УДК 512.548

Критерии полуинвариантности *n*-арной подгруппы в *n*-арной группе

А.М. Гальмак, В.К. Лапковский
Учреждение образования «Могилевский государственный университет продовольствия»

Согласно Дернте [1], *n*-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ *n*-арной группы $< A, [\ ] >$, удовлетворяющая условию:

Адрес для корреспонденции: 212027, г. Могилев, пр-т Шмидта, 3, УО «МГУП», e-mail: mti@mogilev.by – Гальмак А.М.

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x]$$

для любого $x \in A$, называется полуинвариантной в $< A, [\,] >$. Другие эквивалентные определения полуинвариантности есть у Поста [2], а также в [3–5]. В данной работе приведены новые критерии полуинвариантности n-арной подгруппы в n-арной группе. Нам понадобятся три леммы.

Лемма 1 [6]. *Подгруппа N группы G инвариантна в G тогда и только тогда, когда для любых a, b $\in$ G, удовлетворяющих условию ab $\in$ N, выполняется условие $a^2b^2 \in N$.*

Необходимое условие из леммы 1 является частным случаем следующего более общего утверждения.

Лемма 2 [6]. *Пусть N – инвариантная подгруппа группы G, a, b $\in$ G, ab $\in$ N. Тогда $a^mb^m \in N$, $b^ma^m \in N$ для любого целого m.*

В работе для всякой n-арной группы $< A, [\,] >$ через θ_A обозначается введенное Постом [2] отношение эквивалентности, определенное на свободной полугруппе F_A по правилу: $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности γ и δ такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. Для всякой n-арной группы $< A, [\,] >$ Пост определил универсальную обертывающую группу $A^* = F_A/\theta_A$ и выделил в ней нормальную подгруппу

$$A_{\text{o}} = \{\theta_A(a_1 \ldots a_{n-1}) \mid a_1, \ldots, a_{n-1} \in A\},$$

которая называется соответствующей для $< A, [\,] >$.

Для всякого подмножества B n-арной группы $<$ A, $[\,] >$ полагают [4]

$$B_{\text{o}}(A) = B^{(n-1)}(A) = \{\theta_A(\alpha) \in A_{\text{o}} \mid \exists\, b_1, \ldots, b_{n-1} \in B,\ \alpha\theta_A b_1 \ldots b_{n-1}\}.$$

Ясно, что $B_{\text{o}}(A) \subseteq A_{\text{o}}$, в частности $A_{\text{o}}(A) = A_{\text{o}}$.

Если $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, то $B_{\text{o}}(A)$ – подгруппа группы A_{o}, изоморфная группе B_{o} [4].

Лемма 3 [5, с. 202]**.** *n-Арная подгруппа $< B, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ полуинвариантна в ней тогда и только тогда, когда подгруппа $B_o(A)$ инвариантна в группе A_o.*

Теорема 1. *Пусть $< B, [\,] >$ – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, пусть также*

$$[x_1 \ldots x_{n-1}y_1 \ldots y_{n-1}c] \in B \tag{1}$$

для некоторых $x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$, $c \in B$. Тогда для любого натурального $m \geq 1$ и любого $b \in B$ верно:

1) $[\underbrace{x_1 \ldots x_{n-1} \ldots x_1 \ldots x_{n-1}}_{m}\underbrace{y_1 \ldots y_{n-1} \ldots y_1 \ldots y_{n-1}}_{m} b] \in B,$

$$[\underbrace{y_1 \ldots y_{n-1} \ldots y_1 \ldots y_{n-1}}_{m}\underbrace{x_1 \ldots x_{n-1} \ldots x_1 \ldots x_{n-1}}_{m} b] \in B;$$

2) $[\underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{m}\ \underbrace{\delta \ldots \delta}_{m} b] \in B$, $[\underbrace{\delta \ldots \delta}_{m}\ \underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{m} b] \in B$,

где γ и δ – обратные последовательности для $x_1 \ldots x_{n-1}$ и $y_1 \ldots y_{n-1}$ соответственно.

