УДК 517.956.4

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПАРАМЕТРА

С.М. Бородич

Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В настоящей работе рассматривается неавтономное параболическое уравнение с малым (по модулю) параметром ε, которое становится автономным при $\varepsilon = 0$. Изучается асимптотическое поведение решений этого уравнения в зависимости от ε, при $\varepsilon \to 0$.

Цель работы — исследовать вопрос о возможности стабилизации при $t \to +\infty$ главного члена асимптотики решений.

***Материал и методы.** Материалом исследования является неавтономное параболическое уравнение, зависящее от параметра. Использованы методы теории нелинейных уравнений математической физики, а также методы теории бесконечномерных динамических систем.*

***Результаты и их обсуждение.** Для рассматриваемого неавтономного параболического уравнения, зависящего от малого параметра ε, установлен факт глобальной по t аппроксимации его решений кусочно-непрерывными функциями, состоящими из конечного числа кусков траекторий автономного уравнения, которое соответствует случаю $\varepsilon = 0$. Все эти куски, кроме первого, лежат на конечномерных гладких многообразиях.*

***Заключение.** Изложенный подход к изучению асимптотики решений можно применить к различным классам неавтономных эволюционных уравнений, зависящих от малого параметра.*

***Ключевые слова:** неавтономное параболическое уравнение, полугруппа операторов, функция Ляпунова, гиперболическая стационарная точка, составная предельная траектория.*

ON THE ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF A PARAMETER DEPENDENT NON-AUTONOMOUS PARABOLIC EQUATION

S.M. Borodich

Educational Establishment “Vitebsk State P.M. Masherov University”

In the paper, we consider a non-autonomous parabolic equation with a small (in absolute value) parameter ε, that becomes autonomous with $\varepsilon = 0$. The asymptotic behavior as $\varepsilon \to 0$ of solutions of this equation is studied.

The purpose of the work is to investigate the question of the possibility of stabilization as $t \to +\infty$ of the principal term of the asymptotics of solutions.

***Material and methods.** The material of the research is a non-autonomous parabolic equation which depends on a parameter. The methods of the theory of nonlinear equations of mathematical physics as well as the methods of the theory of infinite-dimensional dynamical systems are used.*

***Findings and its discussion.** For the considered non-autonomous parabolic equation, depending on a small parameter ε, the fact of global in t approximation of its solutions by piecewise continuous functions consisting of a finite number of pieces of trajectories of the autonomous equation, which corresponds to the case $\varepsilon = 0$ is established. All these pieces, except the first, lie on finite-dimensional smooth manifolds.*

***Conclusion.** The described approach to the study of the asymptotics of solutions can be applied to various classes of non-autonomous evolution equations which depend on a small parameter.*

***Key words:** non-autonomous parabolic equation, semigroup of operators, Lyapunov function, hyperbolic stationary point, combined limit trajectory.*

При математическом моделировании различных процессов и явлений нередко возникают нелинейные эволюционные уравнения, содержащие малый параметр. Важная задача — описание асимптотического поведения их решений при стремлении параметра к нулю. В работах А.В. Бабина, М.И. Вишика [1–3] изучалась равномерная по $t \ge 0$ асимптотика решений автономных эволюционных уравнений, зависящих от малого параметра.

В настоящей статье рассматривается неавтономное параболическое уравнение с малым (по модулю) параметром ε, которое становится автономным при $\varepsilon = 0$. Условия на функции, входящие в уравнение, обеспечивают существование единственного решения соответствующей начально-краевой задачи, определенного при всех $t \ge 0$. Изучается асимптотическое поведение решений данного уравнения в зависимости от ε при $\varepsilon \to 0$. Исследуется вопрос о возможности стабилизации при $t \to +\infty$ главного члена асимптотики решения.

Материал и методы. Материалом исследования является неавтономное параболическое уравнение, зависящее от параметра. Использованы методы теории нелинейных уравнений математической физики, а также методы теории бесконечномерных динамических систем.

Результаты и их обсуждение. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается неавтономное параболическое уравнение

$$\partial_t u = \Delta u - f(u) - \varepsilon f_1(u,t) - g(x) - \varepsilon g_1(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \tag{1}$$

с граничным условием

$$u|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Здесь ε — числовой параметр, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$; $f(u) \in C^{1+\beta}(\mathbf{R})$, $0 < \beta < 1$; $f_1(u,t) \in C^{1,0}(\mathbf{R} \times [0,+\infty))$, $g(x) \in L_2(\Omega)$, $g_1(\cdot,t) \in L_\infty([0,+\infty); L_2(\Omega))$. Предполагается, что

$$(f(u) + \varepsilon f_1(u,t))u \ \ge\ \mu_0 |u|^{2+\rho} - C, \tag{3}$$

$$f'(u) + \varepsilon f'_{1u}(u,t) \ge -C, \tag{4}$$

$$|f'(u)| \le C(1+|u|^{p_0}), \quad |f'_{1u}(u,t)| \le C(1+|u|^{p_0}), \tag{5}$$

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds \ge -C \tag{6}$$

для всех $u \in \mathbf{R}$, $t \ge 0$ и $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, где μ_0, ρ, C, p_0 — некоторые положительные константы, причем $p_0 \le \dfrac{2}{n-2}$.

