УДК 512.542

Влияние индексов нормализаторов несубнормальных 2- и 3-максимальных подгрупп на строение конечной группы

В.С. Монахов, Т.В. Бородич
Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и определения соответствуют принятым в [1–2].

В 1962 году П.И. Трофимов предложил исследовать свойства группы в зависимости от наибольшего общего делителя (в дальнейшем НОД) $d(G)$ порядков всех классов ненормальных сопряженных подгрупп. В работах [3–4] он установил признаки непростоты, разрешимости и сверхразрешимости группы G с $d(G)>1$. В частности, им доказано, что если $d(G)>1$, то $d(G)$ – простое число и G сверхразрешима.

Эти исследования нашли отклик в работе К. Геринга [5], в которой получен следующий критерий: $d(G)=p$ является простым числом тогда и только тогда, когда справедливы следующие утверждения: a) существует нормальная подгруппа N такая, что G/N циклическая, $|G/N|$ делит $p-1$ и $N=P\times D$, где P – силовская p-подгруппа в G и D дедекиндова; b) каждая нормальная подгруппа из P нормальна в G; c) G/P дедекиндова; d) G/D не дедекиндова. Отсюда при $p=2$ получается следствие: тогда и только тогда $d(G)=2$, когда G является прямым произведением недедекиндовой 2-группы и абелевой 2'-группы. Напомним, что дедекиндовой называется группа, в которой все подгруппы нормальны.

В.А. Ведерников [6] развил это направление, исследовав свойства группы в зависимости от НОД порядков не всех классов ненормальных сопряженных подгрупп, а только некоторых из них. При этом ему удалось не только обобщить результаты П.И. Трофимова и К. Геринга, но и получить новые признаки разрешимости и частичной сверхразрешимости группы с ограничениями на НОД порядков классов максимальных и 2-максимальных ненормальных сопряженных подгрупп. Из результатов работы [6] приведем следующие: если $d_2(G)>1$, то $d_2(G)$ – простое число и G сверхразрешима; тогда и только тогда $d_2(G)=p$, где p – наименьший простой делитель порядка G, когда группа G является прямым произведением абелевой p'-группы и недедекиндовой p-группы. Здесь $d_2(G)$ – НОД порядков всех классов ненормальных максимальных сопряженных подгрупп и порядков всех классов ненормальных примарных сопряженных подгрупп группы G.

В.А. Ведерников [6] также предложил через $D_k(G)$ обозначать НОД порядков всех классов ненормальных сопряженных k-максимальных подгрупп. Он установил разрешимость группы в каждом из следующих случаев: $D_1(G)\neq 1$; $D_2(G)\neq 1$; $D_3(G)$ делится на квадрат простого числа. Группа с $D_3(G)\neq 1$ может быть неразрешимой, примером служит простая группа A_5 порядка 60, у которой $D_3(A_5)=15$.

В настоящей работе развивается это направление. Здесь исследуются свойства группы в зависимости от НОД $D_k^*(G)$ порядков всех классов сопряженных несубнормальных k-максимальных подгрупп. Доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть G – группа и $D_2^*(G)\neq 1$. Тогда G разрешима и $n(G)\leq 3$. Кроме того, для $q\in \pi(D_2^*(G))$ справедливы следующие утверждения:*

1) *если силовская q-подгруппа Q нормальна в G, то G/Q либо нильпотентна, либо G/Q – группа Шмидта с абелевыми собственными подгруппами;*

2) *если Q ненормальна в G, то Q максимальна и циклична, $|Q/O_q(G)|=q$ и $G/O_q(G)=[E_{p^\delta}]Z_q$ – группа Шмидта с абелевыми собственными подгруппами.*

Теорема 2. *Предположим, что $D_3^*(G)\neq 1$ и пусть простое число p делит $D_3^*(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если силовская p-подгруппа P нормальна в G, то G/P либо нильпотентна, либо изоморфна группе из* $\mathbf{B}\backslash B_4$;

2) *если P ненормальна в G, то P – k-максимальная подгруппа для $k\leq 2$, $|P/O_p(G)|\leq p^2$, и либо*

2.1) *P 2-максимальна и циклична, $|P/O_p(G)|=p$; либо*

2.2) *P максимальна, все 2-максимальные подгруппы из P субнормальны в G и $G/O_p(G)=(P/O_p(G))[G_{p'}O_p(G)/O_p(G)]$ – группа Фробениуса с дополнительным множителем $P/O_p(G)$.*

Адрес для корреспонденции: 246050, г. Гомель, ул. Ланге, 5а, кв. 21, e-mail: monakhov@gsu.by – Монахов В.С.