Доказательство. Так как $< B, [\,] >$ полуинвариантна в $< A, [\,] >$, то по лемме 3 подгруппа $B_{\text{o}}(A)$ инвариантна в группе A_{o}. А так как $c \in B$, то из (1) следует

$$\theta_A(x_1 \ldots x_{n-1}y_1 \ldots y_{n-1}) \in B_{\text{o}}(A),$$

откуда

$$\theta_A(x_1 \ldots x_{n-1})\theta_A(y_1 \ldots y_{n-1}) \in B_{\text{o}}(A). \tag{2}$$

1) Из (2), используя лемму 2, получаем

$$\underbrace{\theta_A(x_1 \ldots x_{n-1}) \ldots \theta_A(x_1 \ldots x_{n-1})}_{m}\ \underbrace{\theta_A(y_1 \ldots y_{n-1}) \ldots \theta_A(y_1 \ldots y_{n-1})}_{m} \in B_{\text{o}}(A),$$

$$\underbrace{\theta_A(y_1\ldots y_{n-1})\ldots\theta_A(y_1\ldots y_{n-1})}_{m}\ \underbrace{\theta_A(x_1\ldots x_{n-1})\ldots\theta_A(x_1\ldots x_{n-1})}_{m} \in B_o(A),$$

откуда

$$\theta_A(\underbrace{x_1\ldots x_{n-1}\ldots x_1\ldots x_{n-1}}_{m}\ \underbrace{y_1\ldots y_{n-1}\ldots y_1\ldots y_{n-1}}_{m}) \in B_o(A),$$

$$\theta_A(\underbrace{y_1\ldots y_{n-1}\ldots y_1\ldots y_{n-1}}_{m}\ \underbrace{x_1\ldots x_{n-1}\ldots x_1\ldots x_{n-1}}_{m}) \in B_o(A).$$

Далее

$$\theta_A(\underbrace{x_1\ldots x_{n-1}\ldots x_1\ldots x_{n-1}}_{m}\ \underbrace{y_1\ldots y_{n-1}\ldots y_1\ldots y_{n-1}}_{m})\theta_A(b) \in B_o(A)\theta_A(b),$$

$$\theta_A(\underbrace{y_1\ldots y_{n-1}\ldots y_1\ldots y_{n-1}}_{m}\ \underbrace{x_1\ldots x_{n-1}\ldots x_1\ldots x_{n-1}}_{m})\theta_A(b) \in B_o(A)\theta_A(b),$$

откуда $\theta_A([\underbrace{x_1\ldots x_{n-1}\ldots x_1\ldots x_{n-1}}_{m}\ \underbrace{y_1\ldots y_{n-1}\ldots y_1\ldots y_{n-1}}_{m}\ b]) = \theta_A([c_1\ldots c_{n-1}b]) \in B,$

$$\theta_A([\underbrace{y_1\ldots y_{n-1}\ldots y_1\ldots y_{n-1}}_{m}\ \underbrace{x_1\ldots x_{n-1}\ldots x_1\ldots x_{n-1}}_{m}\ b]) = \theta_A([d_1\ldots d_{n-1}b]) \in B$$

для некоторых $c_1, \ldots, c_{n-1}, d_1, \ldots, d_{n-1} \in B$. Следовательно, верно 1).

2) Положим $k = -m$, где $m \geq 1$. Тогда по лемме 2

$$(\theta_A(x_1 \ldots x_{n-1}))^k(\theta_A(y_1 \ldots y_{n-1}))^k \in B_o(A),$$

то есть $((\theta_A(x_1 \ldots x_{n-1}))^{-1})^m((\theta_A(y_1 \ldots y_{n-1}))^{-1})^m \in B_o(A),$

откуда

$$(\theta_A(\gamma))^m(\theta_A(\delta))^m \in B_o(A),\ \theta_A(\underbrace{\gamma\ldots\gamma}_{m}\ \underbrace{\delta\ldots\delta}_{m}) \in B_o(A).$$