Пусть $E = H_0^1(\Omega)$ — пространство начальных данных задачи (1), (2). При каждом ε, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, и любых $T > 0$ и $u_0 \in E$ задача (1), (2) имеет единственное решение $u(t,\varepsilon)$, принадлежащее классу

$$V = L_\infty([0,T]; L_2(\Omega)) \cap L_2([0,T]; E) \cap L_{2+\rho}([0,T]; L_{2+\rho}(\Omega))$$

и удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0 \tag{7}$$

(см., например, [3; 4]). В силу произвольности $T > 0$ решение $u(t,\varepsilon)$ можно считать определенным при всех $t \ge 0$.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) автономно. В этом случае задача (1), (2) порождает в пространстве E полугруппу операторов $\{S_t, t \ge 0\}$, сопоставляющих каждому u_0 из условия (7) значение соответствующего решения в момент времени t:

$$S_t : u_0 \to u(t,0).$$

Через $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|$ будем обозначать нормы в пространствах E и $L_2(\Omega)$ соответственно.

Лемма 1. *Пусть $u_0 \in E$, $\|u_0\|_1 \le R$ для некоторого $R > 0$. Пусть $u(t) = u(t,\varepsilon)$ — решение задачи (1), (2) с начальным условием (7), определенное при $t \ge 0$. Тогда*

$$\|u(t)\|_1 \le C_1(R) \quad \forall t \ge 0,$$

где константа $C_1(R)$ зависит от R, но не зависит от u_0 и $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножив уравнение (1) скалярно в $L_2(\Omega)$ на u, с учетом оценки (3) получаем

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \mu_0 \int_\Omega |u|^{2+\rho} dx \le C_2 + \frac{1}{2\gamma}\|g\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|u\|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2\gamma}\|g_1\|^2 + \frac{\varepsilon_0\gamma}{2}\|u\|^2, \qquad (8)$$

где γ — произвольное положительное число. Учитывая, что $g_1(\cdot,t) \in L_\infty([0,+\infty); L_2(\Omega))$, из (8) при достаточно малом $\gamma > 0$ выводим

$$\partial_t \|u\|^2 + \mu \|u\|^2 \le C_3 \quad (\mu > 0).$$

Отсюда легко следует, что

$$\|u(t)\| \le C_4(R) \ \ \forall t \ge 0.$$

Из этой оценки и из (8) вытекает:

$$\int_\tau^{\tau+1} \|\nabla u(t)\|^2 dt \le C_5(R) \quad \forall \tau \ge 0. \qquad (9)$$

После скалярного умножения в $L_2(\Omega)$ уравнения (1) на $-(t-\tau)\Delta u$ и применения оценки (4) получаем

$$\frac{1}{2}\partial_t((t-\tau)\|\nabla u\|^2) - \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 \le C(t-\tau)\|\nabla u\|^2 + C_6(t-\tau) \quad \forall t > \tau \ge 0.$$

Интегрируя это неравенство по t от τ до $\tau+1$, выводим:

$$\|\nabla u(\tau+1)\|^2 \le (2C+1)\int_\tau^{\tau+1} \|\nabla u(t)\|^2 dt + C_6 \quad \forall \tau \ge 0.$$

Отсюда и из (9) следует, что

$$\|u(t)\|_1 \le C_7(R) \quad \forall t \ge 1. \qquad (10)$$

Умножив (1) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $-\Delta u$, получим

$$\frac{1}{2}\partial_t \|\nabla u\|^2 \le C\|\nabla u\|^2 + C_6 \quad \forall t \ge 0.$$

Проинтегрировав это неравенство по t от 0 до τ, где $0 < \tau < 1$, имеем:

$$\|\nabla u(\tau)\|^2 \le \|\nabla u(0)\|^2 + 2C\int_\tau^{\tau+1} \|\nabla u(t)\|^2 dt + 2C_6.$$

Отсюда и из (9) вытекает, что

$$\|u(t)\|_1 \le C_8(R) \quad \forall t,\ 0 \le t \le 1.$$

Вместе с (10) эта оценка дает утверждение леммы 1.

Ниже через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ обозначаем скалярное произведение в пространствах $L_2(\Omega)$ и E соответственно.

Лемма 2. *Пусть* $u_0 \in E$, $u(t) = u(t,\varepsilon)$ *— решение задачи (1), (2) с начальным условием (7), определенное при* $t \ge 0$. *Тогда* $u(t)$ *— непрерывная функция (по* t*) из* $[0,+\infty)$ *в* E.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T > 0$. Умножив уравнение (1) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $\partial_t u$ и проинтегрировав затем получившееся равенство по t от τ до t, $0 \le \tau < t \le T$, выводим

$$\frac{1}{2}(\|\nabla u(t)\|^2 - \|\nabla u(\tau)\|^2) = -\int_\tau^t \|\partial_t u(t)\|^2 dt - \int_\tau^t \langle f(u) + \varepsilon f_1(u,t), \partial_t u\rangle dt - \int_\tau^t \langle g + \varepsilon g_1(t), \partial_t u\rangle dt. \qquad (11)$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \eta\int_\tau^t \|\partial_t u(t)\|^2 dt \le \frac{1}{2}\|\nabla u(\tau)\|^2 + C_9\int_\tau^t (\|f(u)\|^2 + \|f_1(u,t)\|^2)dt + C_{10}(t-\tau) \quad (\eta > 0).$$