Группа из теоремы 2 может быть неразрешимой, примером служит простая группа A_5 порядка 60, у которой $D_3^*(G)$=15. Но группа G с $D_3^*(G)\neq 1$ является разрешимой в каждом из следующих случаев: $D_3^*(G)$ – четное число; $D_3^*(G)$ делится на квадрат простого числа; p делит $D_3^*(G)$ и силовская
p-подгруппа самонормализуема, см. следствия 1–3. Кроме того, разрешимая группа G с $D_3^*(G)\neq 1$ имеет нильпотентную длину не выше 3, следствие 4.

Используемые обозначения и определения. Пусть k – натуральное число. Подгруппу H группы G называют k-максимальной в G, если существует цепочка подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset \dots \supset G_k = H,$$

такая, что G_{i+1} максимальна в G_i для каждого $i = 0,1,..., k-1$.

НОД порядков всех классов сопряженных несубнормальных k-макси-мальных подгрупп группы G обозначим через $D_k^*(G)$. Если все k-макси-мальные подгруппы субнормальны в G, либо их нет, то полагаем $D_k^*(G)$=0. Если G – простая группа, то $D_k(G)= D_k^*(G)$ для любого k. В общем случае $D_k(G)\neq D_k^*(G)$. Например, если G – диэдральная группа порядка 8, то $D_2(G)$=2, а $D_2^*(G)$=0.

Говорят, что группа G дисперсивна, если она имеет нормальный ряд, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Группа G называется группой Фробениуса, если в ней найдется собственная подгруппа H, совпадающая со своим нормализаторам и взаимно простая со своими сопряженными подгруппами, отличными от H. Последние два условия эквивалентны следующему: $H\cap H^g$ =1 для всех $g\in G\backslash H$. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Символами p и q всегда обозначаются различные простые числа, а δ – показатель p по модулю q. Напомним, что показателем числа p по модулю q называют такое наименьшее натуральное число δ, что q делит $(p^{\delta}$ - 1).

Класс **B** состоит из всех разрешимых групп с нильпотентными 2-максимальными подгруппами. Группы из этого класса перечислены в работе В. А. Белоногова [7], всего имеется 7 типов таких групп. Пусть B_i – группа из пункта i теоремы работы [7].

$\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини, а $Z(X)$ – центр группы X. $\pi(X)$ – множество всех простых делителей порядка группы X. Если H – подгруппа группы G, то $H_G = \cap_{x\in G} H^x$ – наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H, а H^G – подгруппа, порожденная всеми сопряженными с H подгруппами в группе G. Наибольшая разрешимая нормальная подгруппа в группе G обозначается через $R(G)$. Конкретные группы обозначаются следующим образом: Z_n – циклическая группа порядка n; E_{p^n} – элементарная абелева p-группа порядка p^n; A_n, S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n. $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B. Через $n(G)$ обозначается нильпотентная длина разрешимой группы G. Группа G называется метанильпотентной, если $n(G)$<3.

Влияние индексов нормализаторов несубнормальных 2-максималь-ных подгрупп на строение группы

Лемма 1. *Пусть G – группа и N – ее нормальная подгруппа. Если $D_k^*(G)\neq 0$, то $D_k^*(G)$ делит $D_k^*(G/N)$.*

Доказательство. Пусть $D_k^*(G/N)\neq 0$. Тогда существует несубнормальная k-максимальная подгруппа M/N. Ясно, что M – несубнормальная k-максимальная подгруппа в G. По определению $D_k^*(G)$ делит $|G:N_G(M)|$= =$|G/N:N_{G/N}(M/N)|$. Итак, $D_k^*(G)$ делит $|G/N:N_{G/N}(M/N)|$ для каждой несубнормальной k-максимальной подгруппы M/N. Следовательно $D_k^*(G)$ делит $D_k^*(G/N)$.