Аналогично доказывается соотношение $\theta_A(\underbrace{\delta\ldots\delta}_{m}\ \underbrace{\gamma\ldots\gamma}_{m}) \in B_o(A)$. Из последних двух соотношений следует 2). Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $<B, [\,]>$ – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $<A, [\,]>$, пусть также $[\underbrace{x\ldots x}_{n-1}\ \underbrace{y\ldots y}_{n-1}\ c] \in B$ для некоторых $x, y \in A$, $c \in B$. Тогда для любого натурального $m \geq 1$ и любого $b \in B$ верно:*

1) $[\underbrace{x\ldots x}_{m(n-1)}\ \underbrace{y\ldots y}_{m(n-1)}\ b] \in B$, $[\underbrace{y\ldots y}_{m(n-1)}\ \underbrace{x\ldots x}_{m(n-1)}\ b] \in B$,

2) $[\underbrace{\gamma\ldots\gamma}_{m}\ \underbrace{\delta\ldots\delta}_{m}\ b] \in B$, $[\underbrace{\delta\ldots\delta}_{m}\ \underbrace{\gamma\ldots\gamma}_{m}\ b] \in B$,

где γ и δ – обратные последовательности для $\underbrace{x\ldots x}_{n-1}$ и $\underbrace{y\ldots y}_{n-1}$ соответственно. В частности, при $n \geq 3$ $\gamma = \bar{x}\ \bar{x}\ \underbrace{x\ldots x}_{n-3}$, $\delta = \bar{y}\ \bar{y}\ \underbrace{y\ldots y}_{n-3}$.

Полагая в следствии 1 $m = 2$, получим

Следствие 2. *Пусть $<B, [\,]>$ – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $<A, [\,]>$, пусть также $[\underbrace{x\ldots x}_{n-1}\ \underbrace{y\ldots y}_{n-1}\ c] \in B$ для некоторых $x, y \in A$, $c \in B$. Тогда для любого $b \in B$ верно*

$$[\underbrace{x\ldots x}_{2(n-1)}\ \underbrace{y\ldots y}_{2(n-1)}\ b] \in B,\ [\underbrace{y\ldots y}_{2(n-1)}\ \underbrace{x\ldots x}_{2(n-1)}\ b] \in B.$$

Полагая в следствии 1 $n = 3$, получим

Следствие 3. *Пусть < B, [ ] > – полуинвариантная тернарная подгруппа тернарной группы < A, [ ] >, пусть также [xxyyc] $\in$ B для некоторых x, y $\in$ A, c $\in$ B. Тогда для любого натурального $m \geq 1$ и любого b $\in$ B верно:*

1) $[\underbrace{x\ldots x}_{2m}\underbrace{y\ldots y}_{2m}b] \in B$, $[\underbrace{y\ldots y}_{2m}\underbrace{x\ldots x}_{2m}b] \in B$,

2) $[\underbrace{\bar{x}\ldots\bar{x}}_{2m}\underbrace{\bar{y}\ldots\bar{y}}_{2m}b] \in B$, $[\underbrace{\bar{y}\ldots\bar{y}}_{2m}\underbrace{\bar{x}\ldots\bar{x}}_{2m}b] \in B$.

Теорема 2. *Для n-арной подгруппы < B, [ ] > n-арной группы < A, [ ] > следующие утверждения эквивалентны:*

1) < B, [ ] > полуинвариантна в < A, [ ] >;

2) для любых $\theta_A(\alpha)$, $\theta_A(\beta) \in A_o$, удовлетворяющих условию

$$\theta_A(\alpha)\theta_A(\beta) \in B_o(A), \tag{3}$$

выполняется условие

$$(\theta_A(\alpha))^2(\theta_A(\beta))^2 \in B_o(A); \tag{4}$$

3) для любых $x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$, удовлетворяющих условию

$$\theta_A(x_1 \ldots x_{n-1}y_1 \ldots y_{n-1}) \in B_o(A), \tag{5}$$

выполняется условие

$$\theta_A(x_1 \ldots x_{n-1}x_1 \ldots x_{n-1}y_1 \ldots y_{n-1}y_1 \ldots y_{n-1}) \in B_o(A); \tag{6}$$

4) для любых $x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$, удовлетворяющих условию

$$[x_1 \ldots x_{n-1}y_1 \ldots y_{n-1}b] \in B \tag{7}$$

для некоторого b $\in$ B, выполняется условие

$$[x_1 \ldots x_{n-1}x_1 \ldots x_{n-1}y_1 \ldots y_{n-1}y_1 \ldots y_{n-1}b] \in B. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) $\Rightarrow$ 2) Из полуинвариантности < *B*, [ ] > в < *A*, [ ] >, ввиду леммы 3, следует инвариантность $B_o(A)$ в A_o. Поэтому, если выполняется (3), то, согласно лемме 1, выполняется (4).