С учетом (5), непрерывного вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_{p_0+2}(\Omega)$ и леммы 1 из последнего неравенства получаем

$$\int_0^T \|\partial_t u(t)\|^2 dt \le C_{10}T + C_{11}. \qquad (12)$$

Аналогичным образом из (11) выводится оценка

$$\left| \|\nabla u(t)\|^2 - \|\nabla u(\tau)\|^2 \right| \le C_{12}\int_\tau^t \|\partial_t u(t)\|^2 dt + C_{13}(t-\tau).$$

В силу (12) отсюда вытекает, что

$$\|\nabla u(t)\| \to \|\nabla u(t_0)\| \text{ при } t \to t_0 \quad \forall t_0 \in [0,T]. \tag{13}$$

Заметим, что

$$u(t) \in L_2([0,T],E),\ \partial_t u(t) \in L_2([0,T],L_2(\Omega)). \tag{14}$$

Поскольку вложение $E \subset L_2(\Omega)$ непрерывно, то из (14) следует, что u — непрерывная функция из $[0,T]$ в $L_2(\Omega)$ (см., например, [5, гл. III, лемма 1.2]). Отсюда и из (13) получаем

$$\|u(t)\|_1 \to \|u(t_0)\|_1 \text{ при } t \to t_0 \quad \forall t_0 \in [0,T]. \tag{15}$$

Кроме того, из непрерывности функции $u:[0,T] \to L_2(\Omega)$ и того, что $u(t) \in L_\infty([0,T],E)$ (в силу леммы 1), вытекает, что u — слабонепрерывная функция из $[0,T]$ в E (см. [6, гл. 3, лемма 8.1]). Используя (15) и слабую непрерывность функции $u:[0,T] \to E$, выводим

$$\|u(t)-u(t_0)\|_1^2 = \|u(t)\|_1^2 + \|u(t_0)\|_1^2 - 2\langle u(t),u(t_0)\rangle_1 \to 0 \text{ при } t \to t_0 \quad \forall t_0 \in [0,T].$$

В силу произвольности $T>0$ лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $v_0 \in E$, $\|v_0\|_1 \le R$ для некоторого $R>0$, $v(t)=S_t v_0$ — решение задачи (1), (2) при $\varepsilon=0$ с начальным условием $v|_{t=0}=v_0$, определенное при $t \ge 0$. Пусть $\tau>0$. Тогда*

$$\|v(t)\|_2 \le C_{14}(\tau,R) \quad \forall t \ge \tau$$

($\|\cdot\|_2$ — норма в пространстве $H^2(\Omega)$; константа $C_{14}(\tau,R)$ зависит от τ и R, но не зависит от v_0).

Доказательство. Запишем уравнение для $v(t)$:

$$\partial_t v = \Delta v - f(v) - g(x). \tag{16}$$

Умножим уравнение (16) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $\partial_t v$. В результате простых преобразований получаем

$$\|\partial_t v\|^2 = -\frac{1}{2}\partial_t \|\nabla v\|^2 - \int_\Omega f(v)\partial_t v dx - \int_\Omega g \partial_t v dx. \tag{17}$$

Интегрируя это равенство по t от 0 до t и используя оценку (6) и лемму 1, выводим

$$\frac{1}{2}\|\nabla v(t)\|^2 + \int_0^t \|\partial_t v(t)\|^2 dt \le \frac{1}{2}\|\nabla v(0)\|^2 + \int_\Omega F(v(0))dx + C_{15}(R). \tag{18}$$

Из (5) следует, что

$$|F(u)| \le C_{16}(|u|^{p_0+2}+1).$$

Учитывая эту оценку и непрерывное вложение $H_0^1(\Omega) \subset L_{p_0+2}(\Omega)$, из (18) получаем

$$\int_0^t \|\partial_t v(t)\|^2 dt \le C_{17}(R) \quad \forall t>0. \tag{19}$$

Продифференцировав (16) по t и положив $v_1 = \partial_t v$, имеем

$$\partial_t v_1 = \Delta v_1 - f'(v)v_1.$$

Отсюда, после скалярного умножения в $L_2(\Omega)$ на tv_1 и применения оценки (4), выводим

$$\frac{1}{2}\partial_t(t\|v_1\|^2) - \frac{1}{2}\|v_1\|^2 + t\|\nabla v_1\|^2 \le Ct\|v_1\|^2.$$

Проинтегрировав это неравенство по t от 0 до t, получаем

$$t\|v_1(t)\|^2 \le (2Ct+1)\int_0^t \|v_1(t)\|^2 dt \quad \forall t>0.$$

Отсюда и из (19) вытекает, что

$$\| v_1(t)\|^2 \le (2C+\frac{1}{t})C_{17}(R) \quad \forall t>0.$$

Следовательно,

$$\|\partial_t v(t)\| \le C_{18}(\tau,R) \quad \forall t\ge\tau. \tag{20}$$

В силу (5), леммы 1 и непрерывного вложения $H_0^1(\Omega)\subset L_{2p_0+2}(\Omega)$