Лемма 2. *Тогда и только тогда $D_2^*(G)$ = 0, когда G нильпотентна, или G является группой Шмидта с абелевыми собственными подгруппами.*

Доказательство. Если $D_2^*(G)$ = 0, то все 2-максимальные подгруппы субнормальны в G, либо их нет. Пусть G ненильпотентна. Тогда все максимальные подгруппы в G нильпотентны и $G=[P]\langle y\rangle$ – группа Шмидта. В G максимальная подгруппа $M=\Phi(P)\times\langle y\rangle$ несубнормальна. Если $\Phi(P)\neq 1$, то существует в $\Phi(P)$ подгруппа Φ_1 индекса p. Теперь $H=\Phi_1\times\langle y\rangle$ будет 2-максимальной несубнормальной подгруппой в G, противоречие. Поэтому $\Phi(P)$=1, P абелева, а значит все собственные подгруппы в G абелевы. Необходимость доказана.

Проверим достаточность. Если G нильпотентна, то в ней нет несубнормальных подгрупп и $D_2^*(G)$=0. Пусть $G=[P]Q$ – группа Шмидта с абелевыми собственными подгруппами. Тогда P – минимальная нормальная подгруппа в G по теореме 1.5 [8]. Максимальные подгруппы в G – это в точности подгруппы Q^g, $g\in G$, и $P\times Q_1$; где Q_1 максимальна в Q. Так как все собственные подгруппы из Q нормальны в G, то все 2-максимальные подгруппы из G, содержащиеся в Q, будут нормальными в G. Максимальная подгруппа $P\times Q_1$ нормальна в G и нильпотентна, поэтому все ее подгруппы субнормальны в G.

Д о к а з а т е л ь с т в о **теоремы 1.** Вначале докажем утверждения 1 и 2. Ввиду леммы 2 считаем, что $D_2^*(G) \neq 0$.

1. По лемме 1 $D_2^*(G)$ делит $D_2^*(G/Q)$, поэтому q делит $D_2^*(G/Q)$. Но G/Q имеет порядок, не делящийся на q, поэтому $D_2^*(G/Q)=0$ и G/Q либо нильпотентна, либо группа Шмидта с абелевыми собственными подгруппами по лемме 2.

2. Пусть Q ненормальна в G. Тогда ее нормализатор не совпадает с G и существует максимальная подгруппа H в G такая, что $Q \leq N_G(Q) \leq H$. Предположим, что $N_G(Q) \neq H$. Тогда $N_G(Q)$ содержится в некоторой максимальной подгруппе H_1 из H, и $H_1=N_G(H_1)$, поэтому H_1 несубнормальна в G. Так как $Q \leq N_G(Q) \leq H_1= N_G(H_1)$, то q не делит $|G:H_1|$, поэтому $D_2^*(G)$ не делит $|G:H_1|$.
Но $D_2^*(G)$ делит индекс нормализатора каждой несубнормальной 2-макси-мальной подгруппы, противоречие. Поэтому допущение неверно и $N_G(Q)=H$ максимальна в G. Предположим теперь, что $Q \neq H$ и пусть H_2 – максимальная в H подгруппа, содержащая Q. Тогда q не делит $|G:H_2|$, поэтому q не делит $|G:N_G(H_2)|$ и подгруппа H_2 субнормальна в G по определению $D_2^*(G)$. Так как $H_2 \leq H=N_G(Q)$, то Q нормальна в H_2, а значит Q субнормальна в G. Но субнормальная силовская подгруппа нормальна. Получили противоречие. Следовательно, допущение неверно и $Q=H=N_G(Q)$ максимальна в G.

Пусть Q_1 – максимальная в Q подгруппа. Тогда Q_1 – вторая максимальная подгруппа в G. Так как $Q \leq N_G(Q_1)$, то q не делит $|G:N_G(Q_1)|$. Поэтому Q_1 субнормальна в G. Ясно, что в этом случае Q_1 нормальна в G. Итак, каждая максимальная подгруппа из Q нормальна в G. Если Q нециклическая, то в ней существуют две максимальные подгруппы Q_1 и Q_2, обе нормальны в G, поэтому $Q = Q_1 Q_2$ нормальна в G, противоречие. Следовательно, Q – циклическая подгруппа и $O_q(G)$ – максимальная подгруппа в Q.

