

О пересечении локально-нормальных классов Фиттинга

Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залеская, А.В. Турковская

*Учреждение образования «Витебский государственный
университет им. П.М. Машерова»*

В теории конечных разрешимых групп хорошо известна своими приложениями для изучения структуры классов групп теорема Блессеноля–Гашюца [1] о существовании наименьшего нетривиального разрешимого нормального класса Фиттинга. Напомним, что класс Фиттинга F называется нормальным [1] в классе S всех конечных разрешимых групп, если $F \subseteq S$ и для любой группы $G \in S$ ее F -инъекторы являются нормальными подгруппами G . При этом F -инъектором группы G называют такую подгруппу V , что для любой субнормальной подгруппы N группы G пересечение $V \cap N$ является F -максимальной подгруппой группы N . Долгое время теорему Блессеноля–Гашюца нельзя было распространить на более широкие классы групп, в общем случае не обязательно разрешимых. Вместе с тем в теории конечных групп были известны результаты Л.А. Шеметкова [2], В.Г. Сементовского [3] и Го Вэнь Биня [4], о том что F -инъекторы групп существуют и сопряжены в некоторых классах частично разрешимых групп. Все это позволило определить свойство нормальности классов Фиттинга в общем случае следующим образом. Класс Фиттинга F является X -нормальным или нормальным в классе Фиттинга X , если $F \subseteq X$ и для любой группы $G \in X$ ее F -инъектор – нормальная подгруппа группы G .

Напомним, что согласно теореме Блессеноля–Гашюца [1] пересечение всех неединичных S -нормальных классов Фиттинга является также неединичным S -нормальным классом Фиттинга. Расширение теоремы Блессеноля–Гашюца [1] на случай X -нормальных классов Фиттинга, состоящих из частично разрешимых групп, – основной результат данной работы.

В работе рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем монографии [5].

Необходимые сведения. Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп F [5], удовлетворяющий следующим требованиям:

- 1) каждая нормальная подгруппа группы из F также принадлежит F ;
- 2) из $N_1 \triangleleft G$ и $N_1 \in F$; $N_2 \triangleleft G$ и $N_2 \in F$ всегда следует $N_1 N_2 \in F$.

Если F непустой класс Фиттинга, то F -радикалом группы G называется такая подгруппа G_F группы G , которая является наибольшей из нормальных F -подгрупп группы G .

Произведением классов Фиттинга F и H называют класс групп $FH = \{G : G/G_F \in H\}$.

Через $S^{\pi(F)}$ мы будем обозначать класс всех $\pi(F)$ -разрешимых групп. При этом $\pi(F)$ – множество всех простых делителей всех групп из F . Тогда произведение $FS^{\pi(F)}$ состоит из всех тех групп G , для которых факторгруппы G/G_F являются $\pi(F)$ -разрешимыми группами.

Классом Фишера называют такой класс Фиттинга F , что из $K \subseteq H \subseteq G \in F$, $K \triangleleft G$ и $H/K \in N_p$ всегда следует $H \in F$ (p – простое число). Класс Фиттинга F называют Q -замкнутым, если из того что $G \in F$, $K \triangleleft G$ следует, что $G/K \in F$.

Приведем также в качестве лемм те известные результаты, которые мы будем использовать для доказательства теоремы.

Лемма 1 [5]. Пусть A, B, C – подгруппы группы G . Тогда равносильны следующие утверждения:

- 1) $A \cap BC = (A \cap B)(A \cap C)$;
- 2) $AB \cap AC = A(B \cap C)$.

Лемма 2 [4]. Пусть F класс Фиттинга, $\pi = \pi(F)$, $G \in FS^{\pi(F)}$. Тогда в группе G существуют F -инъекторы и любые два из них сопряжены G .

Лемма 3 [5]. Каждая p -группа является нильпотентной группой.

Лемма 4 [4]. Пусть F класс Фиттинга, тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если V F -инъектор группы G и $N \triangleleft G$, то $V \cap N$ F -инъектор группы N ;
- 2) если $G \in FS^{\pi(F)}$ и V – F -инъектор группы G , причем U подгруппа G , содержащая V , то V F -инъектор U .