$$\| f(v(t))\| \le C_{19}(R) \quad \forall t\ge 0. \tag{21}$$

Поскольку

$$\Delta v = \partial_t v + f(v) + g(x)$$

и справедливы оценки (20) и (21), то

$$\|\Delta v(t)\| \le C_{20}(\tau,R) \quad \forall t\ge\tau.$$

Отсюда и из леммы 1 следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Пусть* $u_0, v_0\in E$, $\|u_0\|_1\le R$, $\|v_0\|_1\le R$ *для некоторого* $R>0$. *Пусть* $u(t)=u(t,\varepsilon)$ *— решение задачи (1), (2) с начальным условием* $u|_{t=0}=u_0$, $v(t)=S_t v_0$ *— решение задачи (1), (2) при* $\varepsilon=0$ *с начальным условием* $v|_{t=0}=v_0$. *Тогда найдутся такие положительные константы* C_0 *и* α, *зависящие от* R *и не зависящие от* u_0, v_0 *и* $\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$, *что*

$$\| u(t,\varepsilon)-v(t-\tau)\|_1 \le C_0 e^{\alpha(t-\tau)}(\| u(\tau,\varepsilon)-v_0\|_1 + |\varepsilon|) \qquad \forall t,\tau\ge 0,\ t\ge\tau,\ \forall\varepsilon,\ |\varepsilon|\le\varepsilon_0. \tag{22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tau\ge 0$, $v_\tau(t)=v(t-\tau)$, $t\ge\tau$. Вычтем из уравнения для $u(t)$ уравнение для $v_\tau(t)$:

$$\partial_t(u-v_\tau)=\Delta(u-v_\tau)-(f(u)-f(v_\tau))-\varepsilon f_1(u,t)-\varepsilon g_1(x,t).$$

Умножив это уравнение скалярно в $L_2(\Omega)$ на $-\Delta(u-v_\tau)$, получаем

$$\frac{1}{2}\partial_t\|\nabla(u-v_\tau)\|^2+\|\Delta(u-v_\tau)\|^2 \le \left|\langle f(u)-f(v_\tau),\Delta(u-v_\tau)\rangle\right| + \left|\langle \varepsilon f_1(u,t)+\varepsilon g_1(t),\Delta(u-v_\tau)\rangle\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\| f(u)-f(v_\tau)\|^2+\varepsilon^2\| f_1(u,t)\|^2+\varepsilon^2\| g_1(t)\|^2+\|\Delta(u-v_\tau)\|^2.$$

Отсюда, используя (5) и учитывая непрерывное вложение $H_0^1(\Omega)\subset L_{2p_0+2}(\Omega)$, лемму 1 и то, что $g_1(t)\in L_\infty([0,+\infty);L_2(\Omega))$, выводим:

$$\partial_t\|\nabla(u-v_\tau)\|^2 \le \varepsilon^2 C_{21}(R)+C_{22}(R)\|\nabla(u-v_\tau)\|^2.$$

Из этого неравенства следует утверждение леммы 4.

П р е д л о ж е н и е 1. $S_t v$ непрерывно по $(t,v)\in[0,+\infty)\times E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_0, v_0\in E$; $u(t)=S_t u_0$, $v(t)=S_t v_0$ — решения задачи (1), (2) при $\varepsilon=0$ с начальными условиями $u|_{t=0}=u_0$ и $v|_{t=0}=v_0$ соответственно. Тогда из (22) (при $\varepsilon=0$ и $\tau=0$) следует

$$\| u(t)-v(t)\|_1 \le C_0 e^{\alpha t}\| u_0-v_0\|_1 \quad \forall t\ge 0.$$

Отсюда вытекает равномерная по $t\in[0,T]$, $T>0$, непрерывность $S_t v$ по $v\in E$. Из непрерывности $S_t v$ по t (лемма 2 с $\varepsilon=0$) и равномерной по t непрерывности $S_t v$ по v следует непрерывность $S_t v$ по $(t,v)\in[0,T]\times E$. Ввиду произвольности $T>0$ отсюда получаем утверждение предложения 1.

Определение 1. *Точка* $z\in E$ *называется стационарной точкой полугруппы* $\{S_t\}$, *если* $S_t z=z$ $\forall t\ge 0$.

Определение 2. *Непрерывный функционал* $\Phi: E\to\mathbf{R}$ *называется функцией Ляпунова полугруппы* $\{S_t\}$, *если для любого* $v_0\in E$ *функция* $\Phi(S_t v_0)$ *не возрастает по* t, *причем из равенства* $\Phi(v_0)=\Phi(S_t v_0)$ *при некотором* $t>0$ *следует, что* $v_0=z$ *— стационарная точка полугруппы* $\{S_t\}$.

Легко проверить, что функционал

$$\Phi(v)=\int_\Omega(\frac{1}{2}|\nabla v|^2+F(v)+g\,v)dx \tag{23}$$

является функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$. Действительно, после интегрирования равенства (17) по t от 0 до t получим

$$\Phi(v(t))-\Phi(v(0))=-\int_0^t \|\partial_t v(t)\|^2 dt\,, \tag{24}$$

откуда видно, что $\Phi(S_t v_0)$ не возрастает по t. При этом, если $\Phi(S_t v_0)=\Phi(v_0)$ при некотором $t>0$, то из (24) вытекает, что $\partial_t v(\tau)=0$ при $\tau\in[0,t]$; следовательно, $v(\tau)=v_0$ для любого $\tau\in[0,t]$, и значит, $v_0=z$ — стационарная точка полугруппы $\{S_t\}$.