Так как $Q=N_G(Q)$ и Q абелева, то по теореме IV.2.6 [2] в G существует нормальное q-дополнение $G_{q'}$. Теперь $G/O_q(G)=(Q/O_q(G))[G_{q'} O_q(G)/O_q(G)]$. Поскольку $|Q/O_q(G)|=q$ и $Q/O_q(G)$ максимальна в $G/O_q(G)$, то $G_{q'} O_q(G)/O_q(G)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/O_q(G)$. Поэтому $G/O_q(G) = [E_{p^\delta}] Z_q$ – группа Шмидта с абелевыми собственными подгруппами.

Ясно, что G разрешима. Пусть q делит $D_2^*(G)$. Если силовская q-подгруппа Q нормальна в G, то из утв. 1 получаем $n(G) \leq 3$. Если Q не нормальна в G, то из утв. 2 получаем $n(G) \leq 3$. Теорема 1 доказана.

Влияние индексов нормализаторов несубнормальных 3-максималь- ных подгрупп на строение группы

Лемма 3. *Если $G \in$* **B**$\backslash B_4$*, то G дисперсивна, метанильпотентна и $l_p(G)=1$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из перечисленных в работе [7] свойств получаем, что группы из класса **B** $\backslash B_4$ дисперсивны и метанильпотентны. Хорошо известно, что если G метанильпотентна, то $l_p(G)=1$ для любого $p \in \pi(G)$.

Лемма 4. *Группа B_4 обладает следующими свойствами: $n(B_4)=3$; $l_p(B_4)=1$; $l_q(B_4)=2$; $D_3^*(B_4) \neq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно п. 4 теоремы работы [7] группа

$$B_4 = \langle a\rangle_{p^{1+\varepsilon}} ([P_{p^{\delta+\varepsilon}}]\langle b\rangle_q),\ N_G(\langle b\rangle) = [\langle b\rangle]\langle a\rangle,\ |P:P'| = p^\delta,\ 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Ясно, что $n(B_4)=3$, $l_p(B_4)=2$, $l_q(B_4)=1$. Примером такой группы служит симметричная группа S_4. Поскольку группа B_4 недисперсивна, то из теоремы 10 [9] получаем, что $D_3^*(B_4) \neq 0$.

Лемма 5. *Если $D_3^*(G)=0$, то G либо нильпотентна, либо изоморфна группе из класса* **B**$\backslash B_4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $D_3^*(G)=0$, то все 3-максимальные подгруппы субнормальны в G. Следовательно все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Если G неразрешима, то G изоморфна $SL(2,5)$ или A_5 [10]. Несложно проверить, что $D_3^*(SL(2,5))=1$ и $D_3^*(A_5)=15$, противоречие. Следовательно, G разрешима и либо нильпотентна, либо $G \in$ **B** [7]. Но теперь из леммы 4 следует, что $G \in$ **B**$\backslash B_4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о **теоремы 2.** 1. Пусть силовская p-подгруппа P нормальна в G. По лемме 1 $D_3^*(G)$ делит $D_3^*(G/P)$, поэтому p делит $D_3^*(G/P)$. Но G/P имеет порядок, не делящийся на p, поэтому $D_3^*(G/P)=0$ и G/P либо нильпотентна, либо изоморфна группе из **B**$\backslash B_4$ по лемме 5.

2. Пусть P ненормальна в G. Тогда ее нормализатор самонормализуем и не является субнормальной подгруппой. Так как p не делит $|G:N_G(P)|$, то P не 3-максимальна в G. Предположим, что P – k-максимальная подгруппа для $k \geq 4$. Если существует 3-максимальная подгруппа H в G такая, что $P \subset H \subseteq N_G(P)$, то, поскольку p не делит $|G:N_G(H)|$, H субнормальна G по определению $D_3^*(G)$. Но P нормальна в H, значит P нормальна в G, противоречие. Следовательно, $N_G(P)$ не является l-максимальной подгруппой в G для $l \leq 3$. Пусть K – 3-максимальная подгруппа, содержащая $N_G(P)$. Тогда $K = N_G(K)$ и p не делит $|G:N_G(K)|$, противоречие. Таким образом, если P ненормальна в G, то P является k-максимальной подгруппой для $k \leq 2$.