X -нормальные классы и их пересечение. В настоящем разделе расширяется теорема Блессеноля–Гашуца [1] в двух направлениях. Во-первых, мы устанавливаем ее справедливость для достаточно широкого семейства локально-нормальных классов Фиттинга, во-вторых, при доказательстве теоремы не требуем свойства разрешимости всех рассматриваемых групп.

Определение. Класс Фиттинга F является X -нормальным или нормальным в классе Фиттинга X , если $F \in X$ и для любой группы $G \in X$ ее F -инъектор – нормальная подгруппа группы G .

В случае, когда $X = S$, мы получаем определение нормального класса Фиттинга, которое было определено [1].

Основной результат работы представляет

Теорема. Пусть X – класс Фишера, $\{F_i \mid i \in I\}$ – множество X -нормальных Q -замкнутых классов Фиттинга и $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Если $F \subseteq X \subseteq FS^{\pi(F)}$, то F является X -нормальным классом Фиттинга.

Доказательство. Пусть I – некоторое множество индексов и для любого $i \in I$, F_i – такой класс Фиттинга, что $F_i \triangleleft X$.

Докажем, что $\bigcap_{i \in I} F_i = F \triangleleft X$.

Проведем индукцию по порядку групп из X . Пусть G -группа минимального порядка из X такая, для которой теорема неверна. Так как $F \subseteq X \subseteq FS^{\pi(F)}$, то факторгруппа G/G_F $\pi(F)$ -

разрешима и по лемме 2 в G существует F -инъекторы и любые два из них сопряжены в G . Пусть V такой F -инъектор группы G , который не нормален в G . Так как $F \subseteq F_i$ для всех $i \in I$, то $G_F \subseteq G_{F_i}$. Ввиду изоморфизма, $G/G_F / G_{F_i}/G_F \cong G/G_{F_i}$ факторгруппа G/G_{F_i} $\pi(F_i)$ -разрешима. Следовательно, из леммы 2 в группе G существует F_i -инъектор V_i для любого $i \in I$. По условию $V_i \triangleleft G$ для всех $i \in I$ и поэтому $\bigcap_{i \in I} V_i \triangleleft G$. Кроме того, $\bigcap_{i \in I} V_i \triangleleft V_i \in F_i$ для каждого $i \in I$. Следовательно, $\bigcap_{i \in I} V_i \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$. Но тогда по определению F -радикала справедливо включение $\bigcap_{i \in I} V_i \subseteq G_F$. С другой стороны, $G_F \subseteq G_{F_i} = V_i$ для всех $i \in I$. Следовательно, $G_F = \bigcap_{i \in I} V_i$. Так как V – F -инъектор группы G , то $V \supseteq G_F$. Значит, $\bigcap_{i \in I} V_i \subset V$, ввиду предположения о том, что подгруппа V ненормальна в G . Пусть M – любая максимальная нормальная подгруппа группы G . Доказательство теоремы в дальнейшем разобьем на несколько этапов.

Докажем, что $V \cap M = (\bigcap_{i \in I} V_i) \cap_{i \in I} M$. (1)

Так как $M \in X$ и $X \subseteq FS^{\pi(F)}$, то $M/M_F - \pi(F)$ -разрешимая группа. Значит, в группе M по лемме 2 существуют F -инъекторы и любые два из них сопряжены в M . Так как V – F -инъектор группы G , по лемме 4 группа $V \cap M$ является F -инъектором группы M . Тогда из того, что $|M| < |G|$ по индукции следует, что $V \cap M \triangleleft M$. Учитывая свойства F -радикала, получаем $V \cap M = M_F = G_F \cap M = (\bigcap_{i \in I} V_i) \cap_{i \in I} M$ и равенство (1) доказано.

Покажем, что V не содержится ни в одной субнормальной подгруппе N из G , т.е. $V \not\triangleleft \triangleleft G$. (2)

Для доказательства (2), предположим от противного, что $V \subseteq N \triangleleft \triangleleft G$. Так как $G \in X$ и $N \triangleleft \triangleleft G$, то по определению класса Фиттинга $N \in X \subseteq FS^{\pi(F)}$ и по лемме 4 заключаем, что подгруппа V – F -инъектор N . Так как $|N| < |G|$, по индукции для группы N теорема верна. Следовательно, $V \triangleleft N$ и поэтому V субнормальна в G . По определению радикала $V = G_F$ и $V \triangleleft G$. Получили противоречие с тем, что V не является нормальной подгруппой в G . Это доказывает справедливость утверждения (2).