Из (5) следует, что

$$|F(u)-F(v)|\le C_{23}|u-v|(1+|u|^{p_0+1}+|v|^{p_0+1}).$$

Воспользовавшись этой оценкой и тем, что $H_0^1(\Omega)\subset L_{2p_0+2}(\Omega)$, выводим

$$\int_\Omega |F(u)-F(v)|dx\le C_{24}\|u-v\|(1+\|u\|_1^{p_0+1}+\|v\|_1^{p_0+1})$$

для любых $u,v\in E$. В силу последнего неравенства непрерывность функционала (23) на E очевидна. Таким образом, функционал $\Phi(v)$ удовлетворяет всем условиям определения 2.

Ниже через $U_\varepsilon(B)$ будем обозначать совокупность всех решений задачи (1), (2) с начальными условиями из множества $B\subset E$; через $\Re$ — множество всех стационарных точек полугруппы $\{S_t\}$.

Лемма 5. *Пусть $O_\delta(\Re)$ — δ-окрестность множества $\Re$, B — ограниченное в E множество. Тогда существуют такие положительные числа ε' и T_0 (зависящие от B и от δ), что для любого $u(\cdot,\varepsilon)\in U_\varepsilon(B)$, где $|\varepsilon|\le\varepsilon'$, и любого $\tau\ge 0$ найдется $t_0\in[\tau,\tau+T_0]$ такое, что $u(t_0,\varepsilon)\in O_\delta(\Re)$.*

Доказательство. В силу леммы 1 найдется такое ограниченное в E множество B_1, что $u(t,\varepsilon)\in B_1$ при $t\ge 0$ для любого $u(\cdot,\varepsilon)\in U_\varepsilon(B)$, где $|\varepsilon|\le\varepsilon_0$.

Рассмотрим полугруппу операторов $\{S_t\}$, порожденную в пространстве E задачей (1), (2) при $\varepsilon=0$. Как показано выше, полугруппа $\{S_t\}$ обладает функцией Ляпунова, заданной формулой (23). Из предложения 1 следует, что $S_t v$ непрерывно по v. Кроме того, в силу леммы 3 для любого $v_0\in E$ множество $\bigcup_{t\ge 1} S_t v_0$ ограничено в $H_2(\Omega)$, и следовательно (с учетом компактности вложения $H_2(\Omega)$ в $H_1(\Omega)$), предкомпактно в E. Из леммы 3 вытекает также, что множество $B_0=S_1B_1$ компактно.

Установленные свойства полугруппы $\{S_t\}$ и компактность множества B_0 обеспечивают выполнение условий леммы, доказанной в [3], согласно которой существует такое $T_1>0$, что для любого $v_0\in B_0$ найдется $\tau_0\in[0,T_1]$ такое, что $S_{\tau_0}v_0\in O_{\delta/2}(\Re)$.

Пусть $\tau\ge 0$, $u(\cdot,\varepsilon)\in U_\varepsilon(B)$, $|\varepsilon|\le\varepsilon_0$. Положим $T_0=T_1+1$. Из леммы 4 следует, что

$$\|u(t,\varepsilon)-S_{t-\tau}u(\tau,\varepsilon)\|_1\le C_0e^{\alpha T_0}|\varepsilon| \qquad \forall t\in[\tau,\tau+T_0]$$

(C_0 и α зависят от B, но не зависят от $\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ и $u(\cdot,\varepsilon)\in U_\varepsilon(B)$). Выберем $\varepsilon'>0$ так, чтобы при $|\varepsilon|\le\varepsilon'$ для любого $t\in[\tau,\tau+T_0]$ выполнялось неравенство

$$\|u(t,\varepsilon)-S_{t-\tau}u(\tau,\varepsilon)\|_1<\frac{\delta}{2}. \tag{25}$$

Так как $u(\tau,\varepsilon)\in B_1$, то $S_1u(\tau,\varepsilon)\in B_0$, и значит, найдется такое $\tau_0\in[0,T_1]$, что

$$S_{\tau_0+1}u(\tau,\varepsilon)=S_{\tau_0}S_1u(\tau,\varepsilon)\in O_{\delta/2}(\Re). \tag{26}$$

Положим $t_0=\tau+\tau_0+1$. Поскольку $t_0\in[\tau,\tau+T_0]$, то из (25) выводим

$$\|u(t_0,\varepsilon)-S_{\tau_0+1}u(\tau,\varepsilon)\|_1<\frac{\delta}{2}.$$

Отсюда и из (26) следует, что $u(t_0,\varepsilon)\in O_\delta(\Re)$, где $|\varepsilon|\le\varepsilon'$. Лемма 5 доказана.

