

О консервативности альтернативных алгебр

А. В. КУХАРЕВ

Понятие консервативной алгебры было введено И. Л. Кантором в [1] при изучении обобщений алгебр Йордана. Пусть на векторном пространстве V заданы линейный оператор $A : V \rightarrow V$ и билинейное отображение $B : V \times V \rightarrow V$. Определим новое билинейное отображение $[A, B] : V \times V \rightarrow V$ по формуле

$$[A, B](x, y) = A(B(x, y)) - B(A(x), y) - B(x, A(y)).$$

Рассмотрим алгебру $M = (V, B)$, заданную на векторном пространстве V с умножением $B : V \times V \rightarrow V$. Через L_a обозначим оператор левого умножения в M , то есть $L_a(x) = B(a, x)$.

Алгебра $M = (V, B)$ называется *консервативной*, если существует другое умножение B^* на том же векторном пространстве V , для которого выполняется соотношение

$$[L_a, [L_b, B]] = -[L_{B^*(a,b)}, B]$$

для всех $a, b \in V$.

Эквивалентно, это условие можно записать в виде тождества

$$b(a(xy) - (ax)y - x(ay)) - a((bx)y) + (a(bx))y + (bx)(ay) - a(x(by)) + (ax)(by) + x(a(by)) = -(a * b)(xy) + ((a * b)x)y + x((a * b)y),$$

где $a, b, x, y \in V$, $xy := B(x, y)$ и $x * y := B^*(x, y)$.

Известно, что все ассоциативные алгебры, алгебры Ли, алгебры Йордана, алгебры Лейбница и алгебры Зинбеля являются консервативными (см. [2]). Примерами неконсервативных алгебр являются простая 7-мерная алгебра Мальцева и некоторые левоммутативные алгебры. Также известны примеры коммутативных неконсервативных алгебр. Например, эволюционная двумерная алгебра E_2 , определяемая тождествами $e_1^2 = e_2^2 = e_1$, не является консервативной.

В настоящей работе мы рассмотрим вопрос о консервативности альтернативных алгебр. Напомним, что алгебра называется альтернативной, если в ней выполняются тождества $x(xy) = (xx)y$ и $(yx)x = y(xx)$. Очевидно, каждая ассоциативная алгебра альтернативна. Известным примером неассоциативной альтернативной алгебры является алгебра октонионов. Получен следующий результат.

Теорема 1. *Алгебра октонионов не является консервативной.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кантор И. Л. Некоторые обобщения йордановых алгебр // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. 1972. Том 16. С. 407–499.
- [2] Kaygorodov I., Lopatin A., Popov Y. Conservative algebras of 2-dimensional algebras // Linear Algebra and its Applications, 486 (2015), 255-274.

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск (Беларусь)
E-mail: kukharev.av@mail.ru