2.1. Пусть P – 2-максимальная подгруппа в G. Тогда имеется цепочка подгрупп $P \subseteq N_G(P) \subset G$. Выберем в P максимальную подгруппу P_1. Она будет 3-максимальной подгруппой в G. Так как $P \subseteq N_G(P_1)$, то p не делит $|G:N_G(P_1)|$. Поэтому P_1 субнормальна в G. Но теперь P_1^G – нормальная в G p-подгруппа. Если $P_1 \neq P_1^G$, то $P = P_1^G$, противоречие. Значит $P_1 = P_1^G$. Таким образом, каждая максимальная подгруппа из P нормальна в G. Если P нециклическая, то найдутся две максимальные подгруппы P_1 и P_2 из P, обе нормальные в G. Следовательно, $P=P_1P_2$ нормальна в G, противоречие. Итак, P – циклическая подгруппа, $O_p(G)$ максимальна в P и $|P/O_p(G)|=p$.

2.2. Пусть P максимальна в G. Тогда $P = N_G(P)$. Предположим, что $|P| \geq p^3$. Тогда в P существует неединичная подгруппа P_2 такая, что P_2 нормальна в P и P_2 – 3-максимальная подгруппа в G. Так как $N_G(P_2)=P$, то p не делит $|G:N_G(P_2)|$ и P_2 субнормальна в G. Теперь $P_2^G \subseteq O_p(G)$ и $|P/O_p(C)| \leq p^2$. Если $|P| \leq p^2$, то ясно, что $|P/O_p(C)| \leq p^2$. Итак, в любом случае, $|P/O_p(G)| \leq p^2$. Теперь в $G/O_p(G)$ подгруппа $P/O_p(G)$ совпадает со своим нормализатором. По теореме IV.2.6 [2] $G/O_p(G)=(P/O_p(G))[G_{p'}O_p(G)/O_p(G)]$. Так как $O_p(G/O_p(G))=1$, то из [2, с. 37] следует, что подгруппа $P/O_p(G)$ имеет тривиальное пересечение с каждой своей сопряженной подгруппой. Это означает, что $G/O_p(G)$ является группой Фробениуса с дополнительным множителем $P/O_p(G)$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Если $D_3^*(G)$ делится на квадрат простого числа, то группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка. Если $D_3^*(G)=0$, то G разрешима по лемме 5. Пусть $D_3^*(G)=p^an>1$, где $a>1$, $n \geq 1$. Если $R(G) \neq 1$, то $D_3^*(G)$ делит $D_3^*(G/R(G))$ по лемме 1 и $G/R(G)$ разрешима по индукции. Следовательно, G разрешима. Значит $R(G)=1$ и для подгруппы P выполняется одно из утверждений 2.1 или 2.2 теоремы 2. Но если выполняется утв. 2.1, то $|P|=p$ и p^2 не делит порядок группы, противоречие с условием. Если выполняется утв. 2.2, то G – группа Фробениуса с дополнительным множителем P порядка p^2, поэтому G разрешима.

Следствие 2. *Если $|D_3^*(G)|$ – четное число, то группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть $p=2$ в обозначениях теоремы 2. Тогда P ненормальна в G и либо подгруппа P циклическая, либо $G/O_2(G)$ – группа Фробениуса с дополнительным множителем $P/O_2(P)$. В любом случае группа G разрешима.