Определение 3. *Стационарная точка* z *называется гиперболической, если выполнены следующие условия:*

1) *существует окрестность* $O \subset E$ *точки* z, *в которой операторы* S_t *дифференцируемы, причем дифференциал Фреше* $S_t'(u)$ *удовлетворяет по* u *условию Гёльдера с показателем* γ, $0 < \gamma \le 1$:

$$\| S_t'(u_1)v - S_t'(u_2)v \|_1 \le C \| v \|_1 \| u_1 - u_2 \|_1^{\gamma} \quad \forall u_1, u_2 \in O,\ \forall v \in E;$$

2) *спектр оператора* $S_t'(z)$ *при* $t > 0$ *не содержит точек единичной окружности* $\{\xi \in \mathbf{C} : |\xi| = 1\}$, *причем вне этой окружности находится конечное число точек спектра;*

3) *инвариантное подпространство* $E_+(z)$ *оператора* $S_t'(z)$, *соответствующее точкам спектра* $S_t'(z)$, *лежащим вне единичной окружности, а также дополнительное к нему инвариантное подпространство* $E_-(z)$, *соответствующее точкам спектра* $S_t'(z)$, *лежащим внутри этой окружности, не зависят от* t.

Рассмотрим оператор

$$Av \equiv \Delta v - f(v), \tag{27}$$

заданный на $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ и принимающий значения в $L_2(\Omega)$.

Определение 4. *Функция* $g(x) \in L_2(\Omega)$ *называется регулярным значением оператора* A, *если для любого решения* $z = z(x)$ *уравнения* $Av = g$ *оператор* $A'(z)$, *определенный формулой* $A'(z)v = \Delta v - f'(z)v$, *обратим.*

З а м е ч а н и е 1. Известно (см. [7]), что множество всех регулярных значений оператора A всюду плотно и открыто в $L_2(\Omega)$; кроме того, если $g(x)$ — регулярное значение оператора A, то полугруппа $\{S_t\}$ имеет конечное число стационарных точек и все они гиперболические.

Лемма 6. *Пусть множество* $\mathfrak{R}$ *стационарных точек полугруппы* $\{S_t\}$ *конечно,* $\mathfrak{R} = \{z_1, \ldots, z_N\}$, *причем точки* $z_j \in \mathfrak{R}$ *занумерованы так, что* $\Phi(z_1) \le \ldots \le \Phi(z_N)$. *Пусть все стационарные точки* z_j *— гиперболические. Пусть* B *— ограниченное в* E *множество. Тогда существуют такие* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $\delta > 0$, *что любое* $u(\cdot, \varepsilon) \in U_\varepsilon(B)$, *где* $|\varepsilon| \le \varepsilon_2$, *обладает следующим свойством:*

если $u(s, \varepsilon) \in O_\delta(z_i)$, $u(\tau, \varepsilon) \in O_\delta(z_j)$, *где* $\tau \ge s$, *то* $j \le i$

($O_\delta(z_i)$, $O_\delta(z_j)$ *—* δ*-окрестности точек* z_i *и* z_j*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как было отмечено выше (см. доказательство леммы 5), для любого $v_0 \in E$ множество $\bigcup_{t \ge 1} S_t v_0$ предкомпактно в E. Кроме того, $S_t v$ непрерывно по $(t, v) \in [0, +\infty) \times E$ (предложение 1). Из этих свойств полугруппы $\{S_t\}$ и условия леммы 6 вытекает, что выполнены все условия леммы, доказанной в [2], согласно которой утверждение, аналогичное утверждению леммы 6, справедливо для совокупности всех решений задачи (1), (2) при $\varepsilon = 0$. Таким образом, существует такое $\delta_1 > 0$, что для любого $v_0 \in E$ решение $v(t) = S_t v_0$ задачи (1), (2) при $\varepsilon = 0$ обладает следующим свойством:

$$\text{если } v(s) \in O_{\delta_1}(z_i),\ v(\tau) \in O_{\delta_1}(z_j), \text{ где } \tau \ge s, \text{ то } j \le i. \tag{28}$$

Пусть $\delta = \delta_1/2$. Покажем, что утверждение леммы 6 выполняется при выбранном δ. Предположим противное. Тогда найдутся последовательности

$$\varepsilon_k \to 0, \quad u_k(\cdot, \varepsilon_k) \in U_\varepsilon(B), \quad s_k, \tau_k \in [0, +\infty), \quad j_k, i_k \in \{1, \ldots, N\},$$

такие, что

$$u_k(\tau_k, \varepsilon_k) \in O_\delta(z_{j_k}), \quad u_k(s_k, \varepsilon_k) \in O_\delta(z_{i_k}), \quad \tau_k \ge s_k, \quad j_k > i_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

Ввиду леммы 5 существуют такие $\varepsilon' > 0$ и $T_0 > 0$, что для любого $u(\cdot, \varepsilon) \in U_\varepsilon(B)$, где $|\varepsilon| \le \varepsilon'$, и любого $\tau \ge 0$ найдется $t_0 \in [\tau, \tau + T_0]$ такое, что $u(t_0, \varepsilon) \in O_\delta(\mathfrak{R})$. Поскольку $\varepsilon_k \to 0$, то будем сразу полагать, что $|\varepsilon_k| < \varepsilon'$ для всех k.

