УДК 514.765+512.812.4

М.В. Линкевич, М.Н. Подоксёнов

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь

АВТОПОДОБИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ E(1,1)⊕R

Ключевые слова: алгебра Ли, лоренцево скалярное произведение, группа преобразований.

Алгебра Ли $E(1,1)\oplus R$ может быть представлена, как состоящая из матриц:

$$U=\begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & 0 \\ u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $(u_i \in \boldsymbol{R}, i=1,2,3,4)$ с операцией коммутатора матриц.

Припишем такой матрице координаты (u_1, u_2, u_3, u_4). Матрицы $V_1(1,0,0,0)$, $V_2(0,1,-1,0)$, $V_3(0,1,1,0)$, $V_4(0,0,0,1)$ образуют базис, в котором коммутационные соотношения задаются равенством:

$$[V_1, V_2] = -V_2, \qquad [V_1, V_3] = V_3. \qquad (2)$$

Любой базис, в котором скобка Ли задаётся формулами (2), будем называть каноническим. Подпространства $I_1 = \boldsymbol{R}V_2$, $I_2 = \boldsymbol{R}V_3$, $I_3 = \boldsymbol{R}V_4$ являются одномерными идеалами. Подпространства $E(1,1) = \langle V_1, V_2, V_3\rangle$ и $H = \langle V_2, V_3, V_4\rangle$ являются трёхмерными идеалами, а $L = \langle V_2, V_3\rangle$ – двумерным идеалом.

Лоренцево скалярное произведение в алгебре Ли $E(1,1)\oplus R$ может быть задано с помощью матрицы Грама в каноническом базисе. В работе [1] найдены три матрицы Грама, при которых алгебра Ли $E(1,1)\oplus R$ допускает однопараметрические группы автоподобий, и выписано действие этих групп в виде матриц в каноническом базисе. В каждом из случаев изотропным является вектор V_4 и один из идеалов I_1, I_2, I_3. Тем самым, на трёхмерном идеале H индуцируется вырожденное скалярное произведение.

Цель данной работы: доказать, что не существует других способов задания лоренцева скалярного произведения, при котором алгебра Ли $E(1,1)\oplus R$ допускает однопараметрическую группу автоподобий.

Несложно доказать следующую лемму.

Лемма. *Пусть линейное преобразование n-мерного векторного пространства имеет $n+1$ собственных векторов, причём любые n из них линейно независимы. Тогда данное преобразование пропорционально тождественному.*

Любой из перечисленных выше идеалов алгебры Ли $E(1,1)\oplus R$ должен быть инвариантным относительно автоподобия. В работе [1] доказано, что трёхмерная алгебра Ли $E(1,1)\oplus R$ допускает автоподобия только в том случае, когда трёхмерный идеал H является изотропным. При этом, изотропное направление этого идеала (обозначим его I_4) должно быть инвариантным относительно любого автоподобия.

Предположим, что это направление отлично от I_1, I_2, I_3 и не лежит в одном двумерном подпространстве вместе с двумя из I_1, I_2, I_3. Тогда ограничение автоподобия на идеал H пропорционально тождественному преобразованию.

Предположим, что I_4 лежит в одном двумерном подпространстве вместе с двумя из I_1, I_2, I_3. Тогда ограничение автоподобия на это двумерное подпространство пропорционально тождественному преобразованию.

С другой стороны, хорошо известно, что любое подобие четырёхмерного пространства Минковского с коэффициентом $e^{2\mu}$, имеющее хотя бы один изотропный собственный вектор, задаётся в подходящем базисе одной из матриц:

$$e^{\mu}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{\mu}\begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\nu} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где звёздочками обозначена ортогональная матрица $\boldsymbol{Q}$, которая задаёт действие преобразования на двумерном подпространстве с евклидовым скалярным произведением.

Ограничение на трёхмерное инвариантное подпространство с вырожденной метрикой задаётся соответственно одной из матриц:

$$e^{\mu}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{\mu}\begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Для преобразований, задающихся такими матрицами, существует только одно двумерное подпространство, на котором преобразование может действовать пропорционально тождественному; а именно, это то подпространство, на котором действие задаётся матрицей $\boldsymbol{Q}$. Однако, это подпространство не может содержать изотропное направление I_4.

Итак, в данной работе было доказано, что изотропными могут быть только один или два из идеалов I_1, I_2, I_3, и тем самым, в работе [1] приведён исчерпывающий список возможных однопараметрических групп автоподобий алгебры Ли $E(1,1)\oplus R$, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой.

Литература

1. Линкевич, М. В. Однопараметрические группы автоподобий алгебры Ли E(1,1)R // Молодежь XXI века: образование, наука, инновации : материалы XII Международной конференции аспирантов и молодых ученых, Витебск, 5 декабря 2025 г. : в 2 т. Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2025. Т. 1. С. 26–28.

Сведения об авторах:

Линкевич Максим Владимирович – магистрант первого года обучения Витебского государственного университета имени П.М. Машерова, e-mail: maksimlinkevic@gmail.com, **SPIN-код:** 6633-7166.

Подоксёнов Михаил Николаевич – доцент кафедры математики Витебского государственного университета имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: p. michael@mail.ru, **SPIN-код:** 5120-2532.