2) $\Rightarrow$ 3) Если верно (5), то верно (3), где $\alpha = x_1 \ldots x_{n-1}$, $\beta = y_1 \ldots y_{n-1}$. Тогда, ввиду 2), верно (4), откуда следует (6).

3) $\Rightarrow$ 4) Если верно (7), то верно (5). Тогда, ввиду 3), верно (6), откуда следует (8).

4) $\Rightarrow$ 2) Если верно (3), где $\alpha = x_1 \ldots x_{n-1}$, $\beta = y_1 \ldots y_{n-1}$, то верно (7) для любого $b \in B$. Тогда, ввиду 4), верно (8), откуда следует (4).

2) $\Rightarrow$ 1) Так как из (3) следует (4), то по лемме 1 $B_o(A)$ инвариантна в A_o. Тогда по лемме 3 < *B*, [ ] > полуинвариантна в < *A*, [ ] >. Теорема доказана.

Согласно следствию 2, если < *B*, [ ] > – полуинвариантная *n*-арная подгруппа *n*-арной группы < *A*, [ ] >, то из условия

$$[\underbrace{x\ldots x}_{n-1}\underbrace{y\ldots y}_{n-1}c] \in B \tag{9}$$

для некоторых $x, y \in A$, $c \in B$ вытекает

$$[\underbrace{x\ldots x}_{2(n-1)}\underbrace{y\ldots y}_{2(n-1)}b] \in B \tag{10}$$

для любого $b \in B$. Покажем, что обратное утверждение неверно, то есть *n*-арная подгруппа < *B*, [ ] > *n*-арной группы < *A*, [ ] >, может не быть полуинвариантной в ней, хотя из (9) всегда следует (10).

Пример. Пусть < *A*, [ ] > – *n*-арная группа, производная от конечной простой группы *A* порядка *n* – 1. Легко проверяется, что в < *A*, [ ] > все элементы являются идемпотентами. Если *B* – подгруппа группы *A*, то < *B*, [ ] > – *n*-арная подгруппа в < *A*, [ ] >. Если теперь предположить полуинвариантность < *B*, [ ] > в < *A*, [ ] >, то из

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x],\ \forall x \in A,$$

следует $x\underbrace{B\ldots B}_{n-1} = \underbrace{B\ldots B}_{n-1}x$, откуда $xB = Bx$ для любого $x \in A$, то есть подгруппа B инвариантна в группе A. Так как A – простая, то либо B – единичная подгруппа в A, либо B совпадает с A. Таким образом, если B – подгруппа группы A, отличная от единичной подгруппы и от нее самой, то $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, не являющаяся полуинвариантной в $< A, [\,] >$.

С другой стороны, так как в $< A, [\,] >$ все элементы являются идемпотентами, то для любого $x, y \in A$, последовательности

$$\underbrace{x\ldots x}_{n-1},\ \underbrace{y\ldots y}_{n-1} \tag{11}$$

– нейтральные. Поэтому (9) и (10) верны для любой n-арной подгруппы n-арной группы $< A, [\,] >$, в том числе и не являющейся полуинвариантной в $< A, [\,] >$.

Например, для любой нетривиальной подгруппы B знакопеременной группы A_5 в 61-арной группе $< A_5, [\,] >$, производной от A_5, 61-арная подгруппа $< B, [\,] >$ не является полуинвариантной, однако для $x, y, \in A_5$, $c \in B$ в $< A_5, [\,] >$ выполняется (9) и (10).

