
МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫМ И ГУМАНИТАРНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ В СРЕДНЕЙ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

РАЗВИТИЕ МЫШЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК

*Л.Л. Ализарчик
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Процесс решения задач на отыскание или построение геометрического места точек (ГМТ) способствует развитию геометрической интуиции, пространственного и логического мышления. Построение гипотезы о фигуре, которая является заданным геометрическим местом точек, развивает способности оперировать плоскими и пространственными геометрическими образами и проводить математические исследования. На уроках геометрии в учреждениях общего среднего образования задачам на ГМТ на плоскости и в пространстве уделяется недостаточное внимание, так как задания такого типа практически не включаются в централизованные тестирования и экзамены.

Многолетний педагогический опыт преподавания частных методик и различных разделов элементарной математики, к сожалению, позволяет говорить о низком уровне сформированности умений решать задачи на ГМТ у студентов педагогических специальностей. Поэтому цель проводимого научно-методического исследования – определить и реализовать средства, методы качественной и эффективной подготовки в университете будущих учителей математики к формированию у учащихся умения решать задачи на ГМТ и преподаванию геометрического материала с использованием элементов математического исследования.

Материал и методы. Педагогический эксперимент по теме исследования проводится на факультете математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова. В качестве рабочего материала используются учебные программы по учебному предмету «Математика» для учреждений общего среднего образования, учебные программы учреждения образования по учебным дисциплинам «Практикум по решению задач по геометрии» и «Элементарная математика: планиметрия» для специальности «Физико-математическое образование (с указанием предметных областей)».

Результаты и их обсуждение. Согласно учебной программе по математике для 7 класса, параграф «Геометрическое место точек» предлагается для изучения в теме «Задачи на построение» [1]. В учебном пособии без логических обоснований приводятся примеры ГМТ (окружность, серединный перпендикуляр, биссектриса, сфера, геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных прямых, геометрическое место точек, находящихся на заданном расстоянии от данной прямой) и предлагается использовать метод геометрических мест точек при решении задач на построение [2, с. 171–174]. Однако не приводятся примеры полного решения самих задач на ГМТ с обоснованиями и не предлагается алгоритм решения задач такого типа. В дальнейшем при изучении геометрического материала задачи на ГМТ не часто предлагаются учащимся, так как педагоги считают их одними из сложных для решения.

В студенческой аудитории на лекциях и практических занятиях мы предлагаем разнообразные задачи на ГМТ и апробируем методику решения таких задач на уроках геометрии [3, с. 33]. Студенты учатся строить диалог с будущими учащимися таким

образом, чтобы они не испытывали психологический барьер перед такими непростыми задачами, создавали геометрические образы и обосновывали свои предложения.

Решение задачи на геометрическое место точек предусматривает несколько этапов. Первоначально формулируется гипотеза о некоторой фигуре Φ , которая, по предположению, является ответом. Обязательным является доказательство *двух условий*: все точки, обладающие требуемым свойством, принадлежат фигуре Φ , и все точки фигуры Φ обладают требуемым свойством [4, с. 447]. Иногда задача усложняется необходимостью построить с помощью циркуля и линейки заданного ГМТ.

Часто, построив гипотезу, студенты и учащиеся готовы сразу записать ответ. И только примеры и контрпримеры могут убедить, что гипотеза не всегда бывает правильной. Например, при решении задачи о геометрическом месте точек плоскости, равноудаленных от сторон заданного угла, все называют только биссектрису, без предположений о других возможных областях плоскости. Такая ошибка связана, прежде всего, с неверным представлением о расстоянии от точки до луча, поэтому решение задач на ГМТ охватывает очень много различных тем курса геометрии.

При решении задач на ГМТ помогает геометрический чертеж, правильно отражающий существенные геометрические особенности конфигурации, о которой идет речь в условии [5, с. 25]. Однако студенты и учащиеся говорят о том, что с помощью традиционных средств построения (циркуля и линейки) в тетради или на школьной доске сложно подметить закономерности и получить ответ. На занятиях студентам предлагается для получения гипотезы использовать интерактивное приложение GeoGebra. По заданным свойствам данная математическая программа предоставляет возможность получать наглядные динамические иллюстрации, содержащие большое количество точек, которые позволяют подмечать геометрические закономерности и получать гипотезу, которую затем обязательно нужно обосновать [6, с. 49–52].

Для обоснования *первого условия* гипотезы часто используется метод от противного и доказывается, что на плоскости или в пространстве не существует других таких точек, кроме принадлежащих гипотетической фигуре. Иногда удобнее доказывать принадлежность точек определенной фигуре другими логическими рассуждениями. Например, чтобы найти геометрическое место середин хорд данной окружности с центром в точке O , проходящих через заданную точку M , достаточно доказать, что такие точки являются вершинами прямоугольных треугольников с общей гипотенузой OM и, следовательно, лежат на одной окружности с диаметром OM (рисунок 1).