Докажем, что $G = RV$, где R – любая из нормальных подгрупп G , такая, что факторгруппа G/R является либо разрешимой группой, порядок которой есть степень простого числа $p \in \pi(F)$, либо простой $\pi'(F)$ -группой.

Вначале заметим, что для первого случая R является любой из нормальных подгрупп группы G , такой, для которой $G/R \in N_p$, где $p \in \pi(F)$. Вначале докажем существование такой подгруппы R . Если $G_F = G$, то $G \in F$ и утверждение верно, так как $G = RV = V$. Пусть $G_F \neq G$. Тогда существует $\pi(F)$ -разрешимая факторгруппа группа G/G_F . Но если существует факторгруппа, то найдется максимальная нормальная подгруппа R , которая содержит G_F . Следовательно, ввиду изоморфизма $G/G_F / R/G_F \cong G/R$. Так как факторгруппа по максимальной нормальной подгруппе является главным фактором группы G , то этот фактор, по определению $\pi(F)$ -разрешимой группы, является либо абелевой примарной p -группой ($p \in \pi(F)$), либо $\pi'(F)$ -группой. Этим существование подгруппы R с указанными выше свойствами доказано.

Пусть $G \neq RV$, то есть $RV \subset G$. Если G/R элементарная абелева p -группа ($p \in \pi(F)$), то по лемме 3 G/R нильпотентная группа. Следовательно, RV/R субнормальна в G/R и поэтому RV субнормальна в G . Отсюда V содержится в подгруппе $H = RV$ и $H \triangleleft \triangleleft G$. Это противоречит (2).

Предположим теперь, что $G/R - \pi'(F)$ -группа, т.е. $G/R \in E_{\pi'(F)}$, где $E_{\pi'(F)}$ класс всех $\pi'(F)$ -групп. Применим изоморфизм $V/V \cap R \cong RV/R \subset G/R$. Так как $G/R \in E_{\pi'(F)}$, то $V/V \cap R \in E_{\pi'(F)}$. С другой

стороны, ввиду Q -замкнутости класса F_i для всех $i \in I$, $V \in E_{\pi(F)}$ и по определению формации получаем $V/V \cap R \in E_{\pi(F)}$. Отсюда $V/V \cap R \in E_{\pi(F)} \cap E_{\pi'(F)} = (1)$. Значит, $V = V \cap R$ и $V \subseteq R \triangleleft G$, или $V \subseteq R \triangleleft \triangleleft G$, что противоречит (2).

Докажем, что группа G комонолитична.

Предположим, что существует две максимальные нормальные подгруппы M_1 и M_2 группы G , причем $M_1 \supsetneq G_F$.

Тогда если M_2 не содержится в G_F , то $G = M_2 G_F$. Кроме того, из $M_1 \supsetneq G_F$ и $G \in FS^{\pi(F)}$ вытекает, $G/G_F / M_1/G_F = G/M_1$. Следовательно, $G/M_1 \in S^{\pi(F)}$. По установленному выше $G = VM_1$. Значит, справедливы изоморфизмы $G/M_1 = VM_1/M_1 \cong V/V \cap M_1$ и $G/M_2 = VM_2/M_2 \cong V/V \cap M_2$. Следовательно, ввиду изоморфизма $V \cap M_1$ и $V \cap M_2$ максимальные нормальные подгруппы группы V . Пусть $V \cap M_1 \neq V \cap M_2$. Тогда ввиду максимальности подгрупп $V \cap M_1$, $V \cap M_2$ имеем $V = (V \cap M_1)(V \cap M_2)$. Ввиду (1), $V = ((\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M_1)((\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M_2) \triangleleft G$, что противоречит предположению о том, что V не является нормальной подгруппой G . Поэтому остается признать, что $V \cap M_1 = V \cap M_2$. Тогда $G/M_1 \cong V/V \cap M_1 = V/V \cap M_2 \cong G/M_2$. Так как $V \in \pi(F)$ и $V \in \pi(F)$ -разрешима, то главные факторы $V/V \cap M_1 = V/V \cap M_2$ группы V являются p -группами для $p \in \pi(F)$. Следовательно, по лемме 3 $G/M_1 \cong G/M_2$ нильпотентные группы. Но тогда по определению формации факторгруппа $G/M_1 \cap M_2$ нильпотентна. Следовательно, по доказанному выше $G = V(M_1 \cap M_2) = VM_1 \cap VM_2$ по лемме 1 имеем $V \cap M_1 M_2 = V = (V \cap M_1)(V \cap M_2)$. Учитывая (1), получаем $V \subseteq \bigcap_{i \in I} V_i \triangleleft G$, что невозможно в силу (2). Тогда $M_1 = M_2 = M$ и группа G комонолитична. Отсюда для каждого $i \in I$ подгруппа $V_i \subseteq M$ и поэтому $V \cap M = ((\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M) = \bigcap_{i \in I} V_i$. Тогда справедлив изоморфизм $G/G_F / M/G_F = G/M \cong V/\bigcap_{i \in I} V_i$ и $V/\bigcap_{i \in I} V_i$ – циклическая группа простого порядка p .

