УДК 512.542

О пересечении локально-нормальных классов Фиттинга

Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залесская, А.В. Турковская
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В теории конечных разрешимых групп хорошо известна своими приложениями для изучения структуры классов групп теорема Блессеноля–Гашюца [1] о существовании наименьшего нетривиального разрешимого нормального класса Фиттинга. Напомним, что класс Фитинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным [1] в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимым групп, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами G. При этом $\mathfrak{F}$-инъектором группы G называют такую подгруппу V, что для любой субнормальной подгруппы N группы G пересечение V∩N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы N. Долгое время теорему Блессеноля–Гашюца нельзя было распространить на более широкие классы групп, в общем случае не обязательно разрешимых. Вместе с тем в теории конечных групп были известны результаты Л.А. Шеметкова [2], В.Г. Сементовского [3] и Го Вэнь Биня [4], о том что $\mathfrak{F}$-инъекторы групп существуют и сопряжены в некоторых классах частично разрешимых групп. Все это позволило определить свойство нормальности классов Фиттинга в общем случае следующим образом. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-нормальным или нормальным в классе Фиттинга $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-инъектор – нормальная подгруппа группы G.

Напомним, что согласно теореме Блессеноля–Гашюца [1] пересечение всех неединичных $\mathfrak{S}$-нормальных классов Фиттинга является также неединичным $\mathfrak{S}$-нормальным классом Фиттинга. Расширение теоремы Блессеноля–Гашюца [1] на случай $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга, состоящих из частично разрешимых групп, – основной результат данной работы.

Адрес для корреспонденции: 210015, г. Витебск, Московский пр-т, д. 7, кв. 30 – Воробьев Н.Т.

В работе рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем монографии [5].

Необходимые сведения. Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$ [5], удовлетворяющий следующим требованиям:

1) каждая нормальная подгруппа группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;
2) из $N_1 \triangleleft G$ и $N_1 \in \mathfrak{F}$; $N_2 \triangleleft G$ и $N_2 \in \mathfrak{F}$ всегда следует $N_1N_2 \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ непустой класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$-радикалом группы *G* называется такая подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы *G*, которая является наибольшей из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы *G*.

Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=(G\colon G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$.

Через $\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$ мы будем обозначать класс всех $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимых групп. При этом $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей всех групп из $\mathfrak{F}$. Тогда произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$ состоит из всех тех групп *G*, для которых факторгруппы $G/G_{\mathfrak{F}}$ являются $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимыми группами.

Классом Фишера называют такой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, что из $K \subseteq H \subseteq G \in \mathfrak{F}$, $K \triangleleft G$ и $H/K \in \mathfrak{N}_p$ всегда следует $H \in \mathfrak{F}$ (p – простое число). Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *Q*-замкнутым, если из того что $G \in \mathfrak{F}$, $K \triangleleft G$ следует, что $G/K \in \mathfrak{F}$.

Приведем также в качестве лемм те известные результаты, которые мы будем использовать для доказательства теоремы.

Лемма 1 [5]. *Пусть A, B, C – подгруппы группы G. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) $A \cap BC=(A \cap B)(A \cap C)$;
2) $AB \cap AC=A(B \cap C)$.

Лемма 2 [4]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *класс Фиттинга,* $\pi=\pi(\mathfrak{F})$, $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$. *Тогда в группе G существуют* $\mathfrak{F}$*-инъекторы и любые два из них сопряжены G.*

Лемма 3 [5]. *Каждая p-группа является нильпотентной группой.*

Лемма 4 [4]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *класс Фиттинга, тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если V-* $\mathfrak{F}$*-инъектор группы G и* $N \triangleleft G$*, то* $V \cap N$ $\mathfrak{F}$*-инъектор группы N;*
2) *если* $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$ *и V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор группы G, причем U подгруппа G, содержащая V, то V* $\mathfrak{F}$*-инъектор U.*

$\mathfrak{X}$**-нормальные классы и их пересечение.** В настоящем разделе расширяется теорема Блессеноля–Гашюца [1] в двух направлениях. Во-первых, мы устанавливаем ее справедливость для достаточно широкого семейства локально-нормальных классов Фиттинга, во-вторых, при доказательстве теоремы не требуем свойства разрешимости всех рассматриваемых групп.