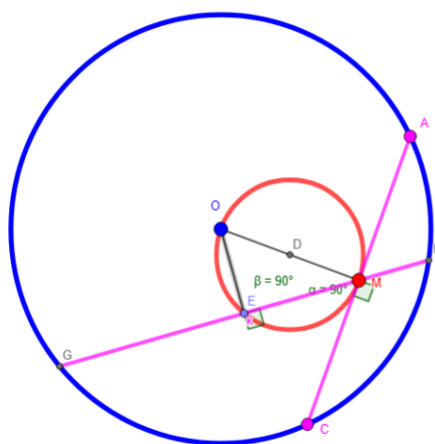


Рисунок 1 – Обоснование первого условия

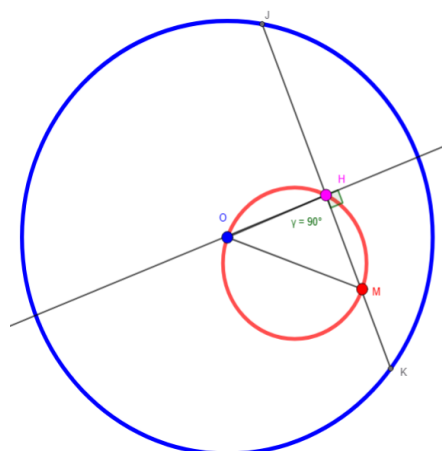


Рисунок 2 – Обоснование второго условия

Чтобы обосновать *второе условие* гипотезы в этой задаче достаточно доказать, что любая точка найденной окружности удовлетворяет предложенному условию. Для этого выбирается произвольная точка N этой окружности, строится хорда JK , проходящая через нее и заданную в условии задачи точку M , и доказывается, что выбранная произвольным образом точка N является серединой построенной хорды JK (рисунок 2). Таким образом, обосновывается, что через любую точку построенной окружности с диаметром OM можно провести хорду таким образом, чтобы эта точка являлась ее серединой.

Следует предлагать задачи на ГМТ не только на плоскости, но и при изучении стереометрического материала. Например, вызывает интерес задача на определение геометрического места середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых. И если гипотеза о плоскости, параллельной этим прямым и проходящей через середину одного из отрезков, появляется, как правило, у многих, то доказательство того, что других точек нет, и все точки плоскости удовлетворяют условию задачи, дается не так легко. Даже, прибегнув к помощи искусственного интеллекта, студенты и учащиеся не всегда могут четко и логично сформулировать обоснование.

Практика показывает, что только решение серии задач на ГМТ формирует умение получать гипотезу и выстраивать логическую цепочку доказательства.

Студентам и учащимся предлагается еще один метод решения задач на ГМТ – аналитический (с помощью системы координат). Так, этот метод можно использовать при решении задачи на отыскание множества середин всевозможных отрезков заданной длины d , концы которых лежат на сторонах данного прямого угла. Поместив заданный отрезок в первую четверть системы координат, и установив координаты его середины, учащиеся могут записать уравнение четверти окружности, которое и задает фигуру, являющуюся ответом задачи. Некоторые студенты, которые предпочитают аналитическое решение геометрических задач, почти все предлагаемые задачи на ГМТ решают координатным методом.

Заключение. Проводимый педагогический эксперимент показывает, что названные формы работы со студентами педагогических специальностей, разработанная серия планиметрических и стереометрических задач способствуют качественной подготовке компетентных специалистов, которые смогут формировать у учащихся умения решать задачи на геометрическое место точек, развивать геометрическое мышление и интерес к предмету.

1. Учебная программа по учебному предмету «Математика» для VII класса учреждений образования, реализующих образовательные программы общего среднего образования с русским языком обучения и воспитания [Электронный ресурс]. – URL: <https://adu.by/images/2025/08/12/Matem-5-9.pdf> (дата обращения: 04.12.2025).

2. Казаков, В.В. Геометрия: учебное пособие для 7 классов учреждения общего среднего образования с русским языком обучения / В.В. Казаков. – 2-е изд., испр. и доп. – Минск: Народная асвета. – 2022. – 183 с.

3. Элементарная математика: планиметрия: методические рекомендации / [сост.: Л.Л. Ализарчик, Т. Б. Караулова, Т. А. Александрович]. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2022. – 35 с. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/34272> (дата обращения: 04.12.2025).

4. Ализарчик, Л. Л. Формирование у будущих учителей математики умения решать планиметрические задачи / Л.Л. Ализарчик // Наука - образованию, производству, экономике: материалы 74-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 18 февраля 2022 г. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2022. – С. 446-447. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/31770> (дата обращения: 04.12.2025).

5. Дорофеев, Г.В. Чертеж в геометрической задаче / Г.В. Дорофеев, Н.Х. Розов // Квант . – 2020. – № 11. – С. 25–30.

6. Ализарчик, Л. Л. Организация исследовательской деятельности при изучении математических дисциплин / Л. Л. Ализарчик, А. В. Козлова, А. Д. Тишуров // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2025. – № 1. – С. 46-55. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/46524> (дата обращения: 04.12.2025).