Эластичные консервативные Hom-алгебры[1]

Кухарев А.В.
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
kukharev.av@mail.ru

Консервативные алгебры были введены И. Кантором при изучении обобщений йордановых алгебр [1]. Напомним основные факты о консервативных алгебрах. Определим произведение $[L, B]$ линейного L и билинейного отображения B, заданных на векторном пространстве V, следующим образом:

$$[L, B](x, y) = L(B(x, y)) - B(L(x), y) - B(x, L(y))$$

для любых $x, y \in V$. Алгебра A с умножением $B : \ A \times A \to A$ называется *консервативной*, если существует другое умножение B^* на том же пространстве A такое, что для любых $a, b \in A$

$$[L_b, [L_a, B]] = -[L_{B^*(a,b)}, B], \tag{1}$$

где $L_a(x) := B(a, x)$ — оператор левого умножения.

Известно, что все йордановы и ассоциативные алгебры, а также алгебры Ли, алгебры Лейбница и алгебры Зинбеля являются консервативными (см. [2]). Более того, алгебра A с умножением $B : A \times A \to A$ является йордановой если и только если A является коммутативной консервативной алгеброй с ассоциированным умножением $B^* = B$. Также в [1] было показано, что каждая эластичная консервативная алгебра с ассоциированным умножением $B^* = B$ является некоммутативной йордановой алгеброй. В настоящем исследовании мы обобщим эти результаты на случай Hom-алгебр.

Напомним (следуя [3]), что *Hom-алгеброй* называется тройка $(A, \cdot, \alpha)$, состоящая из линейного пространства A, билинейного отображения $\cdot : \ A \times A \to A$ и линейного отображения $\alpha : A \to A$, причем $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$.

Hom-алгебра $(A, \cdot, \alpha)$ называется *коммутативной*, если $x \cdot y = y \cdot x$ для всех $x, y \in A$.

Hom-алгебра $(A, \cdot, \alpha)$ называется *эластичной*, если

$$\alpha(x) \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot \alpha(x)$$

для любых $x, y \in A$.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-41-10004).

Hom-алгебра $(A, \cdot, \alpha)$ называется *йордановой*, если выполняются следующие условия:

1) эта Hom-алгебра коммутативна;

2) $\alpha^2(x) \cdot (x^2 \cdot \alpha(y)) = \alpha(x^2) \cdot \alpha(x \cdot y)$ для любых $x, y \in A$.

Hom-алгебра $(A, \cdot, \alpha)$ называется *некоммутативной йордановой*, если выполняются следующие условия:

1) она эластичная,

2) для любых $x, y \in A$ имеет место

$$\alpha^2(x) \cdot (x^2 \cdot \alpha(y)) = \alpha(x^2) \cdot \alpha(x \cdot y)$$

и

$$\alpha^2(x) \cdot (\alpha(y) \cdot x^2) = \alpha(x \cdot y) \cdot \alpha(x^2).$$

Hom-алгебру $(A, \cdot, \alpha)$ будем называть *консервативной*, если существует другое билинейное отображение $* : \ A \times A \to A$ (называемое ассоциированным с умножением $\cdot$), такое, что $\alpha(x * y) = \alpha(x) * \alpha(y)$, и для любых $a, b, x, y \in A$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}
&\alpha^2(b) \cdot (\alpha(a) \cdot (x \cdot y) - (a \cdot x) \cdot \alpha(y) - \alpha(x) \cdot (a \cdot y)) - \\
&-\alpha^2(a) \cdot ((b \cdot x) \cdot \alpha(y)) + (\alpha(a) \cdot (b \cdot x)) \cdot \alpha^2(y) + \alpha(b \cdot x) \cdot \alpha(a \cdot y) - \\
&-\alpha^2(a) \cdot (\alpha(x) \cdot (b \cdot y)) + \alpha(a \cdot x) \cdot \alpha(b \cdot y) + \alpha^2(x) \cdot (\alpha(a) \cdot (b \cdot y)) = \\
&= -\alpha(a * b) \cdot \alpha(x \cdot y) + ((a * b) \cdot \alpha(x)) \cdot \alpha^2(y) + \alpha^2(x) \cdot ((a * b) \cdot \alpha(y)).
\end{aligned} \tag{2}$$

В случае тождественного отображения $\alpha = \mathrm{id}$ равенство (2) эквивалентно равенству (1), если положить $B(a, b) = a \cdot b$ и $B^*(a, b) = a * b$. Поэтому Hom-алгебра $(A, \cdot, \mathrm{id})$ консервативна если и только если алгебра A с умножением $\cdot$ консервативна.

Консервативную Hom-алгебру, в которой ассоциированное умножение совпадает с исходным умножением, будем называть *сильно консервативной* Hom-алгеброй.

Следующие результаты показывают связь консервативных Hom-алгебр с коммутативными и некоммутативными йордановыми Hom-алгебрами.

Теорема 1. *Hom-алгебра $(A, \cdot, \alpha)$ является йордановой тогда и только тогда, когда она является коммутативной сильно консервативной Hom-алгеброй.*

Теорема 2. *Каждая эластичная сильно консервативная Hom-алгебра является некоммутативной йордановой Hom-алгеброй.*

Список литературы

[1] И. Л. Кантор. Некоторые обобщения йордановых алгебр. *Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу.* **16** (1972), 407–499.

[2] I. Kaygorodov, A. Lopatin, Yu. Popov. Conservative algebras of 2-dimensional algebras. *Linear Algebra and its Applications.* **486** (2015), 255–274.

[3] A. Makhlouf, S. Silvestrov. Hom-algebra Structures. *Journal of Generalized Lie Theory and Applications.* **2**: 2 (2008), 51–64.