Следствие 3. *Если p делит $D_3^*(G)$ и силовская p-подгруппа P самонормализуема, то $G/O_p(G)$ является группой Фробениуса с дополнительным множителем $P/O_p(G)$ порядка $\leq p^2$. В частности, G разрешима.*

Доказательство. Из утв. 2 теоремы 2 следует, что $|P/O_p(G)| \leq p^2$, в частности, $P/O_p(G)$ абелева. Если $P=N_G(P)$, то $P/O_p(G)=N_{G/Op}(G)(P/O_p(G))$ и в $G/O_p(G)$ существует нормальное p-дополнение $H/O_p(G)$ по теореме IV.2.6 [2]. Так как $O_p(G/O_p(G)=1$, то из [2], стр. 37, следует, что $P/O_p(G)$ имеет тривиальное пересечение с каждой своей сопряженной подгруппой. Это означает, что $G/O_p(G)$ является группой Фробениуса с дополнительным множителем $P/O_p(G)$ порядка $\leq p^2$. Так как ядро группы Фробениуса нильпотентно, то группа G разрешима.

Следствие 4. *Если группа G разрешима и $D_3^*(G) \neq 1$, то $n(G) \leq 3$.*

Доказательство. Пусть p делит $D_3^*(G)$. Если силовская p-подгруппа P нормальна в группе G, то из утв. 1 теоремы 2 следует, что G/P либо нильпотентна, либо изоморфна группе из класса $\mathbf{B} \backslash B_4$. По лемме 3 группа G дисперсивна и $n(G) \leq 3$. Пусть P ненормальна в G. Предположим, что справедливо утв. 2.2. Тогда $G/O_p(G)=(P/O_p(G))[G_{p'}O_p(G)/O_p(G)]$ является группой Фробениуса с ядром $G_{p'}O_p(G)/O_p(G)$ и примарным дополнительным множителем $P/O_p(G)$. Так как ядро группы Фробениуса нильпотентно [2], теорема V.8.7, то $n(G) \leq 3$. Предположим, что справедливо утв. 2.1. Тогда P 2-максимальна и циклична, а $|P/O_p(G)|=p$. Если $|\pi(G)|=2$, то $n(G) \leq 3$, так как p-длина G равна 1 [2], теорема VI.6.6. Поскольку P 2-максимальна в разрешимой группе G, то остается рассмотреть случай, когда $|\pi(G)|=3$. Если $P=N_G(P)$, то $G/O_p(G)$ будет группой Фробениуса с дополнительным множителем $P/O_p(G)$ порядка p. Поэтому $n(G) \leq 3$. Пусть P – собственная подгруппам в $H=N_G(P)$. Тогда $|H|=|P|q$, H – максимальная в G подгруппа и G/H_G примитивна. Отсюда следует, что все силовские в G подгруппы абелевы. Теперь $n(G) \leq 3$ по теореме VI.14.16. [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Монахов, В.С.*** Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск: Вышэйшая школа. – 2006. – 320 с.
2. ***Huppert, B.*** Endliche Gruppen I. / B. Huppert // Berlin, Heidelberg, New York: Springer. – 1967. – 792 s.
3. ***Трофимов, П.И.*** О признаках непростоты и разрешимости конечных групп / П.И. Трофимов // Сибирский математический журнал. – 1962. – Т. 3, № 6. – С. 876–881.

4. ***Трофимов, П.И.*** Заметка о признаках сверхразрешимости и разрешимости конечных групп / П.И. Трофимов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1965. – Т. 49, № 6. – С. 144–146.
5. ***Hering, Ch.*** Gruppen mit nichttrivialer Trofimovzahl / Ch. Hering // Arch. Math. – 1964. – Vol. 15, № 6. – С. 404–407.
6. ***Ведерников, В.А.*** О признаках разрешимости и сверхразрешимости конечных групп / В. А. Ведерников // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. VIII, № 6. – С. 1236–1244.
7. ***Белоногов В.А.*** Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максималь-ными подгруппами / В.А. Белоногов // Математические заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.
8. ***Монахов, В.С.*** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Украинского математического конгресса. – Киев: Институт математики, 2002. – С. 81–90.
9. ***Mann, A.*** Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–405.
10. ***Janko, Z.*** Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79, № 5. – P. 422–424.

S U M M A R Y

The structure of finite group with non-identity GCD of orders of all classes of conjugate non-subnormal k-maximal subgroups is investigated for k<4. In particular, new sufficient conditions for solvability of the group are established. Exact upper estimations of the nilpotent length of this group are obtained.

Поступила в редакцию 12.03.2010