Выясним, что $VV_i \neq G$, для некоторого $i \in I$.

Пусть это не так и для всех $i \in I$ верно равенство $VV_i = G$. Если для некоторого $j \in I$ имеет место $V_j = G$, то $G \in F$ и G является F -инъектором для самой себя. Значит, $G = V \triangleleft G$ и получили противоречие с условием. Следовательно, $V_j \neq G$ для всех $j \in I$. Так как по условию $V_j \triangleleft G$, то $G/V_j \cong V/V \cap V_j$.

Следовательно, из того, что $V/\bigcap_{i \in I} V_i$ – циклическая группа простого порядка p , ввиду изоморфизма $V/\bigcap_{i \in I} V_i / V_j \cap V/\bigcap_{i \in I} V_i \cong V/V_j \cap V \cong G/V_j$, заключаем, что $V_j = M$.

Нетрудно заметить, что $V_j \in F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Действительно, если найдется такое $i \neq j$ и $i \in I$, что $V_i \neq G$, то как и ранее мы заключаем, что $V_i = M = V_j$, следовательно, $V_j = V_i \in F_i$ для всех $i \neq j$ и поэтому $V_i \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$. Следовательно, $V_j \subseteq G_F \subseteq V$. Но тогда ввиду предположения $VV_i = G$ мы получили, что $G \in F$ и пришли к противоречию с условием (2).

Значит, существуют $i \in I$ такие, что $VV_i \neq G$. Покажем, что в этом случае $VV_i \in X$, где X – класс Фишера. Действительно, ввиду изоморфизма $VV_i/V \cong V/V \cap V_i$, из того, что $|V/\bigcap_{i \in I} V_i| = p$, заключаем, что $G \in X$. Так как X – класс Фишера, то $VV_i \in X$. Теперь имеем $|VV_i| < |G|$ и по лемме 4 V является F -инъектором группы VV_i . Отсюда, так как $V \in F_i$, следует $V \subseteq (VV_i)_{F_i}$. Подгруппа V_i является F_i -инъектором группы VV_i . Следовательно, $(VV_i)_{F_i} \subseteq V_i$. Итак, $V \subseteq V_i$, что противоречит

(2). Полученное противоречие завершает доказательство того, что F является X -нормальным классом Фиттинга.

Теорема доказана.

В случае $X = S$ из данной теоремы получаем теорему Блессеноля–Гашюца как

Следствие 1 [1]. *Пересечение любого множества неединичных нормальных классов Фиттинга является неединичным нормальным классом Фиттинга.*

Следствие 2. *Пусть X – класс Фишера и $\{F_i | i \in I\}$ – некоторое множество X -нормальных классов Фиттинга. Если $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ и $F \subseteq X \subseteq FS$, то F является X -нормальным классом Фиттинга.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Blessenohl, D.** Über normale Schunk und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 148, № 1. – S. 1–8.
2. **Шеметков, Л.А.** Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.
3. **Сементовский, В.Г.** Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 166–170.
4. **Guo, W.** Theory of Classes Groups / W. Guo. – N. Y.–London: Cluwer, 2001.
5. **Doerk, K.** Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

S U M M A R Y

It is proved that the intersection of X -normal Q -closed Fitting classes are also X -normal Fitting classes where X is a Fitting class of partially soluble groups.

Поступила в редакцию 21.04.2010