УДК 512.542

О произведении нильпотентных подгрупп

А.А. Родионов
Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Хорошо известна теорема Виланда–Кегеля, которая утверждает, что группа разрешима, если она есть произведение двух нильпотентных подгрупп. Изучению групп, представимых в виде произведения двух подгрупп, принадлежащих определенному классу, посвящен целый ряд работ. В частности, рассматривались случаи, когда в произведении участвуют сверхразрешимые группы. Мы рассматриваем задачу, в каких случаях произведение нильпотентных подгрупп, чьи нормализаторы принадлежат некоторой формации, само принадлежит этой формации.

Рассматриваются только конечные группы. Мы будем использовать определения и обозначения из книг [1] и [2]. Напомним некоторые из них.

P – множество всех простых чисел. Если π – некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ – класс групп, то через $\mathfrak{F}_\pi$ мы обозначаем класс всех π-групп из $\mathfrak{F}$; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G; $\pi(\mathfrak{F})=\cup_{G\in\mathfrak{F}}\pi(G)$.

Символ $[A]B$ обозначает полупрямое произведение групп A и B с нормальной подгруппой A.

Формация – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется:

1) наследственной, если из $H\leq G\in\mathfrak{F}$ всегда следует $H\in\mathfrak{F}$;

2) насыщенной, если из $G/\Phi(G)\in\mathfrak{F}$ всегда следует $G\in\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G с факторгруппой из $\mathfrak{F}$.

Через $\mathfrak{S}$ обозначается формация всех разрешимых групп, $\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп.

Локальным спутником называют функцию *f*, сопоставляющую каждому простому числу q некоторую формацию $f(q)$. Локальный спутник *f* называется: 1) полным, если $\mathfrak{N}_q f(q)=f(q)$ для любого простого q; 2) наследственным, если формация f(q) является наследственной для любого простого q. Главный фактор H/K группы G называют f-центральным в G, если $G/C_G(H/K)\in f(q)$ для любого простого делителя q порядка H/K. Через LF(f) обозначают класс групп G таких, что $Z_f(G)=G$. Известно, что $LF(f)$ – насыщенная формация. Согласно теореме Гашюца–Любезедер–Шмидта, непустая формация $\mathfrak{F}$ насыщена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}=LF(f)$ для некоторого локального спутника *f* (в этом случае *f* называется локальным спутником формации $\mathfrak{F}$).

Адрес для корреспонденции: 246019, г. Гомель, ул. Советская, д. 104, тел.: 8(0232) 60-73-82 – Родионов А.А.

Наследственная формация $\mathfrak{F}$ называется формацией Шеметкова в классе $\mathfrak{H}$ (или, иначе, Š-формацией в классе $\mathfrak{H}$), если каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа из $\mathfrak{H}$ является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта. Наследственная насыщенная формация $\mathfrak{F}$ является Š-формацией в классе $\mathfrak{S}$, тогда и только тогда, когда она имеет локальный спутник *f* такой, что для любого простого числа p имеет место $f(p)=\mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ (см. теорему 24.3 из [3]).

Определение 1. Наследственная насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется *N-замкнутой в классе* $\mathfrak{S}$, если из того, что нормализаторы всех неединичных силовских подгрупп разрешимой группы принадлежат $\mathfrak{F}$, следует, что сама группа принадлежит $\mathfrak{F}$.

Определение 2. Пусть **P**$=\sigma\cup\tau$, где $\sigma\cap\tau=\varnothing$. Будем говорить, что насыщенная формация $\mathfrak{F}$ *является* $N_{\sigma,\tau}$*-замкнутой в классе* $E_\sigma^n\cap E_\tau^n$, если из того, что нормализаторы σ-холловой и τ-холловой подгруппы любой группы из $E_\sigma^n\cap E_\tau^n$ принадлежат $\mathfrak{F}$, следует, что сама группа принадлежит $\mathfrak{F}$.

Лемма 1 (см. [1, IV.3.8]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая разрешимая насыщенная формация, F – ее канонический спутник и f – некоторый спутник с разрешимыми значениями. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}=LF(f)$;

2) $F(p)=\mathfrak{N}_p f(p)\cap\mathfrak{F}$ для любого простого числа p.

Лемма 2. *Формация $\mathfrak{H}=E^n{}_\sigma\cap E^n{}_\tau$ имеет локальный спутник h такой, что $h(p)=\mathfrak{S}_{\{p\}\cup\tau}$ при $p\in\sigma$ и $h(p)=\mathfrak{S}_{\{p\}\cup\sigma}$ при $p\in\tau$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуется доказать, что $\mathfrak{H}=LF(h)$.