Из приведенного примера следует, что в утверждениях 3) и 4) теоремы 2 последовательности $x_1 \ldots x_{n-1}$, $y_1 \ldots y_{n-1}$ нельзя заменить внешне более простыми последовательностями (11). Однако внешний вид критериев из теоремы 2 можно все же несколько упростить.

Теорема 3. *Пусть $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, пусть также $d_1, \ldots, d_{n-2}$ – фиксированные элементы из A. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $< B, [\,] >$ полуинвариантна в $< A, [\,] >$;

2) для любых x, y $\in$ A, удовлетворяющих условию

$$\theta_A(xd_1 \ldots d_{n-2}yd_1 \ldots d_{n-2}) \in B_o(A), \tag{12}$$

выполняется условие

$$\theta_A(xd_1 \ldots d_{n-2}xd_1 \ldots d_{n-2}yd_1 \ldots d_{n-2}yd_1 \ldots d_{n-2}) \in B_o(A); \tag{13}$$

3) для любых x, y $\in$ A, удовлетворяющих условию

$$[xd_1 \ldots d_{n-2}yd_1 \ldots d_{n-2}b] \in B \tag{14}$$

для некоторого b $\in$ B, выполняется условие

$$[xd_1 \ldots d_{n-2}xd_1 \ldots d_{n-2}yd_1 \ldots d_{n-2}yd_1 \ldots d_{n-2}b] \in B. \tag{15}$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Если $< B, [\,] >$ полуинвариантна в $< A, [\,]$, то, ввиду утверждения 3) теоремы 2, из (12) следует (13).

2) $\Leftrightarrow$ 3) Так как (12) равносильно (14), а (13) равносильно (15), то 2) $\Leftrightarrow$ 3).

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть для $x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1} \in A$ выполняется условие (5). Так как для $d_1, \ldots, d_{n-2} \in A$ всегда найдутся такие $x, y \in A$, что

$$\theta_A(x_1 \ldots x_{n-1}) = \theta_A(xd_1 \ldots d_{n-2}),\ \theta_A(y_1 \ldots y_{n-1}) = \theta_A(yd_1 \ldots d_{n-2}), \tag{16}$$

то из (5) следует (12). Но тогда, ввиду 2), верно (13), откуда и из (16) следует (6). Так как из (5) следует (6), то по теореме 2 $< B, [\,] >$ полуинвариантна в $< A, [\,] >$. Теорема доказана.

Далее символом $\bar{a}$ обозначается косой элемент для $a \in A$.

Следствие 4. *Пусть $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, a – фиксированный элемент из A. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $< B, [\,] >$ полуинвариантна в $< A, [\,] >$;

2) для любых элементов x, y $\in$ A, которые удовлетворяют условию $\theta_A(x\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}) \in B_o(A)$, выполняется условие

$$\theta_A(x\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}x\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3})\in B_o(A);$$

3) для любых элементов $x, y\in A$, *которые удовлетворяют условию* $[x\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}b]\in B$ *для некоторого* $b\in B$, *выполняется условие*

$$[x\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}x\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}b]\in B;$$

4) для любых элементов $x, y\in A$, *которые удовлетворяют условию* $\theta_A(x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y\underbrace{a\ldots a}_{n-2})\in B_o(A)$, *выполняется условие*

$$\theta_A(x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y\underbrace{a\ldots a}_{n-2})\in B_o(A);$$

5) для любых элементов $x, y\in A$, *которые удовлетворяют условию* $[x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y\underbrace{a\ldots a}_{n-2}b]\in B$ *для некоторого* $b\in B$, *выполняется условие*

$$[x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y\underbrace{a\ldots a}_{n-2}b]\in B.$$

Справедливость следующей леммы устанавливается проверкой.

Лемма 4. *Если* $<B, [\,]>$ *–* n*-арная подгруппа* n*-арной группы* $<A, [\,]>$, $d_1, \ldots, d_{n-2}$ *– фиксированные из* A, $b\in B$, *то* $[xd_1\ldots d_{n-2}yd_1\ldots d_{n-2}b]\in B$ *тогда и только тогда, когда* $[xd_1\ldots d_{n-2}y]\in[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}d]$, *где* d *– обратный элемент для последовательности* $d_1\ldots d_{n-2}$.

