Омская конференция
по геометрии и её приложениям
13-16 октября 2025. С. 50–53

УДК 514.765+512.812.4

САМОПОДОБНОЕ ЛОРЕНЦЕВО МНОГООБРАЗИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТРЁХМЕРНОЙ ГРУППЫ ЛИ

М.Н. Подоксёнов
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com, SPIN-код: 5120-2532
Н.С. Герасимович
студентка, e-mail: n96872685@gmail.com

Витебский государственный университет имени П.М.Машерова

Витебск, Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается специальная трёхмерная неунимодулярная группа Ли. На ней строится левоинвариантная лоренцева метрика, относительно которой эта группа Ли превращается в самоподобное многообразие. Найдены формулы, по которым действует существенная однопараметрическая группа подобий, оставляющая неподвижным единичный элемент группы Ли.

Ключевые слова: Самоподобное многообразие, группа Ли, алгебра Ли, левоинвариантная метрика, автоподобие.

Риманово или лоренцево многообразие называется *самоподобным*, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий. Цель данной работы – построить самоподобное лоренцево многообразие одной специальной трёхмерной группы Ли. Для ряда других трёхмерных и четырёхмерных групп Ли эта задача была решена в работах [1] – [4].

Алгебра Ли G называется *унимодулярной*, если для любого вектора $x \in G$ выполнено $\mathrm{trace}\,\mathrm{ad}(\mathrm{X}) = 0$. Все трёхмерные неунимодулярные алгебры Ли содержат двумерный коммутативный идеал $\mathcal{L}$, являющийся унимодулярным ядром алгебры Ли. Если выбрать базис (E_1, E_2, E_3) так, что $(E_2, E_3) \in L$, матрица линейного преобразования $\mathrm{ad}(E_3)|_{\mathcal{L}}$ полностью определяет алгебру Ли с точностью до изоморфизма [5]. Среди всех трёхмерных неунимодулярных алгебр Ли выделяется одна, у которой такое преобразование является тождественным при подходящем выборе вектора E_3. Тем самым, коммутационные соотношения определяются равенствами

$$[E_1, E_2] = E_2, [E_1, E_3] = E_3, [E_2, E_3] = \vec{0}. \tag{1}$$

Назовём эту алгебру Ли *специальной* и обозначим её $\mathcal{S}_3$. Любой базис в $\mathcal{S}_3$, для которого коммутационные соотношения имеют вид (1), будем называть каноническим. В работе [6] найдены матричные представления алгебры Ли $\mathcal{S}_3$ и соответствующей связной односвязной группы Ли S_3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & u_1 & 0 & u_3 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_1, u_2, u_3 \in \boldsymbol{R},$$

$$X = \begin{pmatrix} \mathrm{ch} x_1 & 0 & \mathrm{sh} x_1 & x_2 \\ 0 & e^{x_1} & 0 & x_3 \\ \mathrm{sh} x_1 & 0 & \mathrm{ch} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}.$$

Этим матрицам приписываем координаты (u_1, u_2, u_3) и (x_1, x_2, x_3). Тогда групповая операция, обратный элемент, экспоненциальное отображение и обратное к нему отображение задаются соответственно формулами:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, y_2 e^{x_1} + x_2, y_3 e^{x_1} + x_3),$$

$$(x_1, x_2, x_3)^{-1} = (-x_1, e^{-x_1} x_2, e^{-x_1} x_3).$$

$$\exp(u_1, u_2, u_3) = \left(u_1, \frac{u_2}{u_1}(e^{u_1} - 1), \frac{u_3}{u_1}(e^{u_1} - 1) \right),$$

$$\exp^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, \frac{x_1 x_2}{e^{x_1} - 1}, \frac{x_1 x_3}{e^{x_1} - 1} \right).$$

Последние формулы содержат устранимые неопределенности при $u_1 \to 0$ и $x_1 \to 0$.

Группа Ли S_3 является экспоненциальной, при этом экспоненциальное отображение биективно.

Также в работе [6] найдены формулы, по которым действует полная группа движений группы Ли S_3, снабжённой левоинвариантной римановой метрикой, и дана алгебраическая характеристика этой группы движений.

Две левоинвариантные метрики на одной группе Ли мы относим к одному классу, если соответствующие многообразия изометричны.

Теорема 1. *На группе Ли S_3 существует единственный класс левоинвариантых лоренцевых метрик, при котором данная группа Ли превращается в самоподобное многобразие. Для метрики из данного класса в естественных координатах метрический тензор задаётся матрицей*

$$[g(X)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{-x_1} \\ 0 & e^{-2x_1} & 0 \\ -e^{-x_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

а однопараметрическая группа подобий, оставляющая неподвижным единичный элемент группы Ли, действует по формулам

$$\begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = e^{\mu t} x_2, \\ x_3' = e^{2\mu t} x_3, \end{cases} \tag{3}$$

$\mu > 0, t \in \boldsymbol{R}$.

Доказательство. В алгебре Ли $\mathcal{S}_3$ можно выбрать канонический базис так, что она допускает однопараметрическую группу автоподобий. Матрица Грама этого базиса и матрица, задающая действие указанной группы, имеют соответственно вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[F_t] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}, \mu > 0, t \in \boldsymbol{R}.$$

Здесь, и в дальнейшем, используем обозначение $[F_t]$ – матрица проебразования F_t.

Находим матрицу, обратную к матрице дифференциала левого сдвига $(L_X)_* : T_Y G_3 \to T_{XY} G_3$ в произвольной точке $Y \in S_3$:

$$W = [(L_X)_*]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x_1} \end{pmatrix}.$$

С её помощью находим матрицу метрического тензора g в точке $X(x_1, x_2, x_3)$ по формуле $[g(X)] = W^T(X)\Gamma W(X)$. Получаем матрицу (2).

Мы строим однопараметрическую группу подобий, оставляющую неподвижным единичный элемент группы Ли по формуле $f_t = \exp \circ F_t \circ \exp^{-1}$. Находим, что преобразования f_t действуют по формулам (1).

Для того, чтобы убедиться, что построенная однопараметрическая группа преобразований действительно является группой подобий, мы находим матрицу дифференциала $[(f_t(X))_*]$ и обратную к ней матрицу

$$I_t = [(f_t(X))_*]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\mu t} \end{pmatrix}.$$

Затем по формуле $[(f_t)^* g(X)] = I_t^T [g(X)] I_t$ находим матрицу метрического тензора $(f_t)^* g(X)$:

$$[(f_t)^*g(X)] = e^{-2\mu t}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{-x_1} \\ 0 & e^{-2x_1} & 0 \\ -e^{-x_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $[(f_t)^*g(X)] = e^{-2\mu t}[g(X'(t))]$, где $X'(t) = f_t(X)$. Это означает, что построенная однопараметрическая группа преобразований $\{f_t\}$ состоит из подобий для левоинвариантного метрического тензора (2). Эта группа является существенной, потому что она имеет неподвижную точку – единичный элемент группы, и для любого $t \neq 0$ дифференциал преобразования f_t в этой точке является подобием. ∎

Заключение. Мы построили самоподобное однородное лоренцево многообразие специальной неунимодулярной трёхмерной группы Ли. Наша ближайшая задача: найти полную группу подобий данного многообразия и выяснить, является ли оно плоским или нет.

Литература

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой // Вестник ВГУ. 2011. № 5. С. 10–15.
2. Подоксёнов М.Н., Линкевич М.В. Самоподобное однородное лоренцево многообразие группы Ли $SE(1,1)$ // Математические структуры и моделирование. 2024. № 2(70). С. 21–28.
3. Подоксёнов М.Н., Гуц А.К. Четырёхмерные самоподобные однородные многообразия группы Ли $Hs \times R^+$ // Вестник Витебского государственного университета имени П.М. Машерова. 2022. № 1. С. 5–10.
4. Подоксёнов М.Н., Шпакова Ю.А. Самоподобное однородное лоренцево многообразие группы Ли $SE(2) \times R^+$ // Математические структуры и моделирование. 2023. № 1(65) С. 46–54.
5. Milnor J. Curvaturies of left-invariant metrics on Lie groups //Adv. Math. 1976. V. 21. P. 293-–329.
6. Подоксёнов М.Н., Ян Г. Полная группа изометрий специальной трёхмерной группы Ли // Математические структуры и моделирование. 2024. № 3(71). С. 33–43.

Дата поступления в оргкомитет: 16.08.2025