1. Предположим, что множество LF(h)\$\mathfrak{H}$ не пусто, и выберем в нем группу *G* наименьшего порядка. Тогда в *G* существует минимальная нормальная подгруппа *L*, которая является самоцентрализуемой p-группой для некоторого простого числа *p*. Без ограничения общности, можно считать, что $p\in\sigma$. По индукции $G/L\in\mathfrak{H}$, а значит, τ-холлова подгруппа из *G* нильпотентна. А так как *L* самоцентрализуема, то $\pi(G)\cap\sigma=\{p\}$. Поэтому $G\in\mathfrak{H}$. Противоречие. Таким образом, LF(h) содержится в $\mathfrak{H}$.

2. Предположим, что множество $\mathfrak{H}\backslash LF(h)$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Тогда в *G* существует минимальная нормальная подгруппа *L*, которая является самоцентрализуемой p-группой для некоторого простого числа *p*. Без ограничения общности можно считать, что $p\in\sigma$. По индукции $G/L\in$ LF(h). А так как L самоцентрализуема, а группа G имеет нильпотентную σ-холлову подгруппу, то $\pi(G)\cap\sigma=\{p\}$. Теперь $G\in h(p)$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{H}$=LF(h).

Лемма 3. *Пусть $G=[A]B$ и $B_1\leq B$. Тогда $N_G(B_1)=C_A(B_1)N_B(B_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g\in N_G(B_1)$, тогда $g=ab$ для некоторых $a\in A$, $b\in B$. Значит, $B_1ab=B_1$, отсюда $B_1^a=B_1b^{-1}\subseteq B$. Из последнего включения получаем, что для любого $b_1\in B_1$ имеет место $b_1^a\in B$. Но тогда правая часть равенства $(b_1^{-1}a^{-1}b_1)a=b_1^{-1}b_1^a$ принадлежит *B*, а левая принадлежит *A*. Так как $A\cap B=1$, то $[b_1,a]=1$ для любого $b_1\in B_1$, т.е. $a\in C_G(B_1)$. Теперь $b\in N_G(B_1)$. Получаем $g=ab\in C_A(B_1)N_B(B_1)$. Лемма доказана.

Лемма 4 (см. [2], лемма 4.5). *Если $\mathfrak{F}=LF(f)$, то $G/O_{p'}(G)\in\mathfrak{N}_p f(p)$ для любой группы $G\in\mathfrak{F}$ и любого простого делителя p порядка G.*

Лемма 5 (см. [4]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая разрешимая наследственная насыщенная формация. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}$ является N-замкнутой в $\mathfrak{S}$;

2) $\mathfrak{F}=LF(f)$, где для любого простого числа q имеет место $f(q)=\mathfrak{N}_q f(q)=$ $=\mathfrak{S}_{\pi(f(q))}$ и $p\in\pi(f(q))$ влечет $q\in\pi(f(p))$ для любой пары простых чисел p, q.

Лемма 6 (см. [2], лемма 3.9*). Если порядок главного фактора H/K группы G делится на простое число p, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп.*

Лемма 7. *Пусть N – нормальная p-подгруппа группы G. Если $G=[N]M$ и $M_{p'}$ – p'-холлова подгруппа из M, то $N_N(M_{p'})$ гиперцентральна в $N_G(M_{p'})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $N_1=N_G(M_{p'})\cap N=N_N(M_{p'})$. Пусть R/S – главный p-фактор из N_1. Тогда $N_1/C_{N1}(R/S)$ – р-группа. Но по лемме 6 эта факторгруппа не имеет неединичных нормальных р-подгрупп. Значит, $N_G(M_{p'})/C_{N1}(R/S)=1$, т.е. фактор R/S централен. Следовательно, подгруппа N_1 гиперцентральна в $N_G(M_{p'})$.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, N – нормальная p-подгруппа группы G и $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Если $G=[N]M$, $G/N\in\mathfrak{F}$ и $M_{p'}$ – p'-холлова подгруппа из M, то $N_G(M_{p'})\in\mathfrak{F}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $N_G(M_{p'})/N_N(M_{p'})\approx N_G(M_{p'})N/N\in\mathfrak{F}$. По лемме 7 $N_N(M_{p'})$ является гиперцентральной, а значит, и $\mathfrak{F}$-гиперцентральной в $N_G(M_{p'})$. Отсюда и следует $N_G(M_{p'})\in\mathfrak{F}$.

Говорят, что формация $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет условию Кегеля в классе* $\mathfrak{S}$, если из $G=AB=BC=CA\in\mathfrak{S}$, где A, B, C из $\mathfrak{F}$, всегда следует, что $G\in\mathfrak{F}$.

