Theta_{\pi}}(G)/O_{\pi}(G).$$

Следовательно, $\Phi_{\Theta_{\pi}}(G) = \varphi_{\Theta_{\pi}}(G)$. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть \mathfrak{S} – локальная формация, Θ – абнормально полный регулярный t -функтор. Тогда

$$\delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/O_\pi(G) = \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G)).$$

Доказательство. Пусть M – \mathfrak{S} -абнормальная максимальная Θ -подгруппа группы G и $O_\pi(G) \subseteq M$. Так как

$$(G/O_\pi(G))^{\mathfrak{S}} = G^{\mathfrak{S}}O_\pi(G)/O_\pi(G),$$

то $M/O_\pi(G)$ – \mathfrak{S} -абнормальная максимальная Θ -подгруппа в $G/O_\pi(G)$. Таким образом,

$$\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G)) \subseteq \delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G)) = \delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/O_\pi(G).$$

Обратно, если подгруппа $M/O_\pi(G)$ – максимальная \mathfrak{S} -абнормальная Θ -подгруппа в $G/O_\pi(G)$, то подгруппа M – \mathfrak{S} -абнормальная максимальная Θ -подгруппа в G , содержащая $O_\pi(G)$. Следовательно,

$$\delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G)) = \delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/O_\pi(G) \subseteq \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G)).$$

Отсюда имеем

$$\delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/O_\pi(G) = \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G)),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2.1. Пусть \mathfrak{S} – локальная формация, Θ – абнормально полный регулярный t -функтор, $\Phi_{\Theta_\pi}(G)$ обладает свойством C_π . Тогда

$$\delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G) = \Phi_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G).$$

Доказательство. По теоремам 1 и 2 имеем

$$\delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/O_\pi(G) = \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G)) = \Phi_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/O_\pi(G).$$

Следовательно, $\delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G) = \Phi_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)$.

Следствие 2.2. Пусть \mathfrak{S} – локальная формация, Θ – абнормально полный регулярный t -функтор. Тогда

$$\delta_{\Theta_p}^{\mathfrak{S}}(G) \cap \delta_{\Theta_q}^{\mathfrak{S}}(G) = \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{S}}(G)$$

для любых $p \neq q$.

Справедливость утверждения следует из справедливости теоремы Силова для $\Phi_{\Theta_p}(G)$ и $\Phi_{\Theta_q}(G)$ и следствия 2.1.

В частном случае, когда t -функтор Θ тривиальный, то из теоремы 2 получаем результат М.В. Селькина из [5].

Теорема 3. Пусть \mathfrak{S} – локальная формация, Θ – абнормально полный регулярный t -функтор, $\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$. Тогда

$$\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/O_\pi(G) = \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G)).$$

Доказательство. Покажем, что

$$K = \overline{\delta}_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \cap G^{\mathfrak{S}} \subseteq \varphi_{\Theta_\pi}(G).$$

Пусть $K \not\subseteq \varphi_{\Theta_\pi}(G)$. Тогда в G найдется максимальная Θ -подгруппа M , не содержащая $G^\mathfrak{S}$. Если $M \notin \mathfrak{S}$, то

$$K \subseteq \overline{\delta}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G) \subseteq M,$$

что невозможно. Следовательно, $M \in \mathfrak{S}$. Отсюда

$$G/K = MK/KM/M \cap K \in \mathfrak{S}.$$

А это значит, что $G^\mathfrak{S} \subseteq K \subseteq \overline{\delta}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)$. Это противоречит существованию в группе G \mathfrak{S} -абнормальной максимальной Θ -подгруппы и определению подгруппы $\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)$. Следовательно, $K \subseteq \varphi_{\Theta_\pi}(G)$.

Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. Тогда ввиду того, что

$$\varphi_{\Theta_\pi}(G)/O_\pi(G) = \Phi_\Theta(G/O_\pi(G)),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G/O_\pi(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G/O_\pi(G))/O_\pi(G/O_\pi(G)) = \Phi_\Theta^\mathfrak{S}(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G))).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$, то

$$\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G/O_\pi(G)) = \Phi_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G/O_\pi(G)).$$

Из леммы 1 получаем, что

$$\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)/O_\pi(G) = \Phi_\Theta^\mathfrak{S}(G/O_\pi(G)).$$

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. По определению подгруппы $\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)$ имеем, что $\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G) = \overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)$, а определению подгруппы $\varphi_{\Theta_\pi}(G)$ –

$$\varphi_{\Theta_\pi}(G) = \Phi_{\Theta_\pi}(G) = \Phi_\Theta(G).$$

Тогда из теоремы 1 получаем, что $\overline{\Phi}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G) = \Phi_\Theta^\mathfrak{S}(G)$. Следовательно, $\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G) = \Phi_\Theta^\mathfrak{S}(G)$, что и требовалось доказать.

Следствие 3.1. Пусть \mathfrak{S} – нормально наследственная локальная формация, Θ – абнормально полный регулярный m -функтор, $\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G) \neq G$. Тогда

$$\overline{\delta}_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G)/O_\pi(G) \in \mathfrak{S}.$$

Если Θ – тривиальный m -функтор, то из теоремы 3 следует результат из [5].

Теорема 4. Пусть \mathfrak{S} – нормально наследственная локальная формация, Θ – абнормально полный регулярный m -функтор, π – некоторое множество простых чисел. Тогда $\delta_{\Theta_\pi}^\mathfrak{S}(G) = AB$, где

- 1) $A/O_\pi(G) \in \mathfrak{S}$;

- 2) $B \subseteq \varphi_{\Theta_\pi}(G)$;
- 3) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{S}) \subseteq \pi$.

Доказательство. Рассмотрим фактор-группу $G/O_\pi(G)$. Из теоремы 2 имеем, что

$$\delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/O_\pi(G) = \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G)),$$

а по лемме 2 – $\varphi_{\Theta_\pi}(G)/O_\pi(G) = \Phi_{\Theta}(G/O_\pi(G))$. Применяя к группе $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G))$ теорему 1 из [4], получаем

$$\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G/O_\pi(G))) = (A/O_\pi(G))(B/O_\pi(G)),$$

где

$$A/O_\pi(G) \in \mathfrak{S}, B/O_\pi(G) \subseteq \Phi_{\Theta}(G/O_\pi(G)), \pi(B/O_\pi(G)) \cap \pi(\mathfrak{S}) = \emptyset.$$

Следовательно, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{S}) \subseteq \pi$. Так как

$$\Phi_{\Theta}(G/O_\pi(G)) = \varphi_{\Theta_\pi}(G)/O_\pi(G), \text{ то } B \subseteq \varphi_{\Theta_\pi}(G).$$

Отсюда получаем, что

$$A \cap B = O_\pi(G), A/O_\pi(G) \in \mathfrak{S}.$$

Так как

$$\delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G)/O_\pi(G) = \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{S}}(G/O_\pi(G)),$$

то $\delta_{\Theta_\pi}^{\mathfrak{S}}(G) = AB$, что и требовалось доказать.

Если m -функтор Θ тривиальный, то из теоремы 4 вытекает результат из [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шеметков, Л.А.** Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
2. **Шеметков, Л.А.** Конечные разрешимые группы / Л.А. Шеметков // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – Т. 32, № 3. – С. 577–589.
3. **Селькин, М.В.** Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
4. **Бородич, Е.Н.** О пересечении \mathfrak{S} -абнормальных максимальных Θ -подгрупп / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2007. – № 3. – С. 47–52.
5. **Селькин, М.В.** Некоторые обобщения подгруппы Фраттини / М.В. Селькин, А.В. Сидоров // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 138–143.

S U M M A R Y

There are investigated properties of \mathfrak{S} -abnormal maximal subgroups of finite groups in the given work.

Поступила в редакцию 19.03.2010