Покажем, что в (29) можно считать, что $\tau_k - s_k \le 2T_0$. Для произвольного фиксированного k возьмем такое $m \in \mathbf{N}$, чтобы выполнялось неравенство

$$s_k + (m-1)T_0 \le \tau_k \le s_k + mT_0.$$

Из вышесказанного следует, что для каждого $r \in \{1,\ldots,m\}$ найдутся t_r и $z_{\alpha_r} \in \mathfrak{R}$ $(\alpha_r \in \{1,\ldots,N\})$ такие, что

$$s_k + (r-1)T_0 \le t_r \le s_k + rT_0, \quad u_k(t_r,\varepsilon_k) \in O_\delta(z_{\alpha_r}),$$

при этом можно взять $t_1 = s_k$, $t_m = \tau_k$, $z_{\alpha_1} = z_{i_k}$, $z_{\alpha_m} = z_{j_k}$. Из того, что $\alpha_1 = i_k < j_k = \alpha_m$, вытекает существование такого $l \in \{1,\ldots,m-1\}$, что $\alpha_l < \alpha_{l+1}$. Следовательно, имеем

$$u_k(t_{l+1},\varepsilon_k) \in O_\delta(z_{\alpha_{l+1}}), \quad u_k(t_{l+1},\varepsilon_k) \in O_\delta(z_{\alpha_{l+1}}), \quad t_l \le t_{l+1} \le t_l + 2T_0, \quad \alpha_{l+1} > \alpha_l.$$

Заменив τ_k и s_k соответственно на t_{l+1} и t_l, приходим к выводу, что в (29) можно считать $\tau_k - s_k \le 2T_0$.

Поскольку последовательность $\{(j_k,i_k)\}$, где $j_k, i_k \in \{1,\ldots,N\}$, принимает некоторое значение (j,i) бесконечное число раз, то, перейдя к подпоследовательности, можно положить в (29) $j_k = j$, $i_k = i$ для каждого k $(j > i)$.

Пусть $v_k(t)$ — решение задачи (1), (2) при $\varepsilon = 0$ с начальным условием $v|_{t=0} = u_k(s_k,\varepsilon_k)$, т.е. $v_k(t) = S_t u_k(s_k,\varepsilon_k)$. Заметим, что

$$v_k(0) = u_k(s_k,\varepsilon_k) \in O_\delta(z_i) \subset O_{\delta_1}(z_i).$$

Используя лемму 1, получаем оценку

$$\| v_k(\tau_k - s_k) - z_j \|_1 \le \| u_k(\tau_k,\varepsilon_k) - v_k(\tau_k - s_k) \|_1 + \| u_k(\tau_k,\varepsilon_k) - z_j \|_1 \le C_0 e^{2\alpha T_0} |\varepsilon_k| + \delta.$$

Отсюда следует, что при достаточно малом $|\varepsilon_k|$

$$\| v_k(\tau_k - s_k) - z_j \|_1 < 2\delta = \delta_1,$$

т.е. $v_k(\tau_k - s_k) \in O_{\delta_1}(z_j)$. Так как $j > i$ и $\tau_k - s_k \ge 0$, то делаем вывод, что $v_k(t)$, где k достаточно большое, не обладает свойством (28). Полученное противоречие доказывает лемму 6.

Пусть z — стационарная точка полугруппы $\{S_t\}$. Обозначим через $M^{\text{н}}(z)$ совокупность всех $v_0 \in E$, для которых траектория $S_t v_0$ продолжаема для всех $t < 0$, причем $S_t v_0 \to z$ в E при $t \to -\infty$. Другими словами, v_0 принадлежит множеству $M^{\text{н}}(z)$, если существует такая функция $v : (-\infty, 0] \to E$, что $v(0) = v_0$, $v(s) \to z$ при $s \to -\infty$ и $S_t v(s) = v(s+t)$, если $t \ge 0$, $s + t \le 0$. При этом $S_t v_0$ при $t < 0$ определяется равенством $S_t v_0 = v(t)$.

Замечание 2. Если z — стационарная гиперболическая точка полугруппы $\{S_t\}$, то множество $M^{\text{н}}(z)$ является конечномерным гладким многообразием в E, причем размерность этого многообразия равна размерности инвариантного подпространства $E_+(z)$ оператора $S_t'(z)$, соответствующего части спектра этого оператора, лежащей вне единичной окружности $\{\xi \in \mathbf{C} : |\xi| = 1\}$ (см., например, [3]).

Определение 5. *Пусть множество $\mathfrak{R}$ стационарных точек полугруппы $\{S_t\}$ конечно: $\mathfrak{R} = \{z_1,\ldots,z_N\}$, причем все стационарные точки z_j — гиперболические. Пусть $B \subset E$. Семейством составных предельных траекторий, соответствующих $U_\varepsilon(B)$, называется совокупность кусочно-непрерывных по t траекторий $\tilde{u}(t,\varepsilon)$ полугруппы $\{S_t\}$ таких, что:*

1) *$\tilde{u}(t,\varepsilon)$ непрерывна в E по t за исключением точек разрыва $T_1,\ldots,T_m$, $T_1 < T_2 < \ldots < T_m$, $m \le N$ (m и T_i зависят от $\tilde{u}(\cdot,\varepsilon)$);*

2) *значения $\tilde{u}(T_i - 0,\varepsilon)$ и $\tilde{u}(T_i + 0,\varepsilon)$ лежат в некоторой малой δ-окрестности $O_\delta(\mathfrak{R})$ множества $\mathfrak{R}$, причем оба принадлежат δ-окрестности одной и той же стационарной точки (δ не зависит от i);*

3) *в δ-окрестности каждой стационарной точки могут лежать значения $\tilde{u}(T_i \pm 0,\varepsilon)$ не более чем в одной точке разрыва T_i, при этом, если $\tilde{u}(T_i+0,\varepsilon)\in O_\delta(z_{k_i})$ $(k_i \in \{1,\ldots,N\})$, то*

$$\tilde{u}(T_i+0,\varepsilon)\in M^{\text{н}}(z_{k_i}),\ \tilde{u}(t,\varepsilon)=S_{t-T_i}\tilde{u}(T_i+0,\varepsilon) \text{ при } T_i \le t < T_{i+1}\ (T_{m+1}=+\infty);$$

4) $\tilde{u}(0,\varepsilon)=u(0,\varepsilon)$ *для некоторого* $u(\cdot,\varepsilon)\in U_\varepsilon(B)$.