Лемма 9 (см. [3], теорема 25.3). *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае удовлетворяет условию Кегеля в классе $\mathfrak{S}$, когда $\mathfrak{F}$ – Š-формация в классе $\mathfrak{S}$.*

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{P}=\sigma\cup\tau$, $\sigma\cap\tau=\varnothing$. *Непустая наследственная насыщенная разрешимая формация $\mathfrak{F}$ является $N_{\sigma,\tau}$-замкнутой в классе $E_\sigma^n\cap E_\tau^n$ тогда и только тогда, когда у формации $\mathfrak{F}\cap E_\sigma^n\cap E_\tau^n$ существует полный локальный спутник f такой, что выполняются следующие условия:*

1) $f(p)=\mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для любого простого числа p;

2) $f(p)\subseteq\mathfrak{S}_{\{p\}\cup\tau}$ при $p\in\sigma$ и $f(p)\subseteq\mathfrak{S}_{\{p\}\cup\sigma}$ при $p\in\tau$;

3) для любых двух различных простых чисел p, q включение $p\in\pi(f(q))$ влечет $q\in\pi(f(p))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathfrak{F}\subseteq E_\sigma^n\cap E_\tau^n$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ $N_{\sigma,\tau}$-замкнута и F – ее канонический спутник. Пусть f – такой локальный спутник, что $f(p)=\mathfrak{S}_{\pi(F(p))}$ при $p\in\mathbf{P}$. Условие 1) для f, очевидно, выполняется. По лемме 2 $\pi(F(p))\subseteq\{p\}\cup\tau$ при $p\in\sigma$ и $\pi(F(p))\subseteq\{p\}\cup\sigma$ при $p\in\tau$. Таким образом, условие 2) для f также выполняется.

Покажем, что для f выполняется условие 3). Если p, $q\in\sigma$ или p, $q\in\tau$, то включение $q\in\pi(f(p))$ невозможно в силу условия 2). Пусть теперь $p\in\sigma$ и $q\in\tau$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{F}_{p,q}=\mathfrak{S}_{\{p,q\}}\cap\mathfrak{F}$, и пусть $F_{p,q}$ – ее канонический спутник. Легко видеть, что формация $\mathfrak{F}_{p,q}$ является N-замкнутой в $\mathfrak{S}$. По лемме 5 $\mathfrak{F}_{p,q}$ совпадает с $\mathfrak{S}_{p,q}$, или с $\mathfrak{N}_{\{p,q\}}$, причем $q\in\pi(F_{p,q}(p))$ влечет $p\in\pi(F_{p,q}(q))$. Но тогда из $F_{p,q}\leq F$ и определения спутника f следует справедливость условия 3).

Таким образом, f удовлетворяет условию 1)—3) теоремы. Покажем, что $f(p)\cap\mathfrak{F}=F(p)$. Это завершит доказательство, так как в силу леммы 1 f будет являться спутником формации $\mathfrak{F}$.

Включение $F(p)\subseteq f(p)\cap\mathfrak{F}$ выполняется в силу выбора спутника f. Докажем, что $F(p)\supseteq f(p)\cap\mathfrak{F}$ для любого $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Предположим противное. Пусть включение не выполняется для некоторого $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Не ограничивая общности, можно считать, что $p\in\sigma$. Выберем группу $X\in(f(p)\cap\mathfrak{F})\backslash F(p)$, для которой минимальным является число $|X|+|\pi(X)\cup\{p\}|$. Понятно, что X имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L, причем $X/L\in F(p)$. Ввиду условия L является p'-группой. Точнее, L является q-группой для некоторого $q\in\tau$.

Докажем сначала, что $|X|$ не делится на p. Предположим, от противного, что p делит $|X|$. Рассмотрим точный F_pX-модуль V. Пусть $G=[V]X$ – соответствующее полупрямое произведение, $G_p=VX_p$ – силовская p-подгруппа в G.

Пусть X_τ – τ-холлова подгруппа из X. По лемме 3 $N_G(X_\tau)=C_V(X_\tau)N_X(X_\tau)$. Очевидно, $N_X(X_\tau)\in\mathfrak{F}$. По лемме 8 $N_G(X_\tau)\in\mathfrak{F}$.

Так как $X\in f(p)$, то по условию $\pi(X)\cap\sigma=\{p\}$, то есть силовская p-подгруппа из X будет ее σ-холловой подгруппой. VX_p – силовская p-подгруппа из G. Легко видеть, что $N_X(X_p)\neq X$, а значит, $N_X(X_p)\in F(p)$. Поэтому $N_G(VX_p) = VN_X(X_p) \in \mathfrak{N}_pF(p) = F(p)\subseteq\mathfrak{F}$. В силу $N_{\sigma,\tau}$-замкнутости формации $\mathfrak{F}$ имеем $G\in\mathfrak{F}$. Так как $O_{p'}(G)=1$, то по лемме 4 имеем $G\in F(p)$, а значит, $X\in F(p)$. Получили противоречие. Мы доказали, что X является p'-группой.

