

Н.С. Герасимович, М.Н. Подоксёнов

*Витебский государственный университет имени П.М. Машерова,
Витебск, Республика Беларусь*

СТРУКТУРА ПОЛНОЙ ГРУППЫ ПОДОБИЙ ОДНОГО САМОПОДОБНОГО ТРЁХМЕРНОГО ЛОРЕНЦЕВОГО МНОГООБРАЗИЯ

Ключевые слова: группа Ли, лоренцева метрика, самоподобное многообразие, группа преобразований, полупрямое произведение.

Любая трёхмерная неунимодулярная алгебра Ли G содержит двумерный коммутативный идеал H . Операция скобки в такой алгебре Ли однозначно определяется действием оператора $\text{ad}(X)$ для некоторого вектора $X \notin H$ на идеале H . Среди всех трёхмерных неунимодулярных алгебр Ли выделяется одна, для которой $\text{ad}(X)|_H$ является тождественным для некоторого вектора $X \notin H$. Назовём такую алгебру Ли *специальной* и будем обозначать S_3 . Соответствующую ей связную односвязную группу Ли обозначим S_3 .

Их матричные представления:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & u_1 & 0 & u_3 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \text{ch } x_1 & 0 & \text{sh } x_1 & x_2 \\ 0 & e^{x_1} & 0 & x \\ \text{sh } x_1 & 0 & \text{ch } x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этим матрицам приписываем координаты (u_1, u_2, u_3) и (x_1, x_2, x_3) , $u_i \in \mathbf{R}, x_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3$, которые назовём *естественными*. В работе [1] доказано, что группа Ли может быть самоподобным многообразием относительно левоинвариантной лоренцевой метрики, найден вид соответствующего метрического тензора и действие существенной однопараметрической группы подобий в естественных координатах.

В работе [2] было выписано действие полной группы подобий $FH(S_3)$ получившегося многообразия. Если каждому элементу $X(x_1, x_2, x_3) \in S_3$ поставить в соответствие столбец, составленный из элементов $(x_1, 1, x_2, x_3, 1)$, то группу $FH(S_3)$ можно представить как состоящую из матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t + h_1} & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\mu t + h_1} & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта группа преобразований является четырёхмерной, и групповая операция задаётся формулой

$$(t_1, h_1, h_2, h_3) * (t_2, g_1, g_2, g_3) = (t_1 + t_2, h_1 + g_1, e^{\mu t_1 + h_1} g_2 + h_2, e^{2\mu t_1 + h_1} g_3 + h_3).$$

Цель данной работы: дать алгебраическую характеристику группы $FH(S_3)$.

Рассмотрим две коммутативные группы G_1 и G_2 , координаты двух элементов в первой из которых будем обозначать (t_1, h_1) , (t_2, g_2) , а во второй – (h_2, h_3) и (g_2, g_3) . Групповые операции:

$$(t_1, h_1) * (t_2, g_2) = (t_1 + t_2, h_1 + g_1) \text{ и } (h_2, h_3) * (g_2, g_3) = (g_2 + h_2, g_3 + h_3).$$

Рассмотрим оператор $\varphi[t_1, h_1]$, действующий на группе G_2 по формуле

$$\varphi[t_1, h_1](g_2, g_3) = (e^{\mu t_1 + h_1} g_2, e^{2\mu t_1 + h_1} g_3)$$

Легко убедиться, что

$$\varphi[t_1, h_1]((h_2, h_3) * (g_2, g_3)) = (\varphi[t_1, h_1](h_2, h_3)) * (\varphi[t_1, h_1](g_2, g_3)).$$

Это значит, что $\varphi[t_1, h_1]: G_2 \rightarrow G_2$ есть автоморфизм.

Групповую операцию в $FH(S_3)$ можно теперь переписать так:

$$(t_1, h_1, h_2, h_3) * (t_2, g_1, g_2, g_3) = ((t_1, h_1) * (t_2, g_2), (h_2, h_3) * \varphi[t_1, h_1](g_2, g_3)).$$

При этом следует ещё отметить, что отображение $\varphi: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$, сопоставляющее элементу $(t_1, h_1) \in G_1$ автоморфизм $\varphi[t_1, h_1]$ есть гомоморфизм (в группе $\text{Aut}(G_2)$ естественно используется операция композиции отображений). Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi[(t_1, h_1) * (t_2, g_1)](g_2, g_3) &= (e^{\mu(t_1 + t_2) + h_1 + h_2} g_2, e^{2\mu(t_1 + t_2) + h_1 + h_2} g_3) = \\ &= \varphi[t_1, h_1](\varphi[t_2, g_1](g_2, g_3)) = \varphi[t_2, g_1](\varphi[t_1, h_1](g_2, g_3)). \end{aligned}$$

Тем самым, мы доказали теорему.

Теорема. Полная группа подобий $FH(S_3)$ самоподобного многообразия группы Ли S_3 , снабжённой левинвариантной лоренцевой метрикой, является полупрямым произведением двух двумерных коммутативных групп $G_2 \rtimes_{\varphi} G_1$.

Литература

1. Подоксёнов М.Н., Герасимович Н.С. Самоподобное лоренцево многообразие одной специальной трёх-мерной группы Ли // Омская конференция по геометрии и её приложениям 13-16 октября 2025, ОмГУ Ф.М. Достоевского, 2025. С.50-53.
2. Герасимович Н.С. Самоподобное однородное лоренцево многообразие группы Ли S_3 // Молодежь XXI века: образование, наука, инновации: материалы XII Международной конференции аспирантов и молодых ученых, Витебск, 5 декабря 2025 г. Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2025. Т. 1. С. 7–8.

Сведения об авторах:

Подоксёнов Михаил Николаевич – доцент кафедры математики Витебского государственного университета имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: michael.vitebsk@gmail.com, SPIN-код: 5120-2532.

Герасимович Наталия Сергеевна – студентка 3 курса факультета математики и информационных технологий Витебского государственного университета имени П.М. Машерова, e-mail: n96872685@gmail.com