З а м е ч а н и е 3. Очевидно, что на интервале (T_i,T_{i+1}) $\tilde{u}(t,\varepsilon)$ принадлежит множеству $M^{\text{н}}(z_{k_i})$.

В [3] изучалось асимптотическое поведение при всех $t\ge 0$ решений автономных эволюционных уравнений, зависящих от параметра, вида

$$\partial_t u = A(u,\varepsilon), \quad |\varepsilon|\le \varepsilon_0; \tag{30}$$

при определенных условиях доказана теорема о стабилизации при $t\to+\infty$ главного члена асимптотики траекторий полугруппы $\{S_t(\varepsilon)\}$, соответствующей (30) (см. [3, с. 246–253, теорема 1]). Доказанные выше леммы 1–6 позволяют перенести доказательство этой теоремы на наш неавтономный случай: соответствующая теорема для задачи (1), (2) доказывается совершенно аналогично, при этом следует заменить траектории полугруппы $\{S_t(\varepsilon)\}$ на решения $u(t,\varepsilon)$ задачи (1), (2). Таким образом, в нашем случае справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $g(x)$ — регулярное значение оператора A, определенного равенством (27). Пусть B — ограниченное в E множество. Тогда найдутся такие малые числа $\varepsilon_1>0$ и $q>0$ и достаточно большое число C_0, что при $|\varepsilon|\le\varepsilon_1$ для любого $u(\cdot,\varepsilon)\in U_\varepsilon(B)$ существует составная предельная траектория $\tilde{u}(t,\varepsilon)$, для которой*

$$\sup_{t\ge 0}\| u(t,\varepsilon)-\tilde{u}(t,\varepsilon)\|_1 \le C_0|\varepsilon|^q.$$

Итак, для рассмотренного неавтономного параболического уравнения, зависящего от малого параметра ε, установлен факт глобальной по t аппроксимации его решений кусочно-непрерывными функциями, состоящими из конечного числа кусков траекторий автономного уравнения, которое соответствует случаю $\varepsilon=0$. Все эти куски, кроме первого, лежат на конечномерных гладких многообразиях.

Заключение. Изложенный подход к изучению асимптотики решений можно применить и к другим классам неавтономных эволюционных уравнений, зависящих от малого параметра.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Babin, A.V. Uniform finite-parameter asymptotics of solutions of nonlinear evolutionary equations / A.V. Babin, M.I. Vishik // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1989. — Vol. 68, № 4. — P. 399–455.
2. Бабин, А.В. Спектральное и стабилизированное асимптотическое поведение решений нелинейных эволюционных уравнений / А.В. Бабин, М.И. Вишик // Успехи математических наук. — 1988. — Т. 43, вып. 5(263). — С. 99–132.
3. Бабин, А.В. Аттракторы эволюционных уравнений / А.В. Бабин, М.И. Вишик. — М.: Наука, 1989. — 294 с.
4. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 588 с.
5. Темам, Р. Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
6. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Е. Мадженес. — М.: Наука, 1971. — 371 с.
7. Babin, A.V. Regular attractors of semigroups and evolution equations / A.V. Babin, M.I. Vishik // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1983. — Vol. 62, № 4. — P. 441–491.

R E F E R E N C E S

1. Babin, A.V. Uniform finite-parameter asymptotics of solutions of nonlinear evolutionary equations / A.V. Babin, M.I. Vishik // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1989. — Vol. 68, № 4. — P. 399–455.
2. Babin A.V., Vishik M.I. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances of Mathematical Sciences], 1988, 43 (5(263)), pp. 99–132.
3. Babin A.V., Vishik M.I. *Attraktory evoliutsionnykh uravneni* [Evolution Equation Attractors], M.: Nauka, 1989, 294 p.
4. Lions J.-L. *Nekotoriye metody resheniya nelineinykh krayevykh zadach* [Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems], M.: Mir, 1972, 588 p.
5. Temam R. *Uravneniye Navye — Stoksa. Teoriya i chislenny analiz* [Navier — Stokes Equation. Theory and Numerical Analysis], M.: Mir, 1981, 408 p.
6. Lions J.-L., Majenes E. *Neodnorodniye granichniye zadachi i ikh prilozheniya* [Inhomogeneous Boundary Value Problems and their Applications], M.: Nauka, 1971, 371 p.
7. Babin, A.V. Regular attractors of semigroups and evolution equations / A.V. Babin, M.I. Vishik // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1983. — Vol. 62, № 4. — P. 441–491.

Поступила в редакцию 24.11.2025

Адрес для корреспонденции: e-mail: sirius722@rambler.ru — Бородич С.М.