Из доказанного выше сразу следует, что X – нильпотентная τ-группа. Так как $O_{q'}(X)=1$, то сразу получаем, что X является q-группой. Из определения спутника f и включения $X\in f(p)$ следует, что $q\in\pi(F(p))$, а значит, $q\in\pi(F_{p,q}(p))$. По лемме 5 $\mathfrak{F}_{p,q}=\mathfrak{S}_{p,q}$ и у $\mathfrak{F}_{p,q}$ существует спутник $f_{p,q}$ со значением $f_{p,q}(p)=\mathfrak{S}_{\{p,q\}}$. Итак, $X\in\mathfrak{S}_{\{p,q\}}=\mathfrak{F}_{p,q}\cap f_{p,q}(p)=F_{p,q}(p)\leq F(p)$. Получаем противоречие.

Необходимость. Предположим, что $\mathfrak{F}=LF(f)$ и спутник f удовлетворяет условиям 1)–3). Предположим, что условие $N_{\sigma,\tau}$-замкнутости формации $\mathfrak{F}$ не выполняется, и рассмотрим группу G – контрпример наименьшего порядка. Тогда $G\notin\mathfrak{F}$, а нормализаторы ее σ-холловой и τ-холловой подгрупп принадлежат $\mathfrak{F}$. Очевидно, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, для которой $G/N\in\mathfrak{F}$. Пусть N имеет своим порядком степень простого числа p. Не ограничивая общности можно считать, что $p\in\sigma$. Тогда по условию $\sigma\cap\pi(G)=\{p\}$.

Предположим, что группа G является $\{p,q\}$-группой для некоторого простого q. Тогда $q\in\tau$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{F}_{p,q}=\mathfrak{S}_{\{p,q\}}\cap\mathfrak{F}$. Очевидно, что спутник $f_{p,q}$ со значениями $f_{p,q}(p)=f(p)\cap\mathfrak{S}_{\{p,q\}}$ для любого простого числа p удовлетворяет требованиям леммы 5, и поэтому $\mathfrak{F}_{p,q}$ является N-замкнутой и, следовательно, $G\in\mathfrak{F}_{p,q}\subseteq\mathfrak{F}$. Это невозможно. Значит, $|\pi(G)|\geq 3$.

Пусть теперь q – некоторое простое число из $\pi(G)\backslash\{p\}$, тогда $\pi(G)\backslash\{p,q\}\neq\varnothing$. Обозначим $\{p,q\}$-холлову подгруппу через H_1, $\pi(G)\backslash\{q\}$-холлову подгруппу через H_2 и $\pi(G)\backslash\{p\}$-холлову подгруппу через H_3. Все эти подгруппы неединичны.

Пусть H_p – силовская p-подгруппа из H_1, H_τ – τ-холлова подгруппа из H_1. Тогда $N_{H1}(H_p)\leq N_G(G_p)\in\mathfrak{F}$. Но так как $G/N\in\mathfrak{F}$, то по лемме 8 имеем $N_{H1}(H_\tau)\in\mathfrak{F}$. Итак, нормализаторы σ-холловой и τ-холловой подгрупп из H_1 принадлежат $\mathfrak{F}$. Теперь по индукции $H_1\in\mathfrak{F}$.

Аналогичным образом можно показать, что H_2 принадлежит $\mathfrak{F}$.

Очевидно, что $\pi(H_3)\in\tau$, но так как $|G^{\mathfrak{F}}|=|N|$ – σ-группа, то $H_3^{\mathfrak{F}}=1$, а значит, $H_3\in\mathfrak{F}$.

Группы H_1, H_2, H_3 принадлежат формации $\mathfrak{F}$ и имеют взаимно простые индексы. Из строения спутника f следует, что $\mathfrak{F}$ является Š-формацией в классе $\mathfrak{S}$, а значит, по лемме 9 для нее выполняется условие Кегеля. Значит, $G\in\mathfrak{F}$. Противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Doerk, K.*** Finite Soluble Groups / K. Doerk, T.O. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992.
2. ***Шеметков, Л.А.*** Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.

3. ***Шеметков, Л.А.*** Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989.
4. ***D'Aniello, A.*** Saturated formations closed under Sylow normalizers / A. D'Aniello [et al.] // Comm. Algebra. – 2005. – Vol. 33. – P. 2801–2808.

S U M M A R Y

All concerned groups are finite and soluble. Let $\Pi=\sigma\cup\tau$, $\sigma\cap\tau=\varnothing$. The formation F is called $N_{\sigma,\tau}$-closed in the class $E_\sigma^n \cap E_\tau^n$ if for every $G \in E_\sigma^n \cap E_\tau^n$ the following condition is held: if $N_G(G_\sigma)$ and $N_G(G_\tau)$ belong to F, then $G \in F$. The description of $N_{\sigma,\tau}$-closed formations is obtained in the paper.

Поступила в редакцию 16.03.2010