Определение. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-нормальным или нормальным в классе Фиттинга $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \in \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-инъектор – нормальная подгруппа группы G.

В случае, когда $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}$, мы получаем определение нормального класса Фитинга, которое было определено [1].

Основной результат работы представляет

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– класс Фишера,* $\{\mathfrak{F}_i \mid i\in I\}$ *– множество* $\mathfrak{X}$*-нормальных Q-замкнутых классов Фиттинга и* $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. *Если* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$, *то* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{X}$*-нормальным классом Фиттинга.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть I – некоторое множество индексов и для любого $i\in I$, $\mathfrak{F}_i$ – такой класс Фиттинга, что $\mathfrak{F}_i \trianglelefteq \mathfrak{X}$.

Докажем, что $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$.

Проведем индукцию по порядку групп из $\mathfrak{X}$. Пусть G -группа минимального порядка из $\mathfrak{X}$ такая, для которой теорема неверна. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$, то факторгруппа $G/G_{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешима и по лемме 2 в G существует $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. Пусть V такой $\mathfrak{F}$-инъектор группы G, который не нормален в G. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_i$ для всех $i\in I$, то $G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}_i}$. Ввиду изоморфизма, $G/G_{\mathfrak{F}} / G_{\mathfrak{F}_i}/G_{\mathfrak{F}} \cong G/G_{\mathfrak{F}_i}$ факторгруппа $G/G_{\mathfrak{F}_i}$ $\pi(\mathfrak{F}_i)$-разрешима. Следовательно, из леммы 2 в группе G существует $\mathfrak{F}_i$–инъектор V_i для любого $i\in I$. По условию $V_i \trianglelefteq G$ для всех $i\in I$ и поэтому $\bigcap_{i\in I} V_i \trianglelefteq G$. Кроме того, $\bigcap_{i\in I} V_i \trianglelefteq V_i \in \mathfrak{F}_i$ для каждого $i\in I$. Следовательно, $\bigcap_{i\in I} V_i \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Но тогда по определению $\mathfrak{F}$-радикала справедливо включение $\bigcap_{i\in I} V_i \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. С другой стороны, $G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}_i} = V_i$ для всех $i\in I$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}} = \bigcap_{i\in I} V_i$. Так как V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G, то $V \supseteq G_{\mathfrak{F}}$. Значит, $\bigcap_{i\in I} V_i \subset V$, ввиду предположения о том, что подгруппа V ненормальна в G. Пусть M – любая максимальная нормальная подгруппа группы G. Доказательство теоремы в дальнейшем разобьем на несколько этапов.

Докажем, что $V\cap M = (\bigcap_{i\in I} V_i) \bigcap_{i\in I} M$. (1)

Так как $M\in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$, то $M/M_{\mathfrak{F}}$ - $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимая группа. Значит, в группе M по лемме 2 существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в M. Так как V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G, по лемме 4 группа $V\cap M$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы M. Тогда из того, что $|M| < |G|$ по индукции следует, что $V\cap M \trianglelefteq M$. Учитывая свойства $\mathfrak{F}$-радикала, получаем $V\cap M = M_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap M = (\bigcap_{i\in I} V_i) \bigcap_{i\in I} M$ и равенство (1) доказано.

Покажем, что V не содержится ни в одной субнормальной подгруппе N из G, т.е. $V \not\subseteq N \trianglelefteq\trianglelefteq G$. (2)

Для доказательства (2), предложим от противного, что $V \subseteq N \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Так как $G\in \mathfrak{X}$ и $N \trianglelefteq\trianglelefteq G$, то по определению класса Фиттинга $N\in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$ и по лемме 4 заключаем, что подгруппа V - $\mathfrak{F}$-инъектор N. Так как $|N|<|G|$, по индукции для группы N теорема верна. Следовательно, $V \trianglelefteq N$ и поэтому V субнормальна в G. По определению радикала $V = G_{\mathfrak{F}}$ и $V \trianglelefteq G$. Получили противоречие с тем, что V не является нормальной подгруппой в G. Это доказывает справедливость утверждения (2).

Докажем, что $G=RV$, где R – любая из нормальных подгрупп G, такая, что факторгруппа G/R является либо разрешимой группой, порядок которой есть степень простого числа $p\in\pi(\mathfrak{F})$, либо простой $\pi'(\mathfrak{F})$-группой.