Используя лемму 4, критерии 3) из теоремы 3, а также 3) и 5) из следствия 4 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4. *Пусть* $<B, [\,]>$ *–* n*-арная подгруппа* n*-арной группы* $<A, [\,]>$, *пусть также* $d_1, \ldots, d_{n-2}$, a *– фиксированные элементы из* A, d *– обратный элемент для последовательности* $d_1\ldots d_{n-2}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $<B, [\,]>$ *полуинвариантна в* $<A, [\,]>$;

2) для любых $x, y\in A$, *удовлетворяющих условию* $[xd_1\ldots d_{n-2}y]\in[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}d]$, *выполняется условие*

$$[xd_1\ldots d_{n-2}xd_1\ldots d_{n-2}yd_1\ldots d_{n-2}y]\in[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}d];$$

3) для любых $x, y\in A$, *удовлетворяющих условию* $[x\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y]\in[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}a]$, *выполняется условие*

$$[x\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}x\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y\bar a\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y]\in[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}a];$$

4) для любых $x, y\in A$, *удовлетворяющих условию* $[x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y]\in[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\bar a]$, *выполняется условие*

$$[x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y]\in[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\bar a].$$

Следствие 5. *Пусть* $<B, [\,]>$ *–* n*-арная подгруппа* n*-арной группы* $<A, [\,]>$, *пусть также* $d_1, \ldots, d_{n-2}$, a *– фиксированные элементы из* B,

d – обратный элемент для последовательности $d_1 \ldots d_{n-2}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) < B, [ ] > полуинвариантна в < A, [ ] >;

2) для любых $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $[xd_1 \ldots d_{n-2}y] \in B$, выполняется условие

$$[xd_1 \ldots d_{n-2}xd_1 \ldots d_{n-2}yd_1 \ldots d_{n-2}y] \in B;$$

3) для любых $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $[x\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y] \in B$, выполняется условие

$$[x\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}x\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}y] \in B;$$

4) для любых $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $[x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y] \in B$, выполняется условие

$$[x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y] \in B.$$

Полагая в утверждениях 3) и 4) теоремы 4 n = 3, получим

Следствие 6. *Пусть < B, [ ] > – тернарная подгруппа тернарной группы < A, [ ] >, a – фиксированный элемент из A. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) < B, [ ] > полуинвариантна в < A, [ ] >;

2) для любых $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $[x\bar{a}y] \in [BBa]$, выполняется условие $[x\bar{a}x\bar{a}y\bar{a}y] \in [BBa]$;

3) для любых $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $[xay] \in [BB\bar{a}]$, выполняется условие $[xaxayay] \in [BB\bar{a}]$.

Полагая в утверждениях 3) и 4) следствия 5 n = 3, получим

Следствие 7. *Пусть < B, [ ] > – тернарная подгруппа тернарной группы < A, [ ] >, a – фиксированный элемент из B. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) < B, [ ] > полуинвариантна в < A, [ ] >;

2) для любых $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $[x\bar{a}y] \in B$, выполняется условие $[x\bar{a}x\bar{a}y\bar{a}y] \in B$;

3) для любых $x, y \in A$, удовлетворяющих условию $[xay] \in B$, выполняется условие $[xaxayay] \in B$.

Замечание. Если в теореме 1 и следствиях 1–3 элементы b и c под знаком n-арной операции записать не в конце, а в начале, то получатся двойственные утверждения. Аналогичным образом получаются двойственные утверждения к 4) теоремы 2, 3) теоремы 3, 3) и 5) следствия 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Dörnte, W.*** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
2. ***Post, E.L.*** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. ***Гальмак, А.М.*** Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.
4. ***Гальмак, А.М.*** *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

5. ***Гальмак, А.М.*** *n*-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
6. ***Белоногов, В.А.*** Задачник по теории групп / В.А. Белоногов. – Москва: Наука, Институт математики и механики УО АН России, 2000.

S U M M A R Y

In this paper the semi invariant subgroups of n-ary groups are considered and studied.

Поступила в редакцию 12.03.2010