УДК 517.94

С.М. Бородич[1], Т.В. Кавитова[2]

[1]*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Беларусь*

[2]*Филиал Белорусского государственного технологического университета «Витебский государственный технологический колледж», Витебск, Беларусь*

ОБ ОДНОМ НЕАВТОНОМНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ПАРАМЕТРА

Ключевые слова: неавтономное параболическое уравнение, полугруппа операторов, составная предельная траектория

Рассматривается неавтономное параболическое уравнение

$$\partial_t u = \Delta u - f(u) - \varepsilon f_1(u,t) - g(x) - \varepsilon g_1(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \qquad (1)$$

с граничным условием

$$u\,|_{x\in\partial\Omega} = 0. \qquad (2)$$

Здесь ε – числовой параметр, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$; $f(u) \in C^{1+\beta}(\mathbf{R})$, $0 < \beta < 1$; $f_1(u,t) \in C^{1,0}(\mathbf{R} \times [0,+\infty))$, $g(x) \in L_2(\Omega)$, $g_1(\cdot,t) \in L_\infty([0,+\infty); L_2(\Omega))$. Предполагается, что

$$(f(u) + \varepsilon f_1(u,t))u \ge \mu_0 |u|^{2+\rho} - C, \quad f'(u) + \varepsilon f'_{1u}(u,t) \ge -C,$$

$$|f'(u)| \le C(1+|u|^{p_0}), \quad |f'_{1u}(u,t)| \le C(1+|u|^{p_0}), \quad \int_0^u f(s)ds \ge -C$$

для всех $u \in \mathbf{R}$, $t \ge 0$ и $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, где μ_0, ρ, C, p_0 – некоторые положительные константы, причем $p_0 \le 2/(n-2)$.

В качестве пространства начальных данных задачи (1), (2) рассматривается пространство $E = H_0^1(\Omega)$. При каждом ε, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, и любых $T > 0$ и $u_0 \in E$ задача (1), (2) имеет единственное решение $u(t,\varepsilon)$, принадлежащее классу

$$V = L_\infty([0,T], L_2(\Omega)) \cap L_2([0,T], E) \cap L_{2+\rho}(\Omega))$$

и удовлетворяющее начальному условию $u|_{t=0} = u_0$ (см., например, [1]).

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) автономно. В этом случае задача (1), (2) порождает в пространстве E полугруппу операторов $\{S_t, t \ge 0\}$, сопоставляющих каждому начальному значению $u_0 \in E$ значение соответствующего решения в момент времени t: $S_t : u_0 \to u(t,0)$.

Пусть z – неподвижная точка полугруппы $\{S_t\}$. Обозначим через $M^{\text{н}}(z)$ множество всех $v \in E$, для которых траектория $S_t v$ продолжаема для всех $t < 0$, причем $S_t v \to z$ в E при $t \to -\infty$.

Функция $g(x) \in L_2(\Omega)$ называется регулярным значением оператора

$$Av \equiv \Delta v - f(v),\ v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

если для любого решения $z = z(x)$ уравнения $Av = g$ оператор $A'(z)$, определенный формулой $A'(z)v = \Delta v - f'(z)v$, обратим.

Пусть G – множество всех регулярных значений оператора A. Известно (см. [2]), что G всюду плотно и открыто в $L_2(\Omega)$; кроме того, если $g(x) \in G$, то полугруппа $\{S_t\}$ имеет конечное множество неподвижных точек $\{z_1, \ldots, z_n\}$ и каждое множество $M^{\text{н}}(z_i)$ является гладким конечномерным многообразием.

Пусть $g(x) \in G$, $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ – множество неподвижных точек полугруппы $\{S_t\}$, $B \subset E$, $U_\varepsilon(B)$ – совокупность всех решений задачи (1), (2) с начальными условиями из множества B, определённых при $t \geq 0$. *Семейством составных предельных траекторий, соответствующих* $U_\varepsilon(B)$, назовем совокупность кусочно-непрерывных по t траекторий $\tilde{u}(t)$ полугруппы $\{S_t\}$, таких что:

1) $\tilde{u}(t)$ непрерывна в E по t за исключением точек разрыва $t_1, \ldots, t_m$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ $(m \leq n)$;

2) $\tilde{u}(t) = S_t u_0$ при $0 \leq t < t_1$ для некоторого $u_0 \in B$;

3) значения $\tilde{u}(t_i - 0)$ и $\tilde{u}(t_i + 0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ лежат в некоторой малой δ-окрестности множества Z, причем оба принадлежат δ-окрестности одной и той же неподвижной точки (δ не зависит от i);

4) в δ-окрестности каждой неподвижной точки могут лежать значения $\tilde{u}(t_i \pm 0)$ не более чем в одной точке разрыва t_i, при этом, если $\tilde{u}(t_i + 0) \in O_\delta(z_{k_i})$, то $\tilde{u}(t) = S_{t - t_i} \tilde{u}(t_i + 0) \in M^{\text{н}}(z_{k_i})$ при $t_i \leq t < t_{i+1}$ $(t_{m+1} = +\infty)$.

Теорема. Пусть $g(x) \in G$, B – ограниченное в E множество. Тогда найдутся такие малые числа $\varepsilon_1 > 0$ и $q > 0$ и достаточно большое число C_0, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ для любого $u(\cdot, \varepsilon) \in U_\varepsilon(B)$ существует составная предельная траектория $\tilde{u}(t)$ такая, что $\tilde{u}(0) = u(0, \varepsilon)$ и

$$\sup_{t \geq 0} \| u(t, \varepsilon) - \tilde{u}(t) \|_E \leq C_0 |\varepsilon|^q.$$

Литература

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.

Сведения об авторах:

Бородич Сергей Митрофанович – старший преподаватель кафедры математики Витебского государственного университета им. П.М. Машерова, e-mail: sirius722@rambler.ru, **SPIN-код:** 5379-9020.

Кавитова Татьяна Валерьевна – преподаватель филиала Белорусского государственного технологического университета «Витебский государственный технологический колледж», кандидат физико-математических наук, e-mail: kavitovatv@tut.by, **SPIN-код:** 4044-6196.