Вначале заметим, что для первого случая R является любой из нормальных подгрупп группы G, такой, для которой $G/R\in \mathfrak{N}_p$, где $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Вначале докажем существование такой подгруппы R. Если $G_{\mathfrak{F}}=G$,то $G\in \mathfrak{F}$ и утверждение верно, так как $G=RV=V$. Пусть $G_{\mathfrak{F}}\neq G$. Тогда существует $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимая факторгруппа группа $G/G_{\mathfrak{F}}$. Но если существует факторгруппа, то найдется максимальная нормальная подгруппа R, которая содержит $G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, ввиду изоморфизма $G/G_{\mathfrak{F}}/R/G_{\mathfrak{F}}\cong G/R$. Так как факторгруппа по максимальной нормальной подгруппе является главным фактором группы G, то этот фактор, по определению $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой группы, является либо абелевой примарной p-группой ($p\in\pi(\mathfrak{F})$), либо $\pi'(\mathfrak{F})$-группой. Этим существование подгруппы R с указанными выше свойствами доказано.

Пусть $G\neq RV$, то есть $RV\subset G$. Если G/R элементарная абелева p-группа ($p\in\pi(\mathfrak{F})$), то по лемме 3 G/R нильпотентная группа. Следовательно, RV/R субнормальна в G/R и поэтому RV субнормальна в G. Отсюда V содержится в подгруппе $H=RV$ и $H\triangleleft\triangleleft G$. Это противоречит (**2**).

Предположим теперь, что G/R – $\pi'(\mathfrak{F})$-группа, т.е. $G/R\in \mathfrak{E}_{\pi'(\mathfrak{F})}$, где $\mathfrak{E}_{\pi'(\mathfrak{F})}$ класс всех $\pi'(\mathfrak{F})$-групп. Применим изоморфизм $V/V\cap R \cong RV/R\subset G/R$. Так как $G/R\in \mathfrak{E}_{\pi'(\mathfrak{F})}$, то $V/V\cap R\in \mathfrak{E}_{\pi'(\mathfrak{F})}$. С другой стороны, ввиду Q-замкнутости класса $\mathfrak{F}_i$ для всех $i\in I$, $V\in \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{F})}$ и по определению формации получаем $V/V\cap R\in \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{F})}$. Отсюда $V/V\cap R\in \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{F})}\cap \mathfrak{E}_{\pi'(\mathfrak{F})}=(1)$. Значит, $V= V\cap R$ и $V\subseteq R\triangleleft G$, или $V\subseteq R\triangleleft\triangleleft G$, что противоречит (**2**).

Докажем, что группа G комонолитична.

Предположим, что существует две максимальные нормальные подгруппы M_1 и M_2 группы G, причем $M_1\supseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Тогда если M_2 не содержится в $G_{\mathfrak{F}}$, то $G=M_2G_{\mathfrak{F}}$. Кроме того, из $M_1\supseteq G_{\mathfrak{F}}$ и $G\in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$ вытекает, $G/G_{\mathfrak{F}}/M_1/G_{\mathfrak{F}}=G/M_1$. Следовательно, $G/M_1\in \mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$. По установленному выше $G=VM_1$. Значит, справедливы изоморфизмы $G/M_1=VM_1/M_1\cong V/V\cap M_1$ и $G/M_2=VM_2/M_2\cong V/V\cap M_2$. Следовательно, ввиду изоморфизма $V\cap M_1$ и $V\cap M_2$ максимальные нормальные подгруппы группы V. Пусть $V\cap M_1\neq V\cap M_2$. Тогда ввиду максимальности подгрупп $V\cap M_1$, $V\cap M_2$ имеем $V=(V\cap M_1)(V\cap M_2)$. Ввиду (1), $V=((\bigcap_{i\in I}V_i)\cap M_1)((\bigcap_{i\in I}V_i)\cap M_2)\triangleleft G$, что противоречит предположению о том, что V не является нормальной подгруппой G. Поэтому остается признать, что $V\cap M_1=V\cap M_2$. Тогда $G/M_1\cong V/V\cap M_1=V/V\cap M_2\cong G/M_2$. Так как $V\in\pi(\mathfrak{F})$ и V $\pi(\mathfrak{F})$-разрешима, то главные факторы $V/V\cap M_1= V/V\cap M_2$ группы V являются p-группами для $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, по лемме 3 $G/M_1\cong G/M_2$ нильпотентные группы. Но тогда по определению формации факторгруппа $G/M_1\cap M_2$ нильпотентна. Следовательно, по доказанному выше $G=V(M_1\cap M_2)=VM_1\cap VM_2$ по лемме 1 имеем

$V \cap M_1M_2 = V = (V \cap M_1)(V \cap M_2)$. Учитывая (1), получаем $V \subseteq \bigcap_{i\in I} V_i \triangleleft G$, что невозможно в силу (2). Тогда $M_1 = M_2 = M$ и группа G комонолитична. Отсюда для каждого $i \in I$ подгруппа $V_i \subseteq M$ и поэтому $V \cap M = ((\bigcap_{i\in I} V_i) \cap M) = \bigcap_{i\in I} V_i$. Тогда справедлив изоморфизм $G/G_{\mathfrak{F}} / M/G_{\mathfrak{F}} = G/M \cong V/\bigcap_{i\in I} V_i$ и $V/\bigcap_{i\in I} V_i$ – циклическая группа простого порядка p.

Выясним, что $VV_i \neq G$, для некоторого $i \in I$.

Пусть это не так и для всех $i \in I$ верно равенство $VV_i = G$. Если для некоторого $j \in I$ имеет место $V_j = G$, то $G \in \mathfrak{F}$ и G является $\mathfrak{F}$-инъектором для самой себя. Значит, $G = V \triangleleft G$ и получили противоречие с условием. Следовательно, $V_j \neq G$ для всех $j \in I$. Так как по условию $V_j \triangleleft G$, то $G/V_j \cong V/V \cap V_j$.

Следовательно, из того, что $V/\bigcap_{i\in I} V_i$ – циклическая группа простого порядка p, ввиду изоморфизма $V/\bigcap_{i\in I} V_i \,/\, V_j \cap V/\bigcap_{i\in I} V_i \cong V/V_j \cap V \cong G/V_j$, заключаем, что $V_j = M$.

Нетрудно заметить, что $V_j \in \mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. Действительно, если найдется такое $i \neq j$ и $i \in I$, что $V_i \neq G$, то как и ранее мы заключаем, что $V_i = M = V_j$, следовательно, $V_j = V_i \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \neq j$ и поэтому $V_i \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Следовательно, $V_j \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$. Но тогда ввиду предположения $VV_i = G$ мы получили, что $G \in \mathfrak{F}$ и пришли к противоречию с условием (**2**).

Значит, существуют $i \in I$ такие, что $VV_i \neq G$. Покажем, что в этом случае $VV_i \in \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – класс Фишера. Действительно, ввиду изоморфизма $VV_i/V \cong V/V \cap V_i$, из того, что $|V/\bigcap_{i\in I} V_i| = p$, заключаем, что $G \in \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, то $VV_i \in \mathfrak{X}$. Теперь имеем $|VV_i| < |G|$ и по лемме 4 V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы VV_i. Отсюда, так как $V \in \mathfrak{F}_i$, следует $V \subseteq (VV_i)_{\mathfrak{F}_i}$. Подгруппа V_i является $\mathfrak{F}_i$-инъектором группы VV_i. Следовательно, $(VV_i)_{\mathfrak{F}_i} \subseteq V_i$. Итак, $V \subseteq V_i$, что противоречит (2). Полученное противоречие завершает доказательство того, что $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга.

Теорема доказана.

В случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ из данной теоремы получаем теорему Блессеноля–Гашюца как

Следствие 1 [1]. *Пересечение любого множества неединичных нормальных классов Фиттинга является неединичным нормальным классом Фиттинга.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фишера и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторое множество $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга. Если $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Blessenohl, D.*** Uber normale Schunk und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 148, № 1. – S. 1–8.
2. ***Шеметков, Л.А.*** Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.
3. ***Сементовский, В.Г.*** Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 166–170.

4. ***Guo, W.*** Theory of Classes Groups / W. Guo. – N. Y.–London: Cluwer, 2001.
5. ***Doerk, K.*** Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

S U M M A R Y

It is proved that the intersection of $\mathfrak{X}$*-normal Q-closed Fitting classes are also* $\mathfrak{X}$*-normal Fitting classes where* $\mathfrak{X}$ *is a Fitting class of partially soluble groups.*

Поступила в редакцию 21.04.2010