3. Шеметков Л. А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 1999. № 1 (15). С. 5–13.

4. Guo W. On Injectors of Finite Soluble groups / W. Guo, N. T. Vorob'ev // Comm. in Algebra. 2008. Vol. 36. P. 3200–3208.

5. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3, № 2. P. 193–207.

6. Skiba A. N. On σ-properties of Finite groups I // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2014. № 4 (21). P. 89–96.

7. Skiba A. N. On σ-properties of Finite groups II // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2015. № 3 (24). P. 70–83.

8. Guo W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N. T. Vorob'ev // J. Algebra. 2020. Vol. 542, № 15. P. 116–129.

УДК 512.542

О проблеме существования и сопряженности инъекторов в конечной группе[1]

Н. Т. Воробьев (Беларусь, г. Витебск)
Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
e-mail: ntvorobyov@mail.ru

On existence and conjugance problem of injectors in a finite group

N. T. Vorob'ev (Belarus, Vitebsk)
Masherov Vitebsk State University
e-mail: ntvorobyov@mail.ru

Основополагающим результатом в теории конечных групп является теорема Силова о том, что в любой группе существуют силовские p-подгруппы и любые две из них сопряжены. Развитию силовской теории в универсуме всех конечных разрешимых групп была посвящена работа Гашюца, Фишера и Хартли [1], в которой было найдено оригинальное обобщение теорем Силова (в разрешимых группах) и Холла в терминах классов Фиттинга. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. При этом подгруппу V группы G называют $\mathfrak{F}$-инъектором G, если $V \cap N$ является максимальной из подгрупп G принадлежащих $\mathfrak{F}$ для любой субнормальной подгруппы N группы G. В [1] было доказано, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой конечной разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Понятно, что из указанной теоремы как следствия мы получаем теоремы Холла и Силова, если $\mathfrak{F}$ — класс всех разрешимых π-групп и $\mathfrak{F}$ — класс всех разрешимых p-групп соответственно.

Дальнейшие исследования в этом направлении обуславливают два следующих вопроса:

[1]Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция—2025» (№ государственной регистрации 20210495).

(1) верно ли, что если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ состоит из конечных разрешимых групп, то в любой конечной разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы? (см. [2], вопрос 11.117)
(2) в случае существования $\mathfrak{F}$-инъекторов в конечной группе G (в общем случае неразрешимой) каковы классы Фиттинга, для которых любые два $\mathfrak{F}$-инъектора сопряжены в G?

Решение вопроса (1) нами получено для случая конечных обобщенно нильпотентных групп, решение вопроса (2), если класс Фиттинга является классом Хартли [3] произвольных конечных групп. Для этой цели мы используем σ-метод исследования групп и их классов, предложенный А.Н. Скибой (см., например, [4, 5]), который состоит в следующем. Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$, где $\pi(n)$ — множество всех простых делителей числа n. Группу G называют σ-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; σ-нильпотентной, если $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$; σ-разрешимой, если каждый главный фактор G σ-примарен. Очевидно, что в случае разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$ σ-нильпотентная и σ-разрешимая группы являются нильпотентной и разрешимой соответственно.

Всякое отображение $h : \sigma \to \{$непустые классы Фиттинга$\}$ назовем σ-функцией Хартли или просто H_σ-функцией [6]. Напомним, что произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ называется класс групп $(G \mid G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$, где $G_{\mathfrak{F}}$ — наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем σ-классом Хартли, если $\mathfrak{H} = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$, где $\sigma_i' = \mathbb{P} \setminus \sigma$, $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ — классы всех σ_i'-групп и σ_i-групп соответственно. Пусть $\mathfrak{N}_\sigma$ — класс всех конечных σ-нильпотентных групп и $F_\sigma(G)$ — наибольшая нормальная σ-нильпотентная подгруппа группы G. Группу G назовем $\mathfrak{N}_\sigma$-скованной или просто σ-скованной, если $C_G(F_\sigma(G)) \leqslant F_\sigma(G)$. Если h — H_σ-функция, то подгруппу $G_h = \prod_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)$ назовем h_σ-радикалом группы G.

Доказана следующая

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *в любой конечной группе существуют σ-нильпотентные инъекторы*;

2) *если $\mathfrak{H}$ — σ-класс Хартли и группа G такова, что фактор G/G_h σ-скован (в частности, фактор G/G_h σ-разрешим), то в G существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fischer B., Gaschütz W., Hartley B. Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z. 1967. Bd. 102. S. 337–339.

2. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. – 18-е изд., доп., включающее Архив решенных задач / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН ; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск : изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2014. 253 с.

3. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math, Soc. 1969. Vol. s3-19, no. 2. P. 193-207.

4. Skiba A. N. On σ-properties of finite groups I // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2014. No. 4 (21). P. 89–96.

5. Skiba A. N. A generalization of a Hall theorem // J. Algebra Appl. 2016. Vol. 15, no. 5. P. 1650085 (13 pages).

6. Guo W., Zhang Li, Vorob'ev N. T. On σ-local Fitting classes // J. Algebra. 2020. Vol. 542, no